

Ряды

Числовые ряды · Степенные ряды · Ряды Тейлора

- Лекция 1. Числовые ряды
- Лекция 2. Функциональные и степенные ряды
- Ряды Тейлора и Маклорена. Основные разложения
- Приложения степенных рядов к приближённым вычислениям
- Два занятия по 80 минут · теория и подробный разбор задач

Лекция 1

Числовые ряды

- Понятие ряда и частичные суммы
- Сходимость и сумма ряда
- Геометрический ряд
- Гармонический ряд и ряд Дирихле
- Необходимый признак сходимости
- Свойства сходящихся рядов. Остаток
- Признаки сравнения
- Предельный признак сравнения
- Признак Даламбера
- Радиальный признак Коши
- Интегральный признак Коши
- Знакочередующиеся ряды. Лейбниц
- Абсолютная и условная сходимость

● Понятие числового ряда

Пусть задана бесконечная числовая последовательность. Выражение, составленное из её членов, соединённых знаками сложения, называется числовым рядом:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Числа, входящие в ряд, называются его членами, а член с номером n — общим членом ряда.

Ряд считается заданным, если известна формула общего члена.

- **Частичные суммы. Сходимость ряда**

Частичной суммой ряда называется сумма его первых n членов:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

● Частичные суммы. Сходимость ряда (продолжение)

Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм; этот предел называется суммой ряда:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Если предел не существует или бесконечен, ряд называется расходящимся.

- **Геометрический ряд**

Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, называется геометрическим:

$$a + a q + a q^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$$

- **Геометрический ряд (продолжение)**

Его частичная сумма вычисляется по известной формуле, откуда следует условие сходимости:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{a}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

При модуле знаменателя, не меньшем единицы, ряд расходится.

• Задача 1. Сумма геометрического ряда

Исследовать ряд на сходимость и найти его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

Решение

1. Ряд геометрический; выписываем первый член и знаменатель:

$$a = 3, \quad q = \frac{1}{4}$$

- **Задача 1. Сумма геометрического ряда (продолжение)**

2. Модуль знаменателя меньше единицы, значит ряд сходится.

3. Вычисляем сумму по формуле:

$$S = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

• Задача 2. Ряд с телескопической суммой

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Решение

1. Раскладываем общий член на простейшие дроби:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- **Задача 2. Ряд с телескопической суммой (продолжение)**

2. Записываем частичную сумму: соседние слагаемые взаимно уничтожаются:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. Переходим к пределу:

- **Задача 2. Ряд с телескопической суммой
(продолжение)**

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

● Гармонический ряд

Гармоническим называется ряд, составленный из величин, обратных натуральным числам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Общий член этого ряда стремится к нулю, однако ряд расходится: его частичные суммы неограниченно возрастают, хотя и очень медленно.

Гармонический ряд служит важнейшим эталоном при сравнении рядов.

• Обобщённый гармонический ряд

Обобщённым гармоническим рядом (рядом Дирихле) называется ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Признак сходимости

- при показателе, большем единицы, ряд сходится;
- при показателе, не превосходящем единицы, ряд расходится.

- **Обобщённый гармонический ряд (продолжение)**

При показателе, равном единице, получается обычный гармонический ряд; при показателе, равном двум, сумма ряда равна квадрату числа π , делённому на шесть.

- **Необходимый признак сходимости**

Теорема. Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Следствие — достаточный признак расходимости

Если общий член ряда не стремится к нулю, ряд расходится.

Обратное неверно: стремление общего члена к нулю не гарантирует сходимости, что показывает гармонический ряд.

• Задача 3. Применение необходимого признака

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

Решение

1. Вычисляем предел общего члена:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

- **Задача 3. Применение необходимого признака (продолжение)**

2. Предел отличен от нуля, значит необходимый признак не выполнен.

Ответ: ряд расходится.

- **Задача 4. Необходимый признак не является достаточным**

Показать, что для ряда необходимый признак выполнен, однако ряд расходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- **Задача 4. Необходимый признак не является достаточным (продолжение)**

Решение

1. Общий член стремится к нулю, значит необходимый признак выполняется.
2. Сравним члены ряда с членами гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

- **Задача 4. Необходимый признак не является достаточным (продолжение)**

3. Члены исследуемого ряда не меньше членов расходящегося гармонического ряда, значит и он расходится.

Тот же вывод даёт признак Дирихле: показатель степени равен одной второй и не превосходит единицы.

● Свойства сходящихся рядов

- если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный умножением всех членов на одно и то же число, причём сумма умножается на это число;
- сумма и разность двух сходящихся рядов сходятся;
- отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость;

● Свойства сходящихся рядов (продолжение)

- члены сходящегося ряда можно группировать, не меняя их порядка.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- **Остаток ряда**

Остатком ряда после n -го члена называется ряд, полученный отбрасыванием первых n членов:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = S - S_n$$

- **Остаток ряда (продолжение)**

Ряд сходится тогда и только тогда, когда его остаток стремится к нулю при неограниченном возрастании номера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Остаток показывает погрешность, возникающую при замене суммы ряда его частичной суммой.

- **Признаки сравнения. Первый признак**

Пусть даны два ряда с неотрицательными членами и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство между их общими членами:

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

- если сходится ряд с большими членами, то сходится и ряд с меньшими членами;

- **Признаки сравнения. Первый признак (продолжение)**

- если расходится ряд с меньшими членами, то расходится и ряд с большими членами.

В качестве эталонов чаще всего берут геометрический ряд и ряд Дирихле.

• Предельный признак сравнения

Пусть члены обоих рядов положительны и существует конечный, отличный от нуля предел отношения их общих членов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad 0 < L < \infty$$

Тогда оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно.

На практике эталонный ряд подбирают, оставляя в общем члене старшие степени числителя и знаменателя.

• Задача 5. Первый признак сравнения

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$$

Решение

1. Сравниваем общий член с членом геометрического ряда:

$$\frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

- **Задача 5. Первый признак сравнения (продолжение)**

2. Геометрический ряд со знаменателем, равным одной второй, сходится.
3. Меньшие члены неотрицательного ряда — значит исследуемый ряд сходится.

• Задача 6. Предельный признак сравнения

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^3 + 5}$$

Решение

1. Оставляя старшие степени, подбираем эталонный ряд:

$$\frac{2n + 1}{n^3 + 5} \sim \frac{2}{n^2}$$

- **Задача 6. Предельный признак сравнения (продолжение)**

2. Вычисляем предел отношения общих членов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n^3 + 5} \cdot n^2 = 2$$

3. Предел конечен и отличен от нуля; эталонный ряд Дирихле с показателем, равным двум, сходится.

Ответ: ряд сходится.

• Задача 7. Сравнение с гармоническим рядом

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

Решение

1. При больших номерах аргумент синуса мал, поэтому:

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

- **Задача 7. Сравнение с гармоническим рядом (продолжение)**

2. Вычисляем предел отношения к общему члену гармонического ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

- **Задача 7. Сравнение с гармоническим рядом (продолжение)**

3. Предел конечен и отличен от нуля, а гармонический ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

• Признак Даламбера

Пусть члены ряда положительны и существует предел отношения последующего члена к предыдущему:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- если предел меньше единицы, ряд сходится;
- если предел больше единицы, ряд расходится;

● Признак Даламбера (продолжение)

- если предел равен единице, признак ответа не даёт и нужен другой признак.

Признак особенно удобен, когда общий член содержит факториалы или показательные выражения.

• Задача 8. Признак Даламбера

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Решение

1. Записываем последующий член ряда:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

• Задача 8. Признак Даламбера (продолжение)

2. Составляем отношение и упрощаем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

3. Вычисляем предел:

- **Задача 8. Признак Даламбера (продолжение)**

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ответ: ряд сходится.

• Задача 9. Признак Даламбера с факториалом

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Решение

1. Составляем отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}$$

- **Задача 9. Признак Даламбера с факториалом (продолжение)**

2. Сокращаем, пользуясь свойством факториала:

$$= \frac{2}{n + 1}$$

3. Вычисляем предел:

- **Задача 9. Признак Даламбера с факториалом (продолжение)**

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n + 1} = 0 < 1$$

Ответ: ряд сходится.

● Радикальный признак Коши

Пусть члены ряда неотрицательны и существует предел корня n -й степени из общего члена:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

- если предел меньше единицы, ряд сходится;
- если предел больше единицы, ряд расходится;
- если предел равен единице, признак ответа не даёт.

Признак применяют, когда общий член представляет собой выражение, возведённое в степень n .

• Задача 10. Радикальный признак Коши

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

Решение

1. Извлекаем корень n -й степени из общего члена:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+1}$$

- **Задача 10. Радиальный признак Коши (продолжение)**

2. Вычисляем предел:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + 1} = \frac{1}{2} < 1$$

Ответ: ряд сходится.

● Интегральный признак Коши

Пусть члены ряда положительны и являются значениями непрерывной убывающей функции при натуральных значениях аргумента. Тогда ряд и несобственный интеграл сходятся или расходятся одновременно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Признак удобен, когда общий член содержит логарифмы; с его помощью устанавливается признак сходимости ряда Дирихле.

● Задача 11. Интегральный признак

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

• Задача 11. Интегральный признак (продолжение)

Решение

1. Соответствующая функция положительна и убывает; составляем интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

• Задача 11. Интегральный признак (продолжение)

2. Подводим под знак дифференциала логарифм:

$$\int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}$$

3. Подставляем пределы:

- **Задача 11. Интегральный признак (продолжение)**

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Интеграл сходится, значит сходится и ряд.

● Схема выбора признака

1. Проверить необходимый признак: если общий член не стремится к нулю, ряд расходится и исследование закончено.
2. Если общий член содержит факториалы или показательные выражения — применить признак Даламбера.
3. Если общий член есть выражение в степени n — применить радикальный признак Коши.

● Схема выбора признака (продолжение)

4. Если общий член — рациональная или иррациональная дробь — применить предельный признак сравнения с рядом Дирихле.
5. Если общий член содержит логарифмы — применить интегральный признак.

- **Задача 12. Выбор признака: рациональная дробь**

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + 3}$$

- **Задача 12. Выбор признака: рациональная дробь (продолжение)**

Решение

1. Общий член — дробь, поэтому применяем предельное сравнение.
Оставляем старшие степени числителя и знаменателя:

$$\frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + 3} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

- **Задача 12. Выбор признака: рациональная дробь (продолжение)**

2. Вычисляем предел отношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} + 1) n^{\frac{3}{2}}}{n^2 + 3} = 1$$

3. Показатель эталонного ряда Дирихле равен полутора и больше единицы.

Ответ: ряд сходится.

● Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Знакочередующимся называется ряд, знаки членов которого строго чередуются:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \dots, \quad b_n > 0$$

- **Знакопередающие ряды. Признак Лейбница (продолжение)**

Признак Лейбница

Если модули членов ряда монотонно убывают и стремятся к нулю, то ряд сходится, а его сумма по модулю не превосходит первого члена:

$$b_1 > b_2 > b_3 > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

• Задача 13. Признак Лейбница

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Решение

1. Ряд знакочередующийся; проверяем монотонное убывание модулей:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$$

• Задача 13. Признак Лейбница (продолжение)

2. Проверяем стремление модулей к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

3. Оба условия признака Лейбница выполнены.

Ответ: ряд сходится, $S = \ln 2$

● Оценка остатка знакочередующегося ряда

Для ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, остаток по модулю не превосходит первого отброшенного члена:

$$|r_n| \leq b_{n+1}$$

Это позволяет вычислять сумму ряда приближённо с наперёд заданной точностью: достаточно взять столько членов, чтобы первый отброшенный член был меньше требуемой погрешности.

Знак остатка совпадает со знаком первого отброшенного члена.

● Задача 14. Приближённое вычисление суммы

Сколько членов ряда нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до одной сотой?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$$

- **Задача 14. Приближённое вычисление суммы (продолжение)**

Решение

1. Ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому остаток оценивается первым отброшенным членом:

$$|r_n| \leq \frac{1}{(n + 1)^3} < 0,01$$

2. Решаем неравенство:

$$(n + 1)^3 > 100 \Rightarrow n + 1 \geq 5$$

- **Задача 14. Приближённое вычисление суммы (продолжение)**

3. Достаточно взять четыре члена ряда.

Приближённое значение суммы: примерно 0,896.

- **Абсолютная и условная сходимость**

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходится}$$

Если сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, сходимость называется условной.

Теорема: из абсолютной сходимости следует сходимость самого ряда. Обратное неверно.

• Задача 15. Абсолютная сходимость

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Решение

1. Составляем ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

● **Задача 15. Абсолютная сходимость (продолжение)**

2. Это ряд Дирихле с показателем, равным двум; он сходится.

3. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Для абсолютно сходящихся рядов сумма не зависит от порядка слагаемых.

● Задача 16. Условная сходимость

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Решение

1. Ряд из модулей является рядом Дирихле с показателем, равным одной второй, и расходится.

● Задача 16. Условная сходимость (продолжение)

2. Проверяем условия признака Лейбница: модули убывают и стремятся к нулю.
3. Значит сам ряд сходится, но не абсолютно.

Ответ: ряд сходится условно.

● Итоги лекции 1

Что нужно уметь

- находить частичные суммы и вычислять суммы простейших рядов;
- применять необходимый признак сходимости;
- исследовать ряды с помощью признаков сравнения;
- применять признаки Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши;
- выбирать подходящий признак по виду общего члена;

● Итоги лекции 1 (продолжение)

- исследовать знакочередующиеся ряды по признаку Лейбница;
- оценивать остаток ряда и вычислять сумму с заданной точностью;
- различать абсолютную и условную сходимость.

Лекция 2

Функциональные и степенные ряды

- Функциональный ряд, его сходимость
- Равномерная сходимость
- Признак Вейерштрасса
- Степенной ряд и теорема Абеля
- Радиус и интервал сходимости
- Исследование концов интервала
- Почленное дифференцирование
- Ряды Тейлора и Маклорена
- Основные разложения. Бином
- Вычисление значений функций
- Вычисление определённых интегралов
- Вычисление пределов. Задача Коши
- Оценка погрешности приближения

● Функциональный ряд

Ряд, членами которого являются функции одной переменной, называется функциональным:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

При каждом фиксированном значении переменной получается числовой ряд, который может сходиться или расходиться.

Значение переменной, при котором ряд сходится, называется точкой сходимости.

● Область сходимости. Сумма ряда

Совокупность всех точек сходимости называется областью сходимости функционального ряда. В этой области определена функция — сумма ряда:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

Разность суммы ряда и его частичной суммы называется остатком ряда; в области сходимости остаток стремится к нулю.

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

• Задача 1. Область сходимости функционального ряда

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Решение

1. При каждом фиксированном значении переменной получается обобщённый гармонический ряд с показателем, равным этому значению.

- **Задача 1. Область сходимости функционального ряда (продолжение)**

2. Ряд Дирихле сходится, если показатель больше единицы.

Ответ: $x > 1$

● Задача 2. Область сходимости геометрического функционального ряда

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n}$$

- **Задача 2. Область сходимости геометрического функционального ряда (продолжение)**

Решение

1. Ряд геометрический со знаменателем, равным величине, обратной выражению в скобках:

$$q = \frac{1}{1 + x^2}$$

- **Задача 2. Область сходимости геометрического функционального ряда (продолжение)**

2. Ряд сходится, если модуль знаменателя меньше единицы:

$$\frac{1}{1 + x^2} < 1 \Rightarrow x^2 > 0$$

3. Неравенство выполняется при всех значениях переменной, кроме нуля.

● Равномерная сходимость

Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на множестве, если для любого положительного числа найдётся номер, одинаковый для всех точек множества, начиная с которого остаток ряда по модулю меньше этого числа:

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad \text{при } n > N \quad \text{для всех точек множества}$$

Главное отличие от обычной сходимости — номер не зависит от точки.

• Признак Вейерштрасса

Если члены функционального ряда по модулю не превосходят членов сходящегося числового ряда, то функциональный ряд сходится равномерно и абсолютно:

$$|u_n(x)| \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сходитс}я$$

Сходящийся числовой ряд в этом случае называется мажорантой, а сам ряд — мажорируемым.

- **Задача 3. Равномерная сходимость по признаку Вейерштрасса**

Доказать, что ряд сходится равномерно на всей числовой прямой:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n x}{n^2}$$

- **Задача 3. Равномерная сходимость по признаку Вейерштрасса (продолжение)**

Решение

1. Оцениваем модуль общего члена, пользуясь ограниченностью косинуса:

$$\left| \frac{\cos n x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

- **Задача 3. Равномерная сходимость по признаку Вейерштрасса (продолжение)**

2. Мажорирующий числовой ряд является рядом Дирихле с показателем два и сходится.
3. По признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на всей числовой прямой.

● Свойства равномерно сходящихся рядов

- если члены ряда непрерывны и ряд сходится равномерно, то его сумма непрерывна;
- равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать;

● Свойства равномерно сходящихся рядов (продолжение)

- если ряд из производных сходится равномерно, исходный ряд можно почленно дифференцировать.

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, dx$$

Без равномерной сходимости эти операции могут привести к неверным результатам.

● Степенной ряд

Степенным рядом называется функциональный ряд, членами которого являются степенные функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

- **Степенной ряд (продолжение)**

Более общий вид — ряд по степеням разности переменной и постоянной:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Числа, стоящие перед степенями, называются коэффициентами ряда.

● Теорема Абеля

Теорема. Если степенной ряд сходится при некотором значении переменной, отличном от нуля, то он сходится абсолютно при всех значениях, меньших по модулю.

Если ряд расходится при некотором значении, то он расходится при всех значениях, больших по модулю.

Из теоремы следует, что область сходимости степенного ряда есть промежуток, симметричный относительно центра разложения.

● Радиус и интервал сходимости

Радиусом сходимости называется такое число, что при всех значениях переменной, меньших его по модулю, ряд сходится, а при больших — расходится:

$$|x| < R \text{ — сходится, } |x| > R \text{ — расходится}$$

Промежуток от минус радиуса до плюс радиуса называется интервалом сходимости. На его концах сходимость исследуется отдельно.

Радиус может равняться нулю (ряд сходится только в центре) или бесконечности (ряд сходится всюду).

● Формулы для радиуса сходимости

Радиус сходимости вычисляется по формулам, вытекающим из признаков Даламбера и Коши:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

На практике часто удобнее применять признак Даламбера непосредственно к модулям членов ряда.

● Задача 4. Интервал сходимости

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Решение

1. Применяем признак Даламбера к модулям членов ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x|$$

● Задача 4. Интервал сходимости (продолжение)

2. Ряд сходится абсолютно, если полученный предел меньше единицы:

$$|x| < 1 \Rightarrow R = 1$$

3. Интервалом сходимости является промежуток от минус единицы до единицы; концы исследуем отдельно.

● Задача 4. Исследование концов интервала

4. При значении переменной, равном единице, получаем гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{— расходится}$$

● Задача 4. Исследование концов интервала (продолжение)

5. При значении, равном минус единице, получаем знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{— сходится по признаку Лейбница}$$

6. Левый конец включается в область сходимости, правый — нет.

Ответ: $-1 \leq x < 1$

• Задача 5. Ряд, сходящийся только в одной точке

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

Решение

1. Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x|$$

- **Задача 5. Ряд, сходящийся только в одной точке (продолжение)**

2. При любом отличном от нуля значении переменной предел бесконечен, значит ряд расходится.

Ответ: $R = 0$; ряд сходится только при $x = 0$

• Задача 6. Ряд, сходящийся на всей прямой

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Решение

1. Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

- **Задача 6. Ряд, сходящийся на всей прямой (продолжение)**

2. Предел равен нулю при любом значении переменной, значит ряд сходится абсолютно всюду.

Ответ: $R = \infty$; $S(x) = e^x$

• Задача 7. Ряд по степеням разности

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{n \cdot 3^n}$$

Решение

1. Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x - 2)^{n+1} n \cdot 3^n}{(n + 1) 3^{n+1} (x - 2)^n} \right| = \frac{|x - 2|}{3}$$

- **Задача 7. Ряд по степеням разности (продолжение)**

2. Требуем, чтобы предел был меньше единицы:

$$|x - 2| < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$$

3. Радиус сходимости равен трём, центр разложения — точка, равная двум.

● Задача 7. Исследование концов

4. При правом конце получаем гармонический ряд:

$$x = 5: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится}$$

5. При левом конце получаем знакочередующийся ряд:

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ — сходится}$$

- **Задача 7. Исследование концов (продолжение)**

6. Записываем ответ:

$$-1 \leq x < 5$$

● Свойства степенных рядов

- внутри интервала сходимости степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем в этом интервале;
- сумма степенного ряда непрерывна внутри интервала сходимости;
- степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри интервала сходимости;

● Свойства степенных рядов (продолжение)

- при почленном дифференцировании и интегрировании радиус сходимости не изменяется.

Эти свойства делают степенные ряды удобным инструментом вычислений.

- Почленное дифференцирование и интегрирование

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) d t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

- **Почленное дифференцирование и интегрирование (продолжение)**

Отправной точкой обычно служит сумма геометрического ряда, из которой дифференцированием и интегрированием получают суммы многих других рядов.

● Ряд Тейлора

Пусть функция бесконечно дифференцируема в окрестности точки. Рядом Тейлора функции в этой точке называется степенной ряд:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Коэффициенты ряда Тейлора определяются самой функцией однозначно.

● Ряд Маклорена

Если разложение проводится в окрестности нуля, ряд Тейлора называется рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Частичная сумма ряда является многочленом Тейлора и служит приближением функции вблизи точки разложения.

- **Условия разложимости функции в ряд**

Ряд Тейлора функции может сходиться, но не к самой функции.

Разложение справедливо тогда и только тогда, когда остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

- **Условия разложимости функции в ряд
(продолжение)**

Остаточный член в форме Лагранжа записывается через производную следующего порядка в промежуточной точке:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Достаточное условие: все производные функции ограничены в окрестности точки одной и той же постоянной.

- **Основные разложения. Показательная и тригонометрические функции**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- **Основные разложения. Показательная и тригонометрические функции (продолжение)**

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Все три ряда сходятся на всей числовой прямой.

- Основные разложения. Логарифм и геометрический ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

- Основные разложения. Логарифм и геометрический ряд (продолжение)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Два последних ряда сходятся при значениях переменной, по модулю не превосходящих единицы.

● Биномиальный ряд

Разложение степенной функции с произвольным показателем называется биномиальным рядом:

$$(1 + x)^m = 1 + m x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Ряд сходится при значениях переменной, меньших единицы по модулю. При натуральном показателе он обрывается и превращается в формулу бинома Ньютона.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

● Приёмы разложения функций в ряд

- непосредственное вычисление производных в точке разложения;
- замена переменной в известном разложении;
- почленное дифференцирование или интегрирование известного ряда;
- перемножение и сложение известных разложений;
- предварительное преобразование функции по тождествам.

Второй и третий приёмы применяются чаще всего: они значительно короче вычисления производных.

● Задача 8. Разложение заменой переменной

Разложить функцию в ряд Маклорена:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Решение

1. Берём известное разложение показательной функции:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

- **Задача 8. Разложение заменой переменной (продолжение)**

2. Полагаем вспомогательную переменную равной квадрату исходной с обратным знаком:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

3. Ряд сходится при всех значениях переменной.

● Задача 9. Биномиальное разложение

Разложить функцию в ряд Маклорена до слагаемого с третьей степенью:

$$f(x) = \sqrt{1 + x}$$

Решение

1. Применяем биномиальный ряд с показателем, равным одной второй:

$$m = \frac{1}{2}, \quad \frac{m(m-1)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

• Задача 9. Биномиальное разложение (продолжение)

2. Вычисляем следующий коэффициент:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{3!} = \frac{1}{16}$$

3. Записываем разложение:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

- **Приближённые вычисления значений функций**

Заменяя функцию частичной суммой её ряда, получают приближённое значение. Погрешность оценивается остатком ряда.

Порядок действий

1. Подобрать функцию и разложение, содержащее нужное значение.

- **Приближённые вычисления значений функций (продолжение)**

2. Взять столько членов, чтобы остаток не превосходил заданной точности.
3. Для знакочередующегося ряда воспользоваться оценкой Лейбница: погрешность не превосходит первого отброшенного члена.

- **Задача 10. Приближённое вычисление показательной функции**

Вычислить с точностью до одной десятитысячной:

$$e^{0,1}$$

Решение

1. Подставляем значение в ряд для показательной функции:

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} + \frac{0,0001}{24} + \dots$$

- **Задача 10. Приближённое вычисление показательной функции (продолжение)**

2. Вычисляем слагаемые: четвёртое равно примерно 0,000167, пятое — примерно 0,0000042 и уже меньше требуемой точности.

3. Складываем первые четыре слагаемых:

$$e^{0,1} \approx 1,1052$$

• Задача 11. Приближённое вычисление синуса

Вычислить с точностью до одной сотысячной:

$$\sin 0,1$$

Решение

1. Подставляем значение в разложение синуса:

$$\sin 0,1 = 0,1 - \frac{0,001}{6} + \frac{0,00001}{120} - \dots$$

2. Третье слагаемое меньше требуемой точности, поэтому его отбрасываем.

- **Задача 11. Приближённое вычисление синуса (продолжение)**

3. Вычисляем:

$$\sin 0,1 \approx 0,1 - 0,000167 = 0,099833$$

• Задача 12. Приближённое извлечение корня

Вычислить приближённо:

$$\sqrt{1,02}$$

Решение

1. Применяем биномиальное разложение из задачи 9 при значении переменной, равном двум сотым:

$$\sqrt{1,02} \approx 1 + \frac{0,02}{2} - \frac{0,0004}{8}$$

- **Задача 12. Приближённое извлечение корня (продолжение)**

2. Вычисляем слагаемые:

$$\sqrt{1,02} \approx 1 + 0,01 - 0,00005 = 1,00995$$

Следующее слагаемое имеет порядок одной миллионной и на результат не влияет.

- **Вычисление определённых интегралов с помощью рядов**

Если первообразная не выражается через элементарные функции, подынтегральную функцию разлагают в ряд и интегрируют его почленно.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, dx$$

Почленное интегрирование законно, так как степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке внутри интервала сходимости.

• Задача 13. Интегральный синус

Вычислить приближённо интеграл:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

Решение

1. Разлагаем синус в ряд и делим почленно на переменную:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

● Задача 13. Интегральный синус (продолжение)

2. Интегрируем почленно от нуля до единицы:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \dots$$

3. Вычисляем первые слагаемые знакочередующегося ряда:

$$\approx 1 - 0,05556 + 0,00167 \approx 0,9461$$

- **Вычисление пределов с помощью рядов**

Разложение функций в ряд позволяет раскрывать неопределённости без многократного применения правила Лопиталя: достаточно удерживать несколько первых слагаемых.

Приём особенно удобен, когда правило Лопиталя приходится применять три и более раз.

• Задача 14. Предел через разложение

Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Решение

1. Разлагаем показательную функцию и вычитаем первые два слагаемых:

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

• Задача 14. Предел через разложение (продолжение)

2. Делим на квадрат переменной:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \dots$$

3. Переходим к пределу: все слагаемые с переменной обращаются в нуль.

Ответ: 0,5

- **Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов**

Решение задачи Коши можно искать в виде степенного ряда с неизвестными коэффициентами:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- **Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов (продолжение)**

Два способа

- метод неопределённых коэффициентов: ряд подставляют в уравнение и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях;
- метод последовательного дифференцирования: из уравнения находят значения производных в начальной точке и подставляют их в ряд Тейлора.

• Задача 15. Решение задачи Коши рядом

Найти первые слагаемые разложения решения задачи Коши:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

Решение

1. Из уравнения находим первую производную в начальной точке:

$$y'(0) = 0 + 1 = 1$$

2. Дифференцируем уравнение и вычисляем вторую производную:

$$y'' = 1 + y' \Rightarrow y''(0) = 2$$

- **Задача 15. Решение задачи Коши рядом (продолжение)**

3. Дифференцируем ещё раз:

$$y''' = y'' \Rightarrow y'''(0) = 2$$

● Задача 15. Продолжение

4. Подставляем найденные значения в ряд Тейлора:

$$y = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \dots$$

5. Упрощаем коэффициенты:

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

Точное решение задачи выражается через показательную функцию; разложение полученного ряда совпадает с найденным.

● Оценка погрешности приближения

Для знакочередующегося ряда погрешность оценивается первым отброшенным членом; для рядов произвольного вида применяют остаточный член формулы Тейлора или сравнение с геометрической прогрессией.

$$|R_n(x)| \leq \frac{M |x - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Здесь через постоянную обозначена граница модулей производных в рассматриваемой окрестности.

● Задача 16. Оценка числа слагаемых

Сколько слагаемых ряда достаточно взять для вычисления числа e с точностью до одной тысячной?

Решение

1. Подставляем в ряд для показательной функции значение, равное единице:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

• Задача 16. Оценка числа слагаемых (продолжение)

2. Остаток оценивается суммой геометрической прогрессии и не превосходит:

$$|R_n| \leq \frac{1}{n \cdot n!}$$

3. Подбираем номер, при котором оценка меньше требуемой точности: при шести слагаемых оценка примерно равна 0,0017, при семи — примерно 0,0002.

Достаточно семи слагаемых; приближённое значение равно 2,718.

● Точность многочленов Тейлора разных степеней

Сравним приближения синуса многочленами первой, третьей и пятой степеней при значении аргумента, равном единице:

$$x = 1; \quad x - \frac{x^3}{6} \approx 0,8333; \quad x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \approx 0,8417$$

Точное значение синуса единицы равно примерно 0,8415. Первое приближение даёт грубую ошибку, третье — около двух сотых, пятое — около двух десятитысячных.

Чем дальше значение аргумента от точки разложения, тем больше слагаемых требуется для той же точности.

● Ряды в приближённых вычислениях: сводка

- для функции подбирают разложение, содержащее нужное значение аргумента;
- чем меньше аргумент по модулю, тем быстрее сходится ряд;
- для знакочередующегося ряда погрешность оценивается первым отброшенным членом;
- для рядов с постоянными знаками остаток сравнивают с геометрической прогрессией;
- интегралы, не берущиеся в элементарных функциях, вычисляют почленным интегрированием разложения.