

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля

Курс из трёх лекций по 80 минут

Лекция 1. Кратные интегралы

Лекция 2. Криволинейные и поверхностные интегралы

Лекция 3. Теория поля

Лекция 1 · 90 минут

Кратные интегралы

- Двойной интеграл: определение, свойства, геометрический смысл
- Сведение к повторному интегралу; расстановка пределов
- Замена переменных, полярные координаты
- Приложения: площадь, объём, масса, моменты
- Тройной интеграл; цилиндрические и сферические координаты

Задача о массе плоской пластинки

Пластинка занимает область D ;

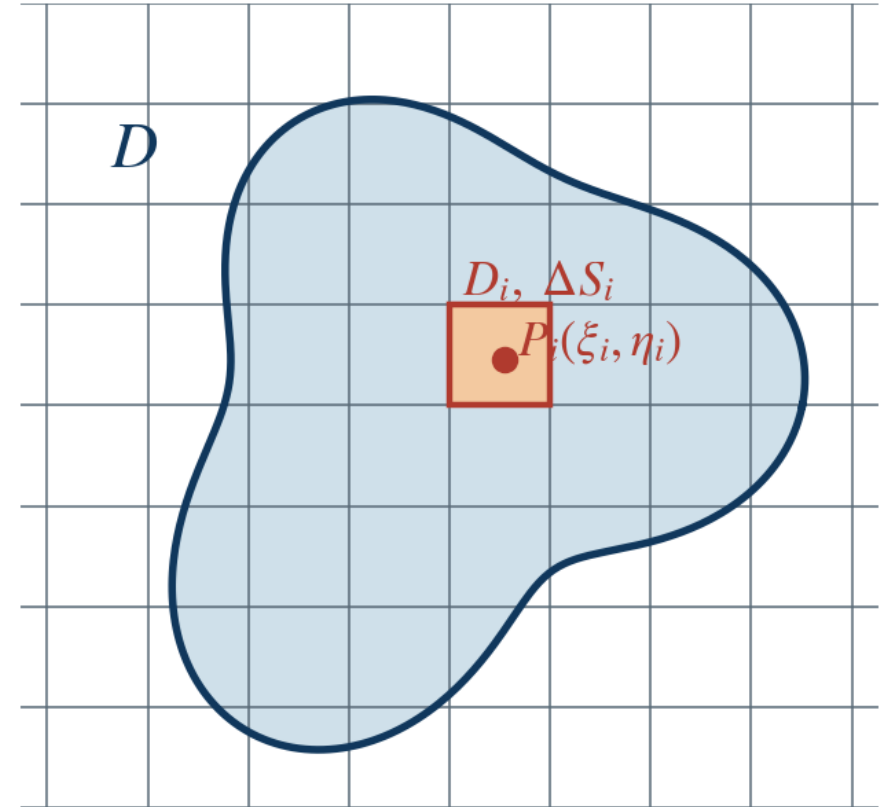
плотность в точке $M(x, y)$ равна $\rho(x, y)$.

Разобьём D на части $D_1, \dots, D_n$ площадей ΔS_i и в каждой возьмём точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$:

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

Суммируем и измельчаем разбиение:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$



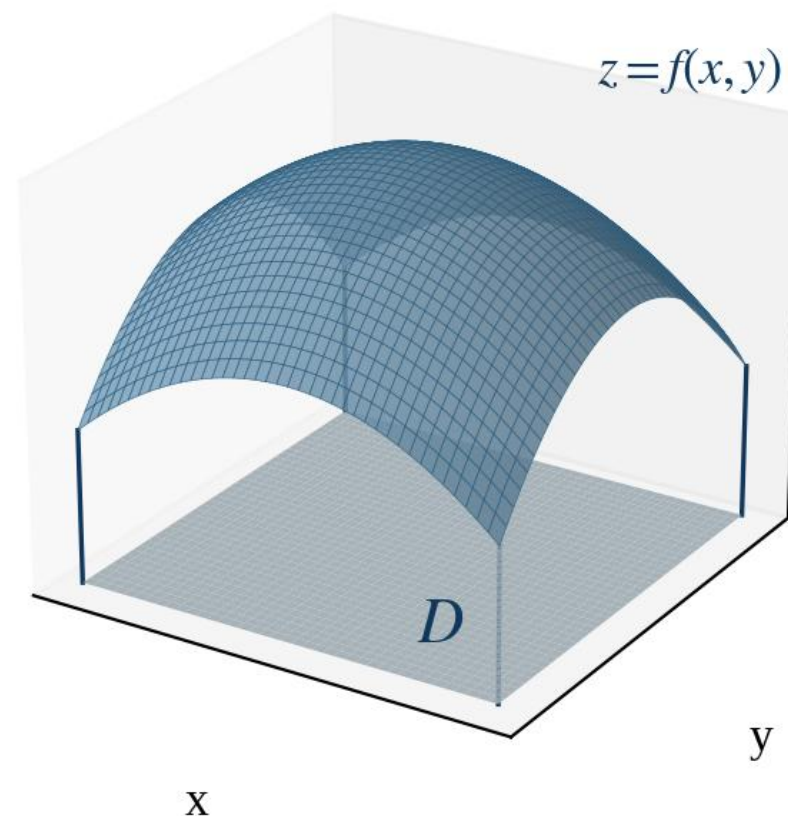
Задача об объёме цилиндроида

Тело ограничено снизу областью D ,
сверху — поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$,
с боков — цилиндром с образующими,
параллельными Oz .

Заменяя кусок тела прямым цилиндром
высоты $f(\xi_i, \eta_i)$, получаем

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

Обе задачи привели к пределу сумм
одного вида.



Определение двойного интеграла

Ранг (мелкость) разбиения $\lambda = \max_i d(D_i)$ — наибольший из диаметров частей.

Число I называют двойным интегралом, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ и любом выборе точек P_i

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i - I \right| < \varepsilon$$

$$I = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Существование. Линейность и аддитивность

Теорема существования

Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей, то она интегрируема в D .

Основные свойства

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_D f dS + \beta \iint_D g dS$$

$$\iint_D f dS = \iint_{D_1} f dS + \iint_{D_2} f dS$$

Аддитивность позволяет разбивать сложную область на простые части.

Оценки и теорема о среднем

1. Если $f \leq g$ в D , то $\iint_D f \, dS \leq \iint_D g \, dS$.

$$\left| \iint_D f \, dS \right| \leq \iint_D |f| \, dS$$

2. Если $m \leq f(x, y) \leq M$ в D , то $m S(D) \leq \iint_D f \, dS \leq M S(D)$.

3. Теорема о среднем: для непрерывной f найдётся точка $P_0(\xi, \eta) \in D$:

$$\iint_D f(x, y) \, dS = f(\xi, \eta) \cdot S(D)$$

Геометрический и физический смысл

Объём и площадь

$$V = \iint_D f(x, y) dS \quad (f \geq 0), \quad S(D) = \iint_D dS$$

Масса пластинки

$$m = \iint_D \rho(x, y) dS$$

Среднее значение функции по области

$$f_{\text{cp}} = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) dS$$

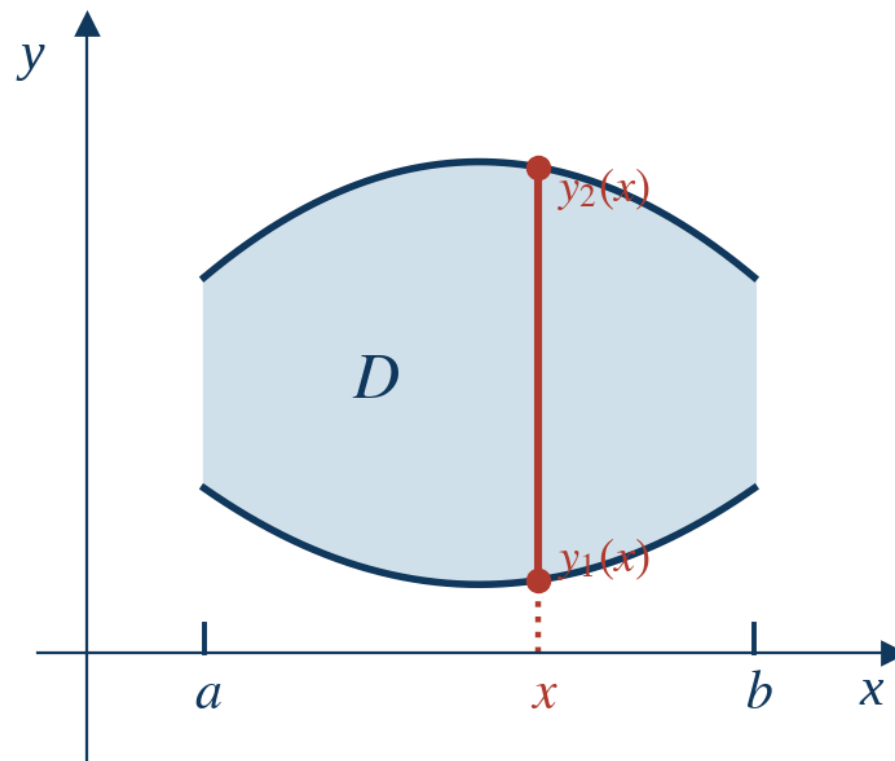
Правильные области

Область правильна в направлении Oy ,
если

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

Любая вертикаль пересекает границу
ровно в двух точках.

Аналогично — правильность в
направлении Ox . Неправильную область
разбивают на части.



Сведение к повторному интегралу

Теорема. Пусть $f(x, y)$ непрерывна в области D , правильной в направлении Oy . Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Для области, правильной в направлении Ox :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

Внешние пределы — всегда числа; внутренние могут зависеть от внешней переменной.

Алгоритм расстановки пределов

- Построить чертёж области; найти точки пересечения линий.
- Выбрать направление интегрирования и проверить правильность области.
- Спроецировать D на ось — получим внешние пределы $[a; b]$.
- Провести вертикаль: точка входа даёт $y_1(x)$, точка выхода — $y_2(x)$.
- Если линия входа или выхода меняется — разбить область на части.
- Вычислять повторный интеграл «изнутри наружу».

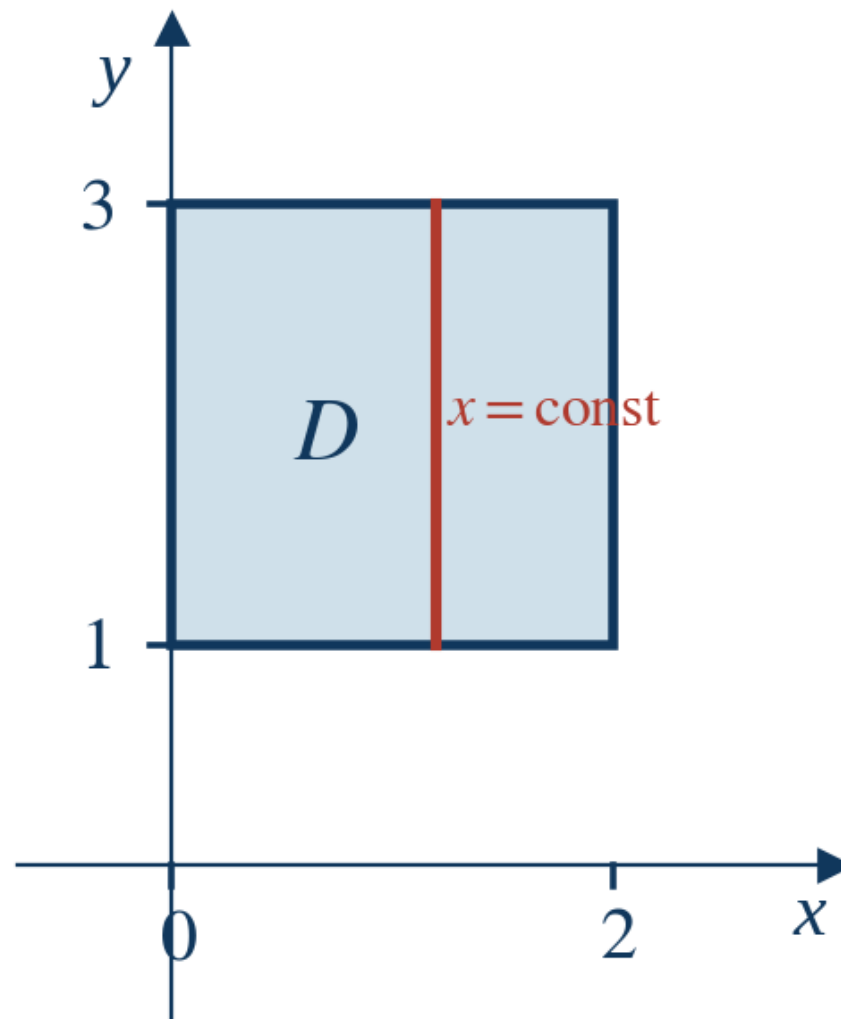
Пример 1. Интеграл по прямоугольнику

Вычислить $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где $D = \{0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$.

$$I = \int_0^2 dx \int_1^3 (x + 2y) dy$$

$$\int_1^3 (x + 2y) dy = (xy + y^2) \Big|_1^3 = 2x + 8$$

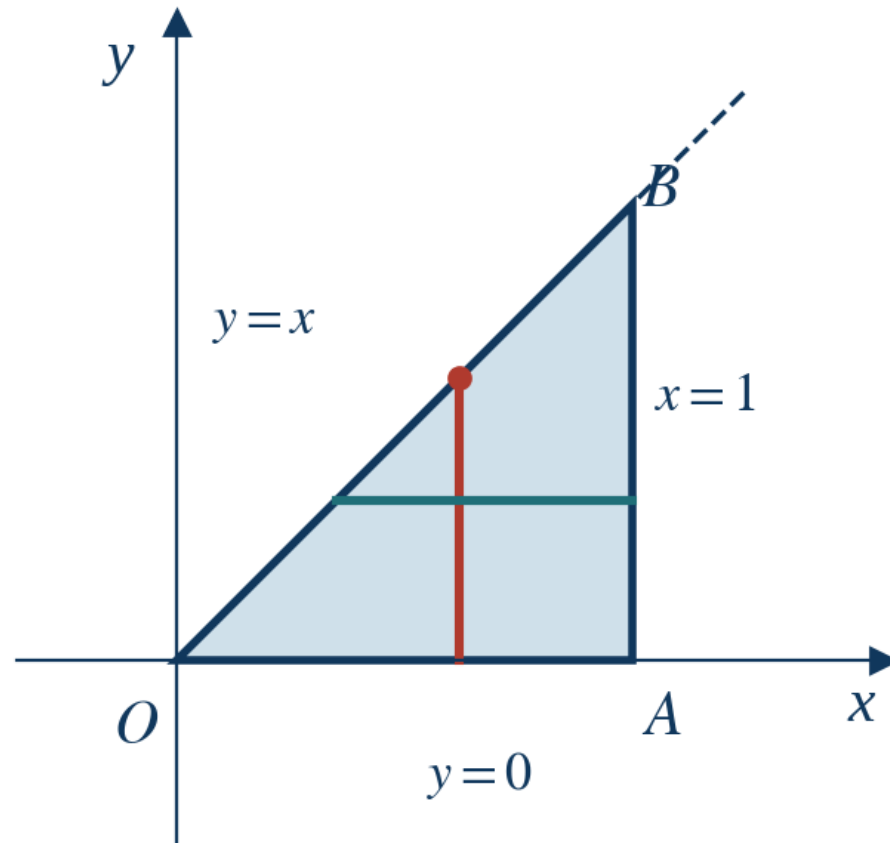
$$I = \int_0^2 (2x + 8) dx = (x^2 + 8x) \Big|_0^2 = 20$$



Пример 2. Треугольная область

Вычислить $\iint_D (x + y) dx dy$, где D —
треугольник $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$.
Порядок $dy dx$: проекция на Ox даёт
 $0 \leq x \leq 1$; вертикаль идёт от $y = 0$ до
 $y = x$.

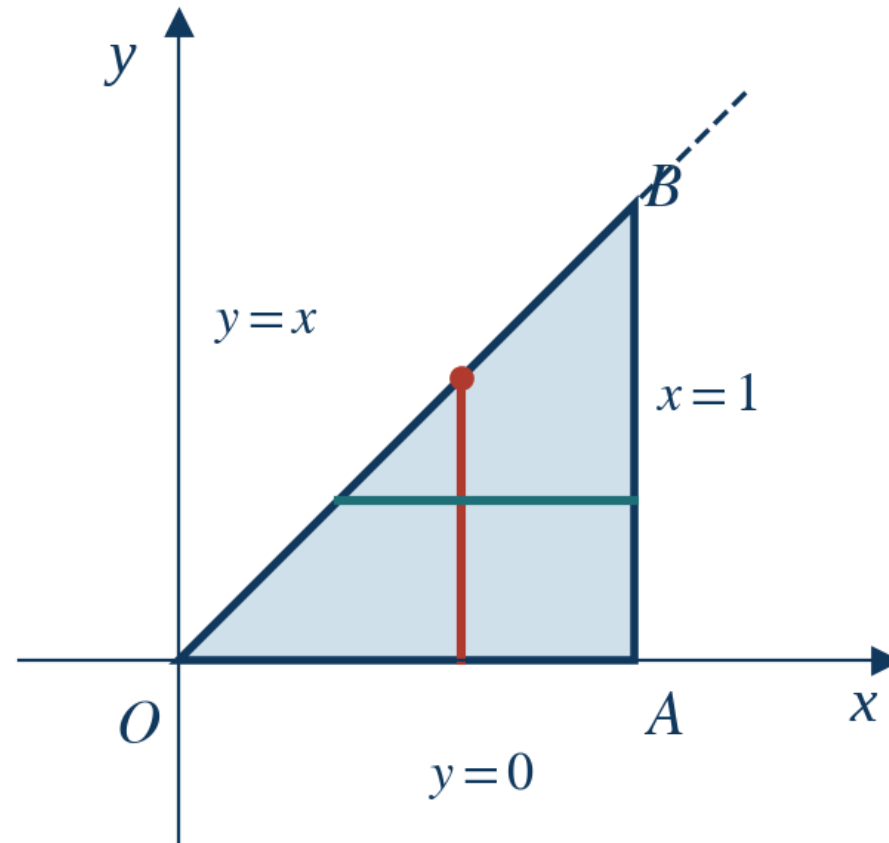
$$I = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y) dy = \int_0^1 \frac{3x^2}{2} dx = \frac{1}{2}$$



Пример 2. Проверка вторым порядком

Возьмём порядок $dx dy$. Проекция на Oy : $0 \leq y \leq 1$; горизонталь входит через $x = y$ и выходит через $x = 1$.

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 (x + y) dx$$
$$\int_y^1 (x + y) dx = \frac{1}{2} + y - \frac{3y^2}{2}$$
$$I = \left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

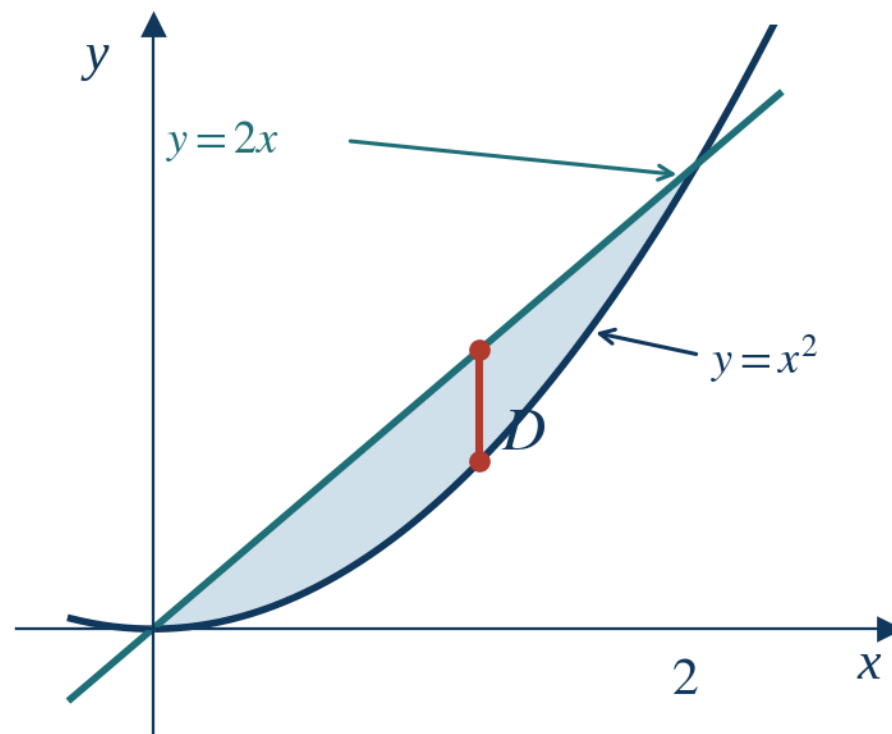


Пример 3. Область между параболой и прямой

Вычислить $\iint_D xy \, dx \, dy$, где D
ограничена линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.

Точки пересечения: $x^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$, причём $x^2 \leq 2x$ на $[0; 2]$.

$$I = \int_0^2 x \, dx \int_{x^2}^{2x} y \, dy = \int_0^2 \frac{4x^3 - x^5}{2} \, dx = \frac{8}{3}$$



Изменение порядка интегрирования

- По пределам восстанавливаем область и строим чертёж.
- Проецируем D на другую ось и проводим прямую иного направления.
- Если линии входа или выхода меняются — записываем сумму интегралов.

Зачем: при одном порядке внутренний интеграл может не браться в элементарных функциях, при другом — берётся; иногда исчезает необходимость дробить область.

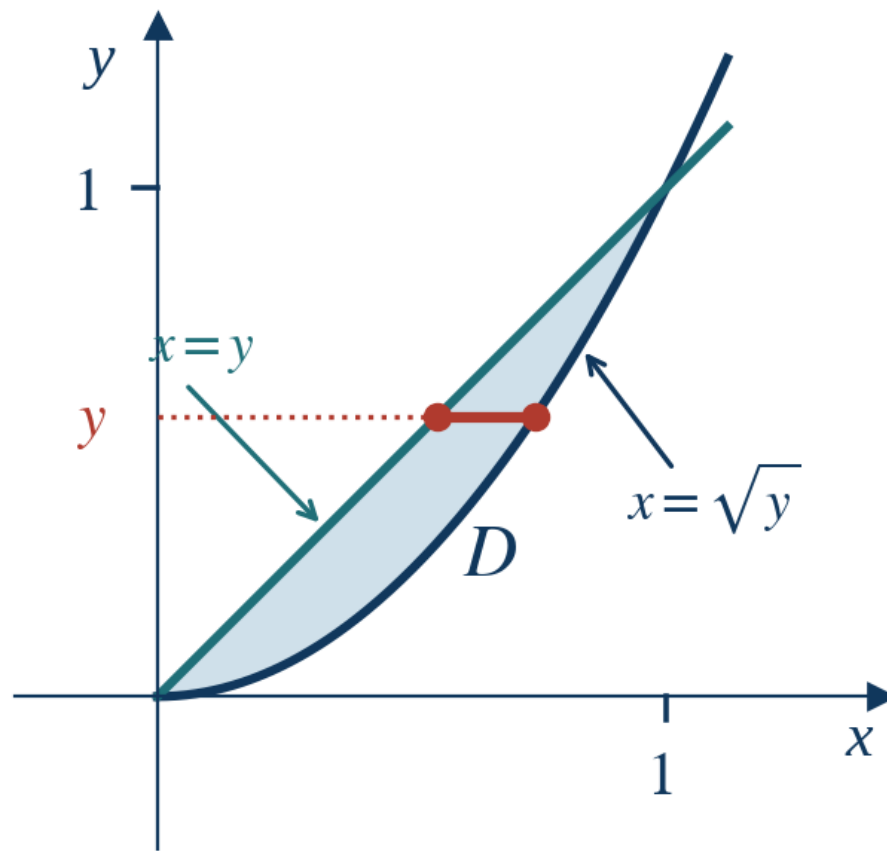
Пример 4. Изменение порядка

Изменить порядок в интеграле $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$.

Область: $D = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ — между параболой и прямой.

При $0 < y < 1$ верно $y < \sqrt{y}$, поэтому горизонталь входит через $x = y$, выходит через $x = \sqrt{y}$:

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$



Замена переменных. Якобиан

Отображение $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ переводит область D^* в D .

Якобиан:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Модуль якобиана — коэффициент искажения площади:

$$dS = dx \, dy = |J| \, du \, dv$$

Теорема о замене переменных

Если отображение взаимно однозначно, имеет непрерывные частные производные и $J \neq 0$ в D^* , а f непрерывна в D , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

- Замену подбирают по уравнениям границы, а не по подынтегральной функции.
- Цель — сделать новую область прямоугольником.
- Модуль якобиана обязателен.

Полярные координаты

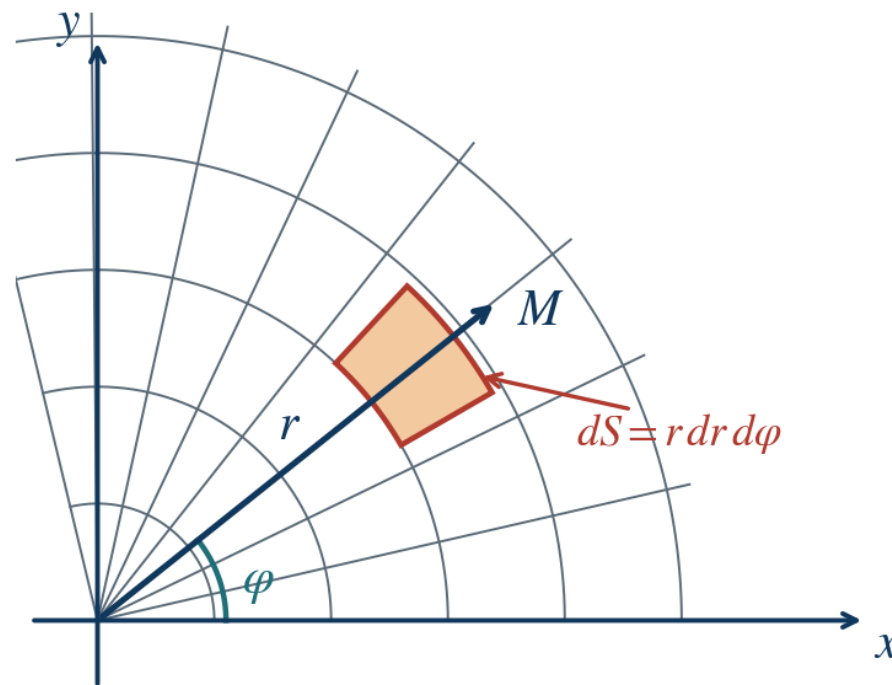
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad r \geq 0$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

Множитель r — самая частая потеря при переходе к полярным координатам.

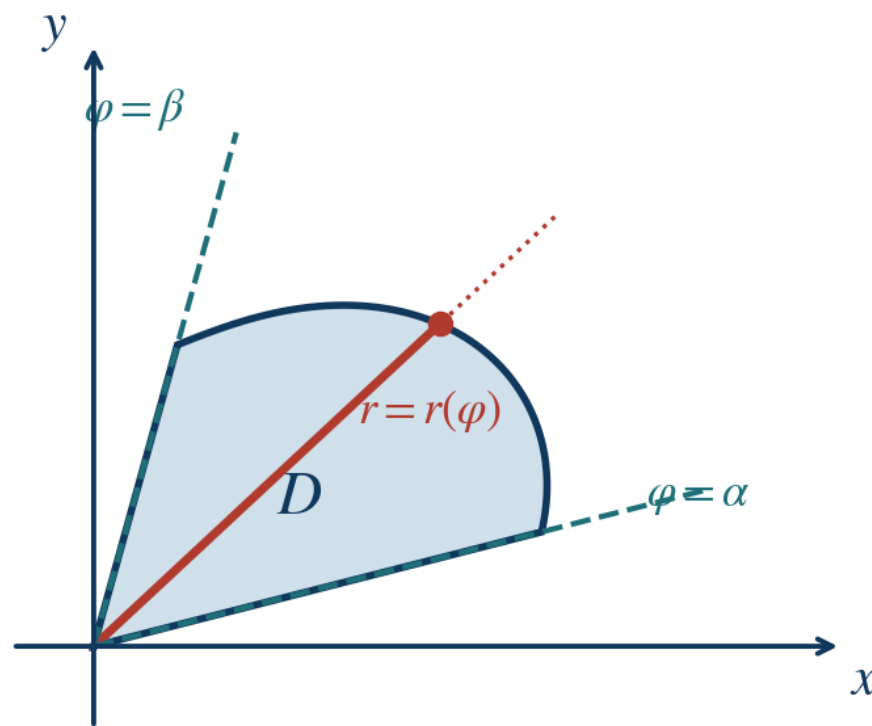


Пределы в полярных координатах

Если полюс лежит в области и каждый луч $\varphi = \text{const}$ пересекает границу один раз:

$$\iint_D f \, dS = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f \, r \, dr$$

- Пределы по φ — углы крайних лучей.
- Границу переводим в полярные: $x^2 + y^2 = 2ax$ даёт $r = 2a \cos \varphi$.



Пример 5. Интеграл по кругу

Вычислить $I = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq R^2$.

Переходим к полярным координатам: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$, пределы постоянны.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, dr = 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, dr$$

$$I = 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \quad \text{— объём полушара}$$

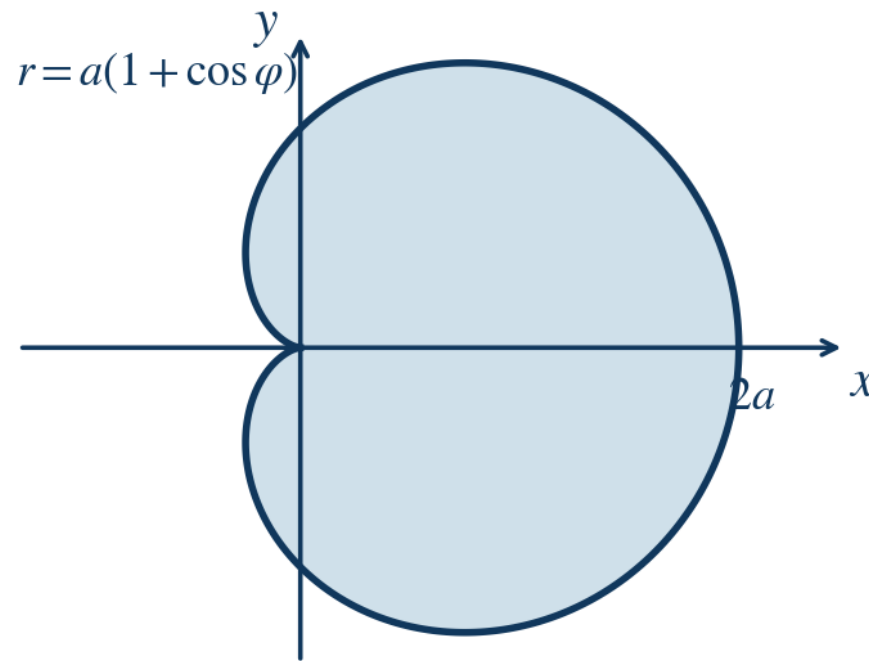
Пример 6. Площадь, ограниченная кардиоидой

Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r \, dr \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi \end{aligned}$$

Так как $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0$ и

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \pi, \text{ то } S = \frac{3\pi a^2}{2}.$$



Геометрические приложения

Площадь плоской фигуры

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} r dr d\varphi$$

Объём тела между поверхностями

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dS, \quad f_2 \geq f_1$$

Площадь поверхности $z = f(x, y)$

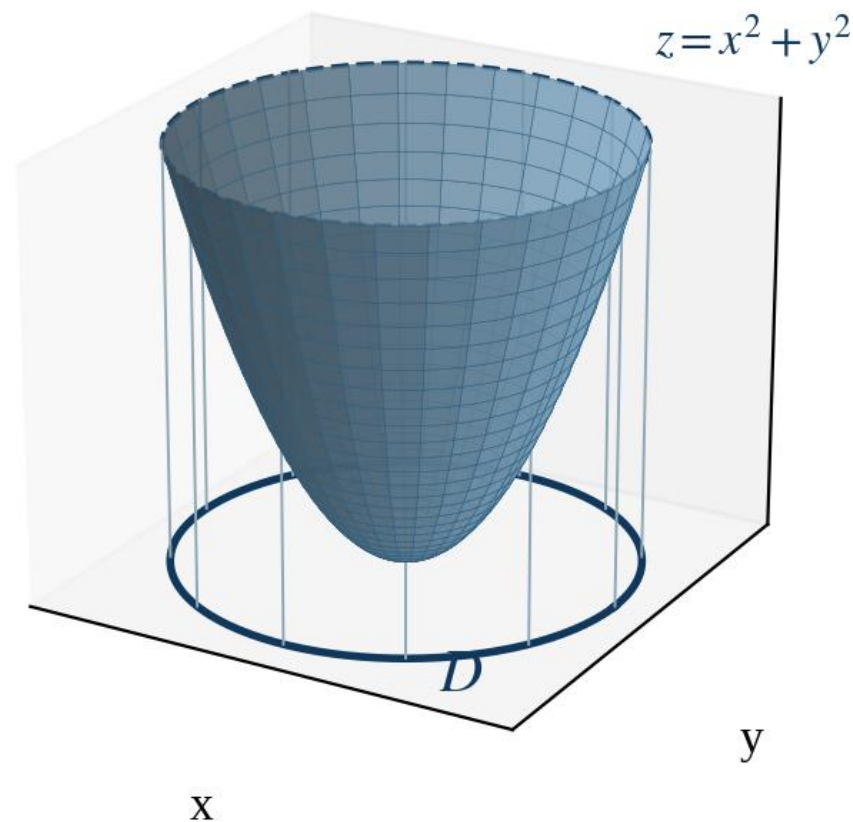
$$\Sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dS$$

Пример 7. Объём тела

Найти объём тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, плоскостью $z = 0$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Проекция тела — круг $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Физические приложения

Масса и статические моменты

$$m = \iint_D \rho \, dS, \quad M_x = \iint_D y \rho \, dS, \quad M_y = \iint_D x \rho \, dS$$

Центр тяжести

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}$$

Моменты инерции

$$I_x = \iint_D y^2 \rho \, dS, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho \, dS, \quad I_0 = I_x + I_y$$

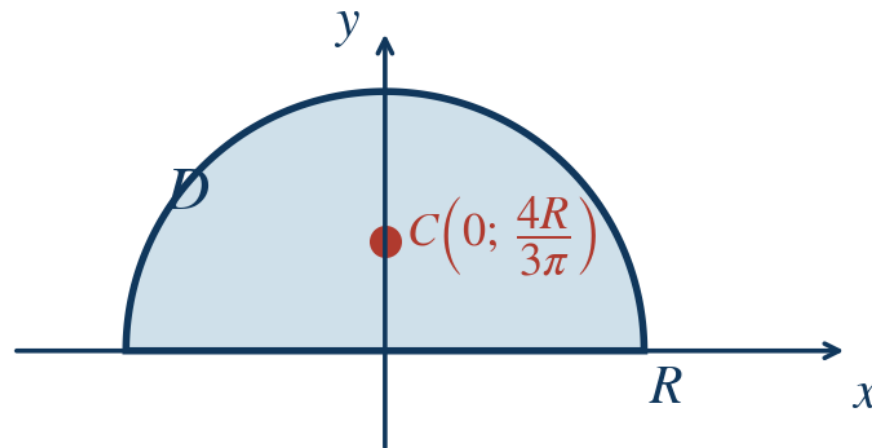
Пример 8. Центр тяжести полукруга

Однородная пластинка $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$;

положим $\rho = 1$. Из симметрии $x_c = 0$.

$$M_x = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^R r^2 \, dr = \frac{2R^3}{3}$$

$$y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{2R^3}{3} \cdot \frac{2}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$



Тройной интеграл: определение

Тело V разбиваем на части объёмов ΔV_i , в каждой берём точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составляем интегральную сумму.

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

Если f непрерывна в замкнутой ограниченной области V с кусочно-гладкой границей, интеграл существует.

Смысл и свойства тройного интеграла

Объём и масса тела

$$V = \iiint_V dV, \quad m = \iiint_V \rho(x, y, z) dV$$

Свойства

- Линейность и аддитивность по области.
- Монотонность: из $f \leq g$ следует неравенство между интегралами.
- Теорема о среднем: $\iiint_V f dV = f(P_0) \cdot V$ для некоторой точки $P_0 \in V$.

Сведение к повторному интегралу

Область V правильна в направлении Oz ,
если

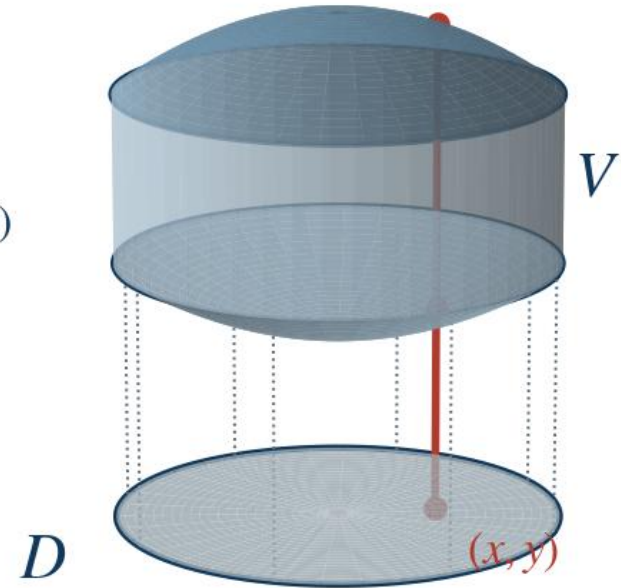
$$V = \{(x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$\iiint_V f dV = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

Затем для D пределы расставляются по
правилам двойного интеграла.

$$= z_2(x, y)$$

$$= z_1(x, y)$$



Пример 9. Объём конического тела

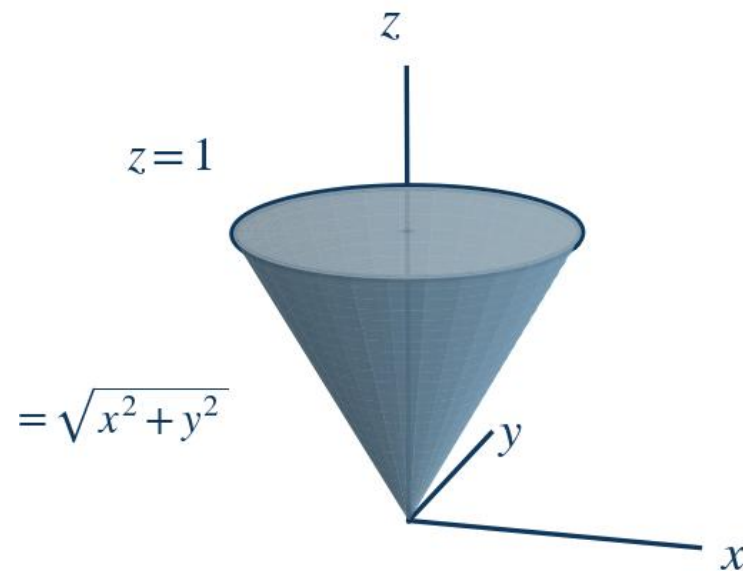
Найти объём тела, ограниченного конусом

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 1$.

Проекция на Oxy — круг $r \leq 1$; при

фиксированной точке z меняется от r до 1.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^1 dz = 2\pi \int_0^1 (r - r^2) dr \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



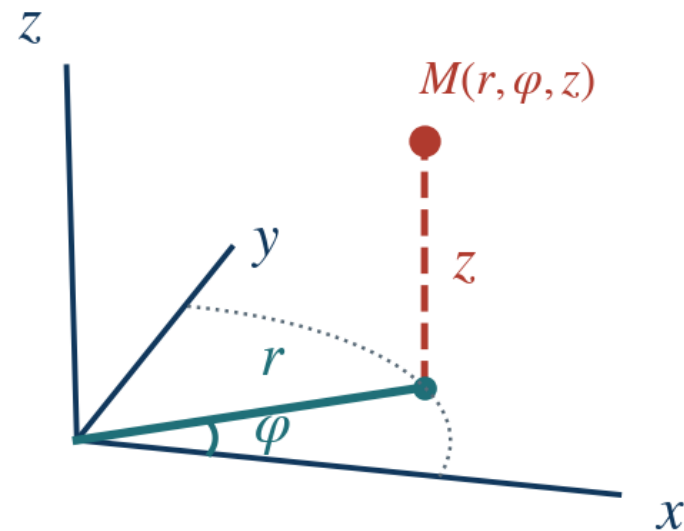
Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad |J| = r$$

$$\iiint_V f \, dV$$

$$= \iiint_{V^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r \, dr \, d\varphi \, dz$$

Применяют, когда проекция тела на Oxy
— круг, кольцо или сектор.



Пример 10. Цилиндрические координаты

Найти объём тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$.

Проекция — круг $r \leq 2$; при фиксированных r, φ переменная z меняется от r^2 до 4.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^4 dz = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr = 8\pi$$

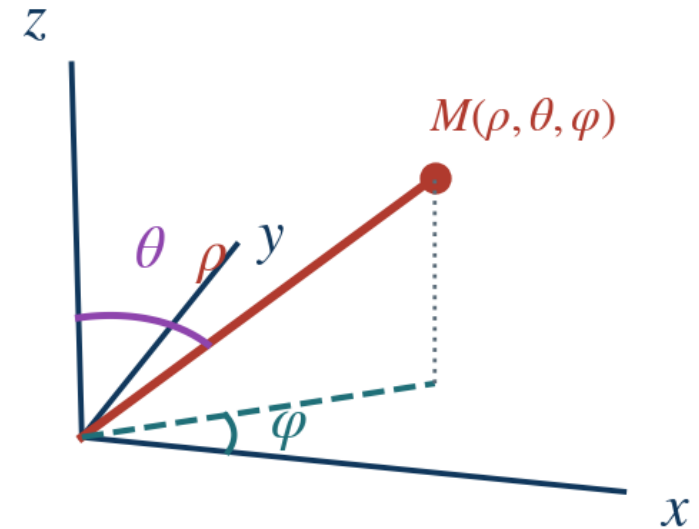
Сферические координаты

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases} \quad |J| = \rho^2 \sin \theta$$

$$\iiint_V f dV = \iiint_{V^*} f \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$$

Здесь $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Применяют для шаров, шаровых слоёв и конусов.



Пример 11. Сферические координаты

Вычислить $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$, где V — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

В сферических координатах подынтегральная функция равна ρ^2 :

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{5}$$

Приложения тройного интеграла

$$m = \iiint_V \rho \, dV, \quad x_c = \frac{1}{m} \iiint_V x \rho \, dV$$

Аналогично находят y_c и z_c . Моменты инерции относительно осей:

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho \, dV$$

Для однородного тела плотность выносится за знак интеграла и сокращается в формулах центра тяжести.

Итоги лекции 1. Типичные ошибки

Что запомнить

- Кратный интеграл сводится к повторному.
- При замене переменных появляется множитель $|J|$: r и $\rho^2 \sin \theta$.

Типичные ошибки

- Потерян множитель r (или $\rho^2 \sin \theta$).
- Во внутренних пределах оставлена своя переменная.
- Область не разбита там, где меняется линия входа.
- Не сделан чертёж — неверные пределы.

Лекция 2 · 90 минут

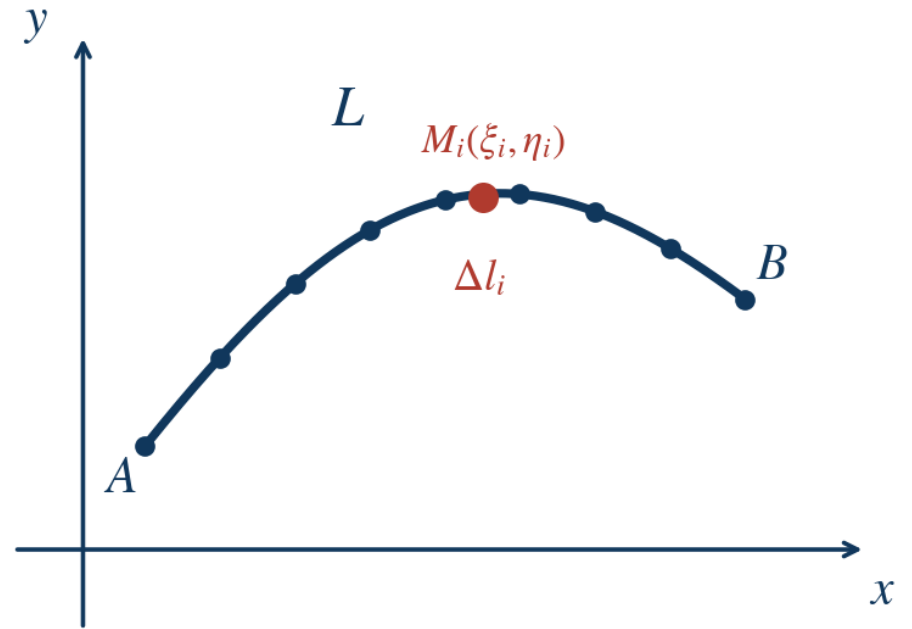
Криволинейные и поверхностные интегралы

- Криволинейные интегралы 1 и 2 рода
- Формула Грина; независимость от пути, потенциал
- Поверхностные интегралы 1 и 2 рода
- Формулы Остроградского — Гаусса и Стокса

Задача о массе материальной дуги

Дуга L имеет линейную плотность $\rho(x, y)$. Разобьём её на части длин Δl_i и в каждой возьмём точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$:

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$
$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$



Криволинейный интеграл 1 рода

Предел интегральных сумм называют криволинейным интегралом по длине дуги:

$$\int_L f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$

Свойства

- Линейность и аддитивность по дуге.
- Не зависит от направления обхода: $\int_{AB} f dl = \int_{BA} f dl$.
- При $f \equiv 1$ даёт длину дуги: $l = \int_L dl$.

Вычисление интеграла 1 рода

Параметрическое задание $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$

$$\int_L f \, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt$$

Явное задание $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$

$$\int_L f \, dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

Полярное задание $r = r(\varphi)$

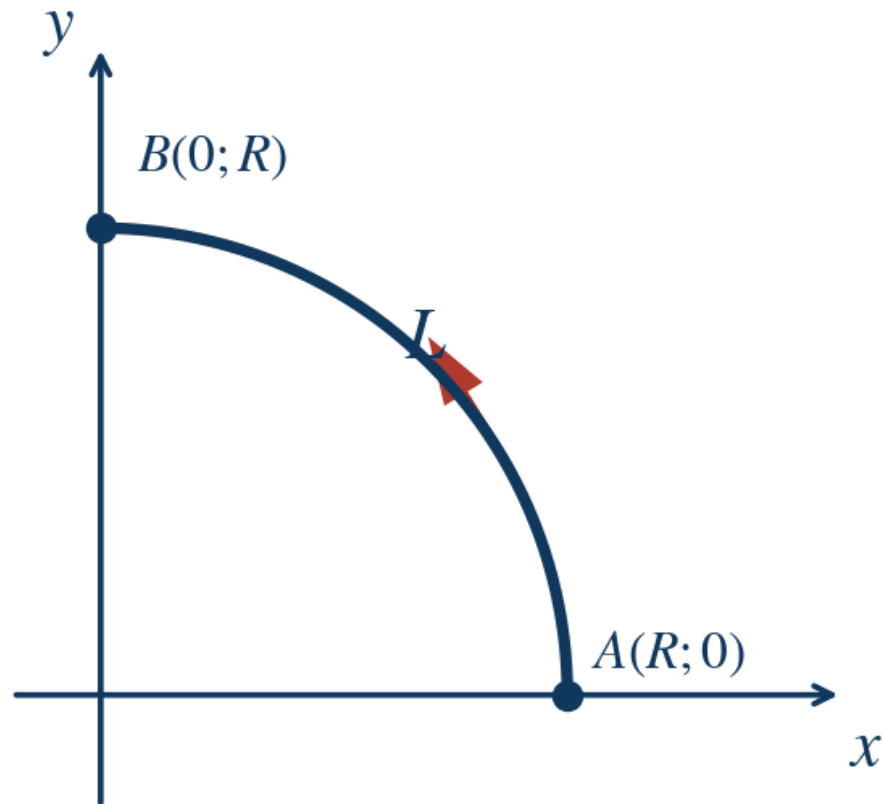
$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\varphi$$

Пример 1. Интеграл 1 рода

Вычислить $\int_L (x + y) dl$, где L — четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в первом квадранте.

Параметризация: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, откуда $dl = R dt$.

$$\begin{aligned} \int_L (x + y) dl &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t) dt \\ &= 2R^2 \end{aligned}$$



Приложения интеграла 1 рода

$$l = \int_L dl, \quad m = \int_L \rho dl$$

Центр тяжести дуги

$$x_c = \frac{1}{m} \int_L x \rho dl, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_L y \rho dl$$

Моменты инерции

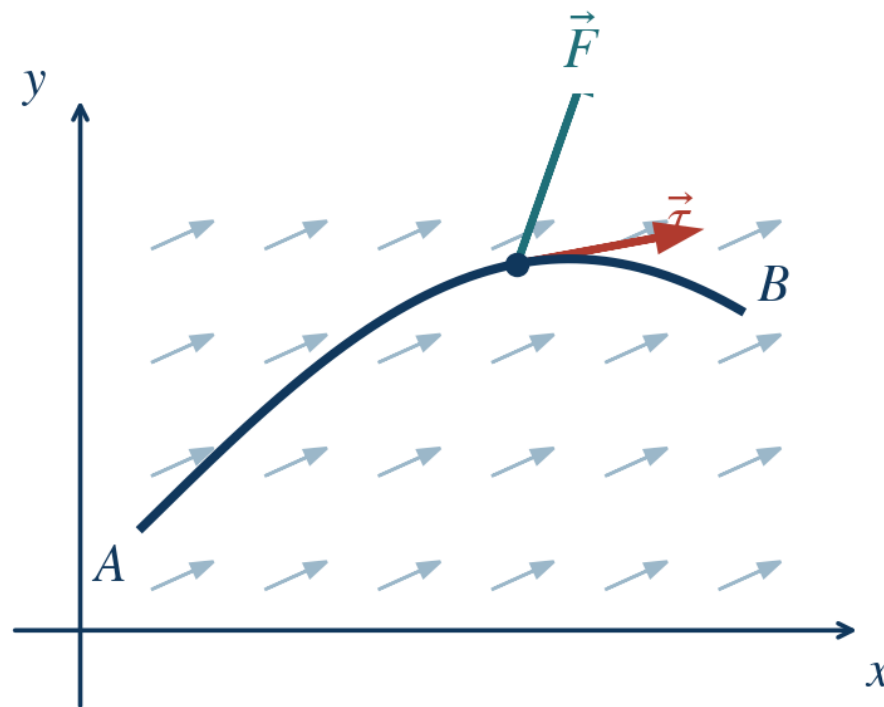
$$I_x = \int_L y^2 \rho dl, \quad I_y = \int_L x^2 \rho dl$$

Задача о работе силы

Сила $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ перемещает точку вдоль дуги L от A к B . На малом участке работа приближённо равна скалярному произведению:

$$\Delta A_i \approx P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

Предел таких сумм — криволинейный интеграл 2 рода (по координатам).



Криволинейный интеграл 2 рода

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P_i \Delta x_i + Q_i \Delta y_i)$$

Главное отличие от интеграла 1 рода

$$\int_{AB} P dx + Q dy = - \int_{BA} P dx + Q dy$$

Интеграл 2 рода меняет знак при изменении направления обхода. Для замкнутого контура пишут $\oint_L P dx + Q dy$.

Вычисление интеграла 2 рода

Параметрическое задание, t меняется от α до β

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P x'(t) + Q y'(t)] dt$$

Явное задание $y = y(x)$, x меняется от a до b

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx$$

Пределы ставятся в порядке обхода: нижний отвечает началу дуги.

Пример 2. Интеграл 2 рода

Вычислить $\int_L y \, dx + x \, dy$ по дуге параболы $y = x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.

Здесь $y = x^2$, $dy = 2x \, dx$, x меняется от 0 до 1:

$$\int_L y \, dx + x \, dy = \int_0^1 (x^2 + 2x^2) \, dx = \int_0^1 3x^2 \, dx = 1$$

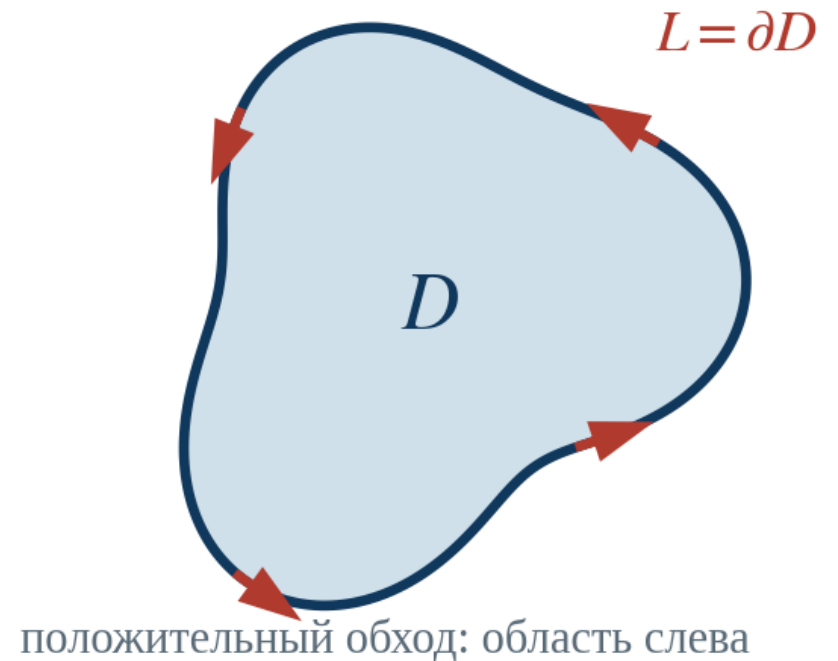
Позже увидим: этот интеграл не зависит от пути, так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$.

Формула Грина

Теорема. Пусть D — односвязная область с кусочно-гладкой границей L , а P, Q непрерывно дифференцируемы в $\bar{D}$. Тогда

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Контур обходится в положительном направлении: область остаётся слева.

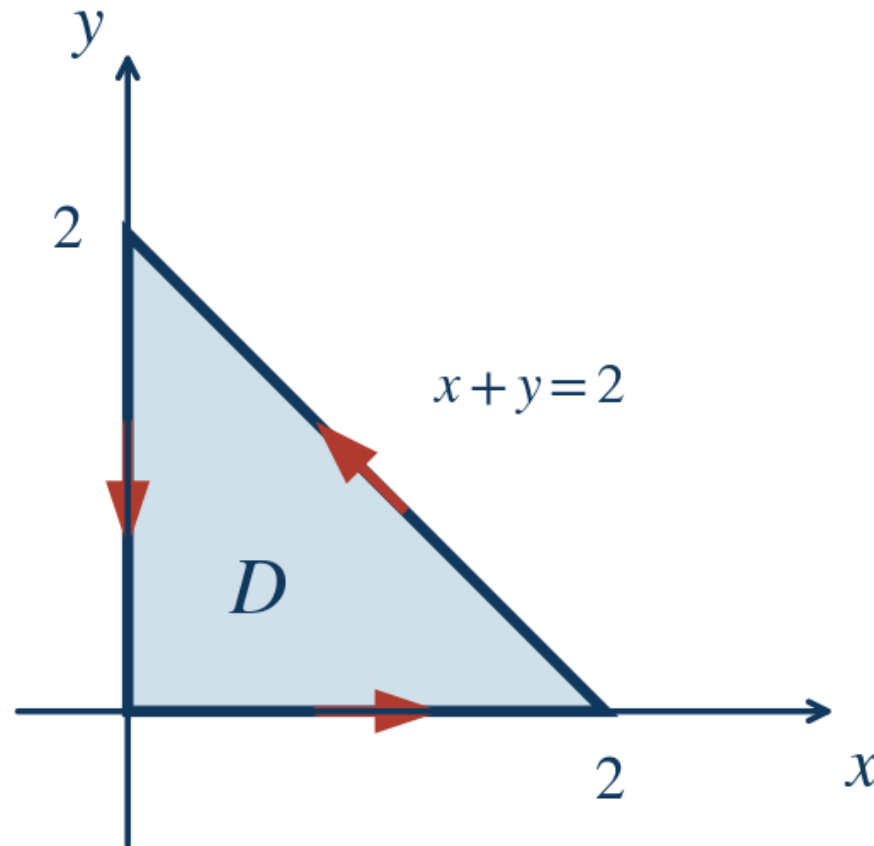


Пример 3. Применение формулы Грина

Вычислить $\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy$ по контуру треугольника $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(0; 2)$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

$$\begin{aligned}\oint_L P dx + Q dy &= 2 \iint_D dx dy = 2S(D) \\ &= 2 \cdot 2 = 4\end{aligned}$$



Площадь через криволинейный интеграл

Полагая в формуле Грина $P = -y$, $Q = x$, получаем $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$, откуда

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_L x \, dy - y \, dx$$

Другие удобные варианты:

$$S(D) = \oint_L x \, dy = - \oint_L y \, dx$$

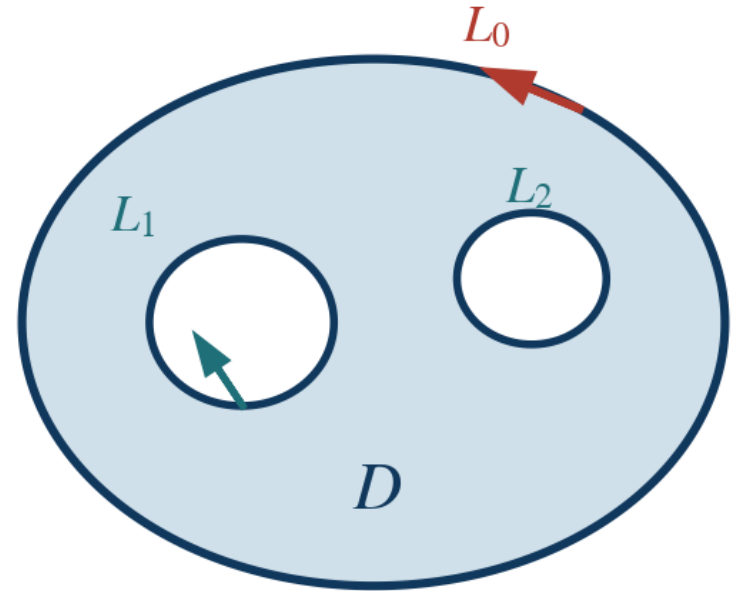
Независимость интеграла от пути

В односвязной области равносильны условия:

- интеграл не зависит от пути;
- $\oint_L P dx + Q dy = 0$ по любому контуру;
- $P dx + Q dy$ — полный дифференциал;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

В многосвязной области этого условия недостаточно.



Восстановление потенциала

Если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то функция u находится по формуле

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C$$

При этом справедлив аналог формулы Ньютона — Лейбница:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A)$$

Пример 4. Потенциал

Дано $P = 2xy$, $Q = x^2 - 3y^2$. Проверим условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

Условие выполнено. Интегрируем P по x при $y_0 = 0$ и добавляем интеграл от Q :

$$u(x, y) = x^2y - y^3 + C$$

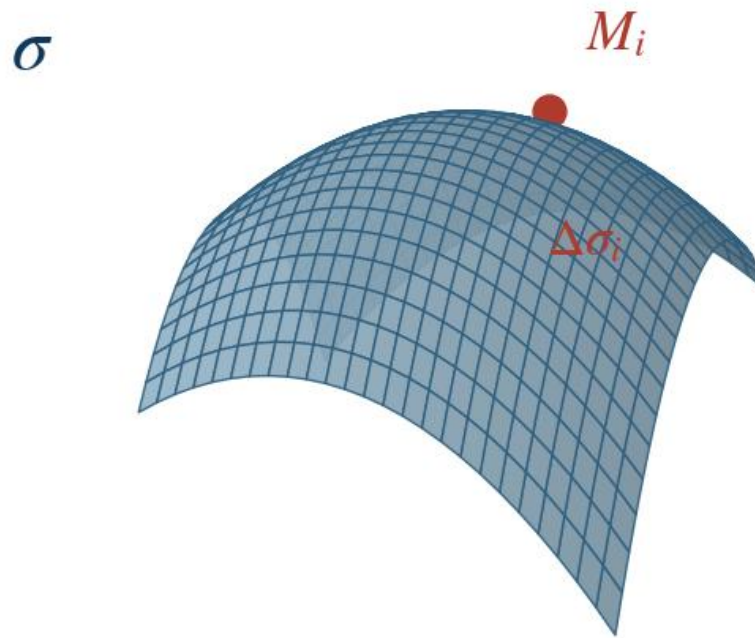
Проверка: $u'_x = 2xy = P$, $u'_y = x^2 - 3y^2 = Q$.

Поверхностный интеграл 1 рода

Поверхность σ разбиваем на части площадей $\Delta\sigma_i$, в каждой берём точку M_i и составляем интегральную сумму.

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i$$

Интеграл не зависит от выбора стороны поверхности. При $f \equiv 1$ даёт площадь поверхности.



Вычисление интеграла 1 рода

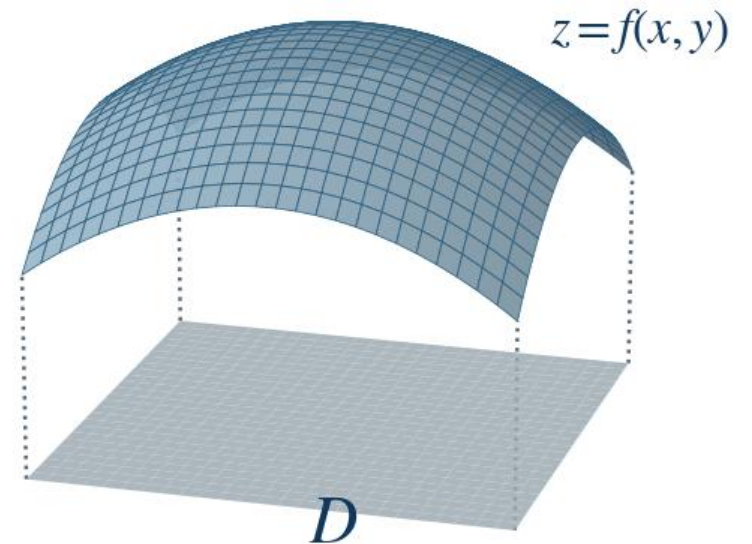
Если σ задана уравнением $z = z(x, y)$ и проектируется в область D плоскости Oxy , то

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\iint_{\sigma} f d\sigma$$

$$= \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$



Пример 5. Интеграл 1 рода

Вычислить $\iint_{\sigma} (x + y + z) d\sigma$, где σ — часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

На поверхности подынтегральная функция равна 1; из $z = 1 - x - y$ находим $z'_x = z'_y = -1$, значит $d\sigma = \sqrt{3} dx dy$.

$$\iint_{\sigma} (x + y + z) d\sigma = \sqrt{3} \iint_D dx dy = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Приложения интеграла 1 рода

$$\Sigma = \iint_{\sigma} d\sigma, \quad m = \iint_{\sigma} \rho d\sigma$$

Центр тяжести оболочки

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x \rho d\sigma$$

Момент инерции относительно оси Oz

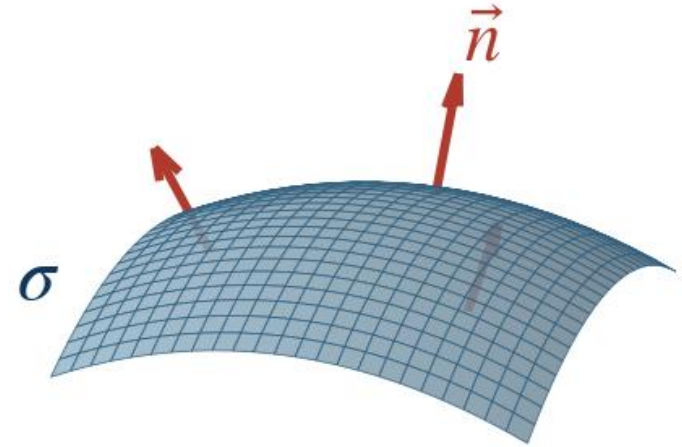
$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \rho d\sigma$$

Ориентация поверхности

Поверхность двусторонняя, если при обходе любого замкнутого контура на ней нормаль возвращается в исходное положение.

Выбор стороны — выбор поля единичных нормалей $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Для замкнутой поверхности берут внешнюю нормаль.



Поверхностный интеграл 2 рода

Интеграл по координатам определяется через проекции элементов площади на координатные плоскости:

$$\iint_{\sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

Связь с интегралом 1 рода

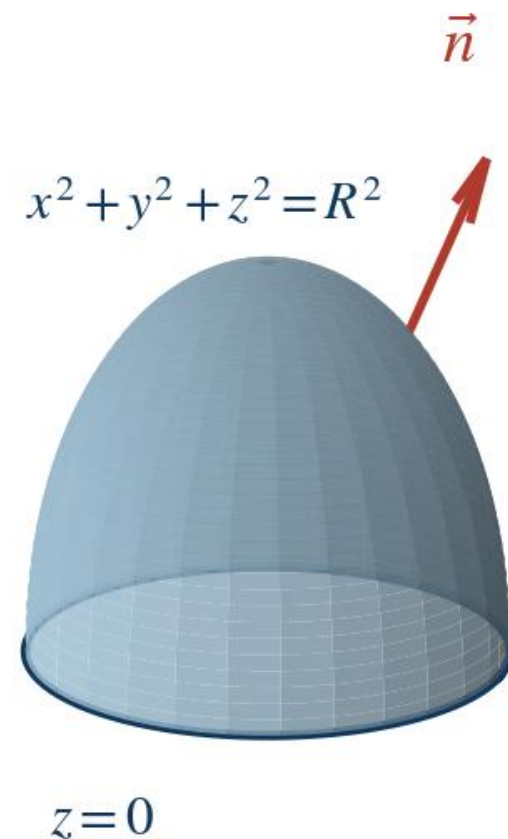
$$\iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, d\sigma$$

При смене стороны поверхности интеграл 2 рода меняет знак.

Пример 6. Интеграл 2 рода

Вычислить $\iint_{\sigma} z \, dx \, dy$ по верхней стороне полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Нормаль образует с осью Oz острый угол, поэтому знак «плюс», а проекция — круг $x^2 + y^2 \leq R^2$:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} z \, dx \, dy &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned}$$



Формула Остроградского — Гаусса

Пусть тело V ограничено замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S , а P , Q , R непрерывно дифференцируемы. Тогда по внешней стороне S

$$\begin{aligned} & \oint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

Формула сводит поверхностный интеграл к тройному.



Пример 7. Формула Остроградского — Гаусса

Вычислить $\oiint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$ по внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

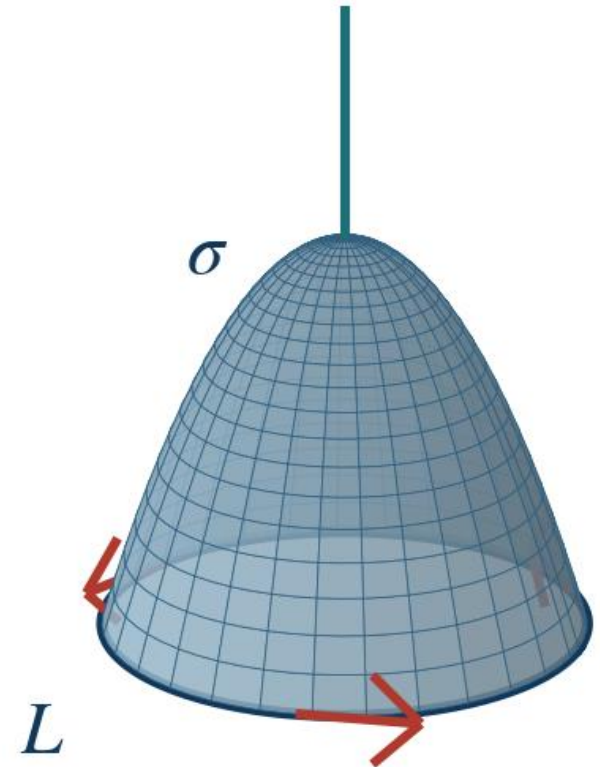
$$\oiint_S \dots = 3 \iiint_V dV = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$

Формула Стокса

Пусть поверхность σ натянута на замкнутый контур L , а ориентации L и $\vec{n}$ согласованы. Тогда

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

При $R \equiv 0$ и плоском контуре формула Стокса переходит в формулу Грина.



Пример 8. Формула Стокса

Вычислить $\oint_L y \, dx + z \, dy + x \, dz$, где L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, обходимая против часовой стрелки со стороны оси Oz .

Здесь подынтегральные выражения формулы Стокса равны -1 , а нормаль равна $\vec{k}$, поэтому

$$\oint_L y \, dx + z \, dy + x \, dz = \iint_{\sigma} (-1) \, dx \, dy = -\pi R^2$$

Прямая проверка параметризацией даёт тот же ответ.

Итоги лекции 2

Что запомнить

- Интеграл 1 рода не зависит от направления, интеграл 2 рода меняет знак.
- Формула Грина связывает контурный интеграл с двойным.
- Формулы Остроградского — Гаусса и Стокса понижают кратность интеграла.

Типичные ошибки

- Пределы поставлены не в порядке обхода контура.
- Не учтён знак при выборе стороны поверхности.

Лекция 3 · 90 минут

Теория поля

- Скалярное поле: поверхности уровня, производная по направлению, градиент
- Векторное поле: векторные линии, поток, дивергенция
- Циркуляция и ротор; формулы в векторной форме
- Соленоидальные, потенциальные и гармонические поля

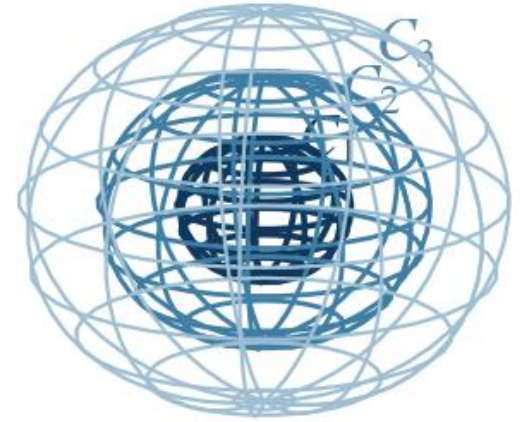
Скалярное поле. Поверхности уровня

Скалярное поле — функция $u = u(M) = u(x, y, z)$, заданная в области пространства.

Поверхность уровня — множество точек, где поле принимает одно значение:

$$u(x, y, z) = C$$

Для плоского поля получаются линии уровня. Через каждую точку проходит ровно одна поверхность уровня.



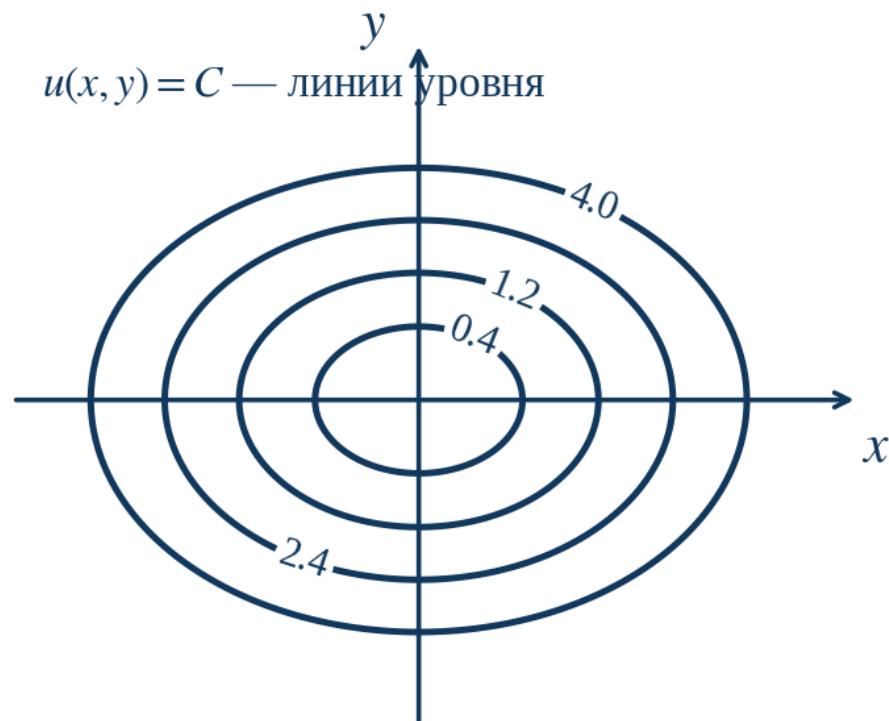
Пример 1. Линии уровня

Найти линии уровня поля $u = x^2 + 2y^2$.

$$x^2 + 2y^2 = C$$

При $C > 0$ это подобные эллипсы с центром в начале координат, при $C = 0$ — одна точка, при $C < 0$ линий нет.

Чем гуще расположены линии уровня, тем быстрее меняется поле.



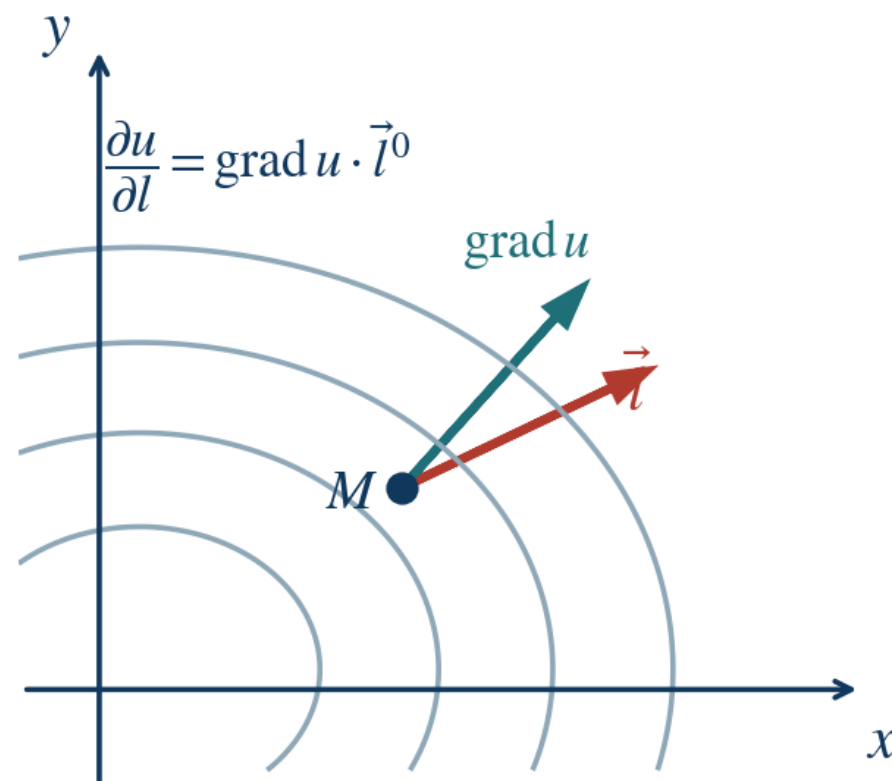
Производная по направлению

Пусть $\vec{l}$ — направление, $\vec{l}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — его орт.

Производной поля по направлению называют

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l}$$
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Она равна скорости изменения поля в данном направлении.



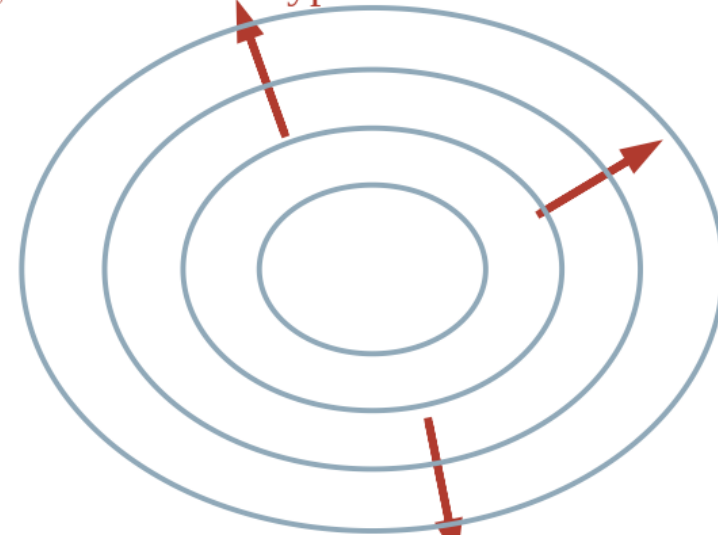
Градиент и его свойства

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l}^0 = |\text{grad } u| \cos \theta$$

- Градиент направлен по нормали к поверхности уровня.
- Он указывает направление наибоыстрейшего роста поля.
- Наибольшая скорость роста равна $|\text{grad } u|$.

$\text{grad } u \perp$ линии уровня



указывает направление наибольшего роста

Пример 2. Градиент и производная по направлению

Дано $u = xyz$, точка $M(1; 2; 3)$, направление $\vec{l} = \{1; 2; 2\}$.

$$\operatorname{grad} u = (yz, xz, xy), \quad \operatorname{grad} u(M) = (6, 3, 2)$$

$$\vec{l}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{6 + 6 + 4}{3} = \frac{16}{3}$$

Наибольшая скорость роста в точке M равна $|\operatorname{grad} u| = 7$.

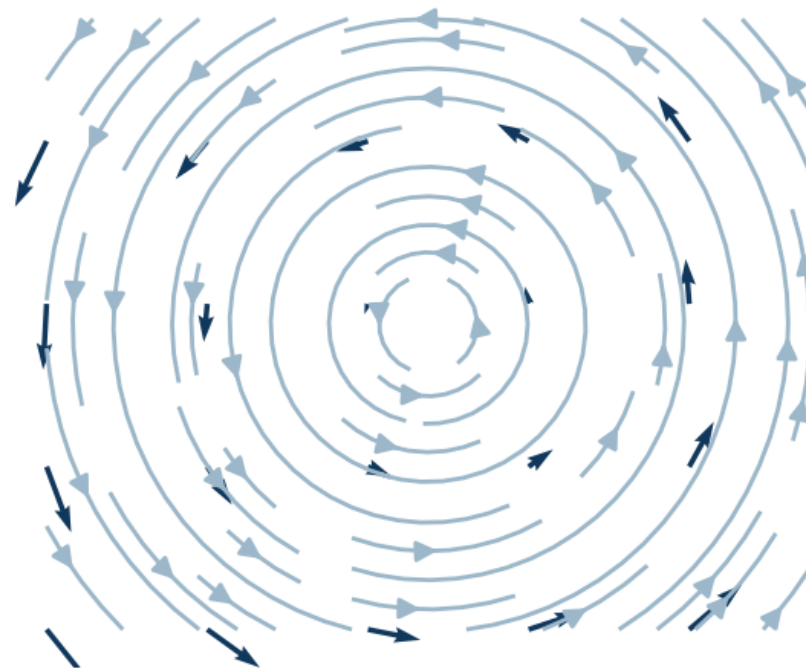
Векторное поле. Векторные линии

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Векторная линия — кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором поля. Её находят из системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

векторные линии поля $\vec{a}$



Пример 3. Векторные линии

Найти векторные линии поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x dx + y dy = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

Векторные линии — концентрические окружности с центром в начале координат; поле описывает вращение.

Поток векторного поля

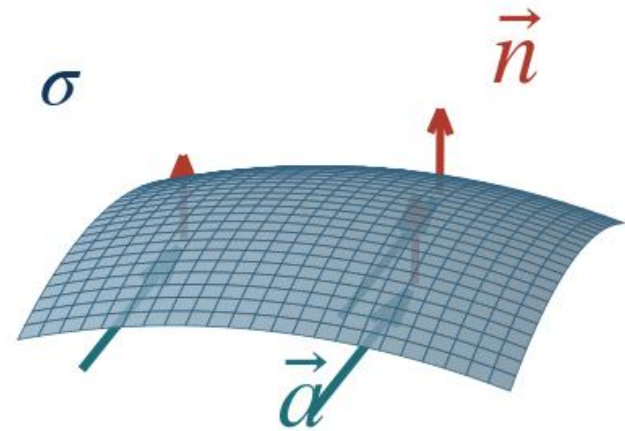
Потоком поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность σ называют

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\sigma} a_n \, d\sigma$$

Если $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то в координатной форме

$$\Pi = \iint_{\sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

Физический смысл: количество жидкости через поверхность за единицу времени.



Пример 4. Поток через сферу

Найти поток поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

На сфере $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$, поэтому $a_n = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = R$:

$$\Pi = R \iint_{\sigma} d\sigma = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

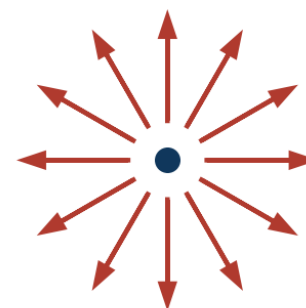
Дивергенция

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

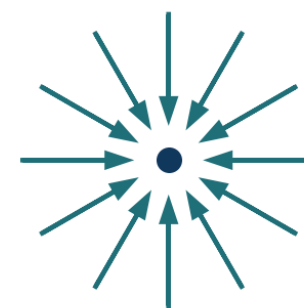
Дивергенция — объёмная плотность

источников поля:

- $\operatorname{div} \vec{a} > 0$ — в точке источник;
- $\operatorname{div} \vec{a} < 0$ — в точке сток;
- $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ — источников нет.



ИСТОЧНИК
 $\operatorname{div} \vec{a} > 0$



СТОК
 $\operatorname{div} \vec{a} < 0$

Формула Остроградского — Гаусса в векторной форме

Поток поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции по телу:

$$\oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV$$

Отсюда инвариантное определение дивергенции:

$$\operatorname{div} a(M) = \lim_{V \rightarrow M} \frac{1}{V} \oiint_S a_n \, d\sigma$$

Пример 5. Поток через поверхность куба

Найти поток поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности куба $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

$$\operatorname{div} a = 2(x + y + z)$$

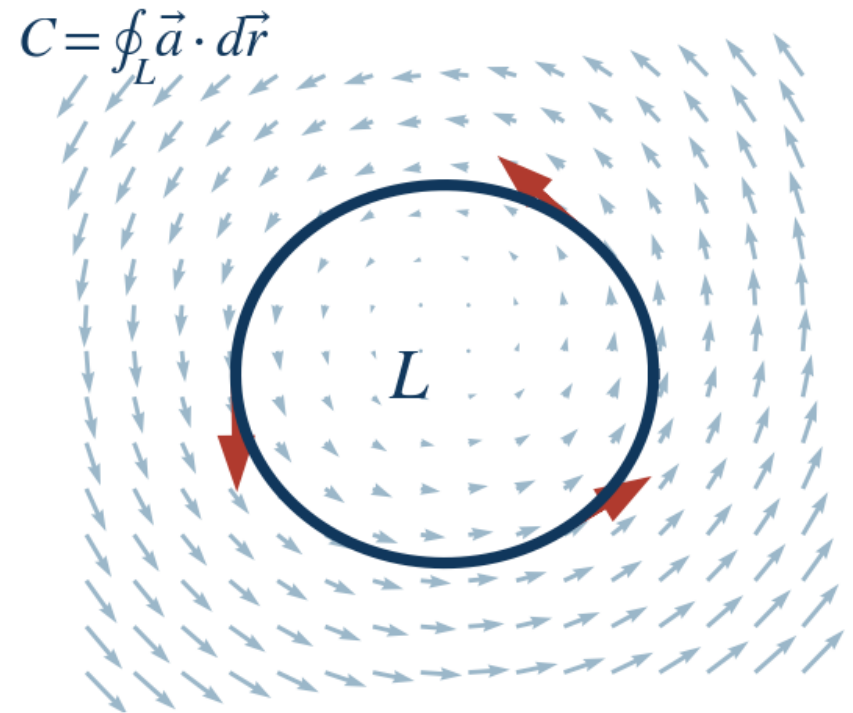
$$\Pi = 2 \iiint_V (x + y + z) dV = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Циркуляция векторного поля

Циркуляцией поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру L называют криволинейный интеграл

$$C = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

Для силового поля циркуляция — работа силы по замкнутому контуру; для поля скоростей она характеризует завихрённость потока.

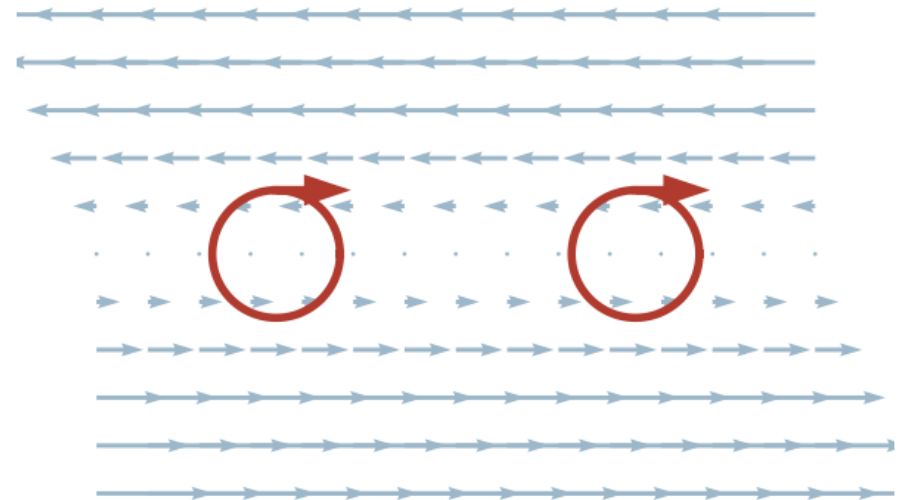


Ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Ротор характеризует вращательную составляющую поля: помещённая в поток «мельница» вращается вокруг оси, направленной по ротору.

поле вращает «мельницу»: $\operatorname{rot} \vec{a} \neq \vec{0}$



Формула Стокса в векторной форме

Циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку ротора через любую натянутую на контур поверхность:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Отсюда инвариантное определение проекции ротора:

$$(\text{rot } \vec{a})_n = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{1}{\sigma} \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Пример 6. Циркуляция и ротор

Найти циркуляцию поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 2\vec{k}, \quad \vec{n} = \vec{k}$$

$$C = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} 2 d\sigma = 2\pi R^2$$

Прямое вычисление даёт $\oint_L (-y dx + x dy) = 2S = 2\pi R^2$ — результаты совпали.

Оператор Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u, \quad \operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}, \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$$

Тождества второго порядка

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$$

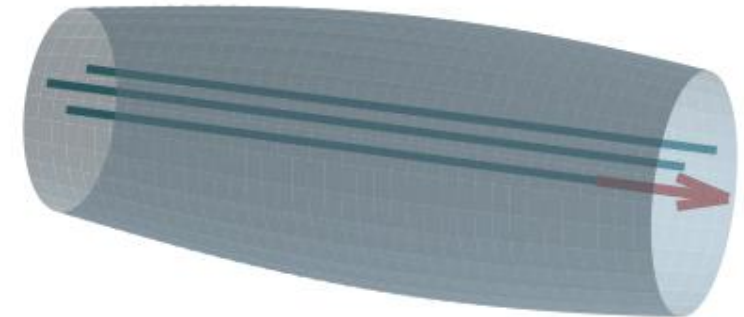
Соленоидальное поле

Поле называют соленоидальным (трубчатым), если во всех точках области

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0$$

- Поток через замкнутую поверхность равен нулю.
- Поток через сечения векторной трубки одинаков.
- Поле ротора всегда соленоидально.

векторная трубка



$$\Pi_1 = \Pi_2 \quad \text{при} \quad \operatorname{div} \vec{a} = 0$$

Потенциальное поле

Поле потенциально в односвязной области, если

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$$

Тогда существует потенциал u такой, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, и

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = u(B) - u(A), \quad \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$$

Работа в таком поле не зависит от пути.

Пример 7. Потенциал векторного поля

Показать, что поле $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ потенциально, и найти потенциал.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}$$

Интегрируя $u'_x = yz$, получаем $u = xyz + \varphi(y, z)$; из остальных условий $\varphi = \text{const}$:

$$u = xyz + C$$

Гармоническое поле. Оператор Лапласа

Поле, одновременно соленоидальное и потенциальное, называют гармоническим: $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ и $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

Тогда $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, и потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Пример: $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, так как $2 + 2 - 4 = 0$.

Итоги лекции 3

Основные объекты

- Скалярное поле: линии и поверхности уровня, производная по направлению, градиент.
- Векторное поле: векторные линии, поток, дивергенция, циркуляция, ротор.

Классы полей

- Соленоидальное: $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.
- Потенциальное: $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.
- Гармоническое: выполнены оба условия, потенциал гармоничен.

Сводка формул курса

$$\iint_D f \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f \, dy, \quad dx \, dy = |J| \, du \, dv$$

$$\oint_L P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy$$

$$\oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV$$

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_\sigma \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$