

Поурочные разработки практических занятий по высшей математике

Разделы: линейная алгебра, векторная алгебра с приложениями, аналитическая геометрия, предел функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями

Объём: 7 практических занятий по 90 минут (2 академических часа)

Дидактическая база: сборник задач по высшей математике (части 1–4)

Пояснительная записка

Настоящие поурочные разработки составлены на основе сборника задач по высшей математике и предназначены для проведения практических занятий со студентами первого курса. Разработки рассчитаны на сжатый (интенсивный) вариант курса: 7 занятий по 90 минут, то есть 14 академических часов. Каждое занятие охватывает целый содержательный блок программы, поэтому опорный теоретический материал даётся в виде плотного конспекта формул и алгоритмов, а разбор типовых задач построен по принципу «одна задача — один приём».

Распределение учебного времени по разделам:

Раздел	Количество занятий	Номера занятий
Линейная алгебра	2	1–2
Векторная алгебра с приложениями	2	3–4
Аналитическая геометрия	1	5
Предел функции	1	6
Дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями	1	7
Итого	7	1–7

Каждое занятие построено по единой методической схеме и включает:

1. организационный момент и актуализацию опорных знаний (устный фронтальный опрос) — 5 минут;
2. опорный теоретический материал (конспект формул и алгоритмов) — 15 минут;
3. разбор типовых задач у доски с подробными решениями — 30 минут;
4. тестовый контроль (10 закрытых заданий с выбором одного верного ответа из четырёх) — 15 минут;
5. самостоятельную работу — 12 классических заданий — 20 минут;
6. подведение итогов и выдачу домашнего задания — 5 минут.

Внутри каждого занятия принята сквозная нумерация заданий: задания с номерами от 1 до 10 — тестовые, с номерами от 11 до 22 — классические. Ответы ко всем заданиям помещены в конце соответствующего занятия, что позволяет использовать разработки и для аудиторной работы преподавателя, и для самоподготовки студентов.

Поскольку аудиторного времени немного, значительная часть тренировочных задач выносится на дом: в конце каждого занятия указаны конкретные параграфы и номера задач сборника.

Формы контроля: текущий (устный опрос, проверка самостоятельной работы), тематический (тестирование в конце каждого занятия), рубежный (типовые варианты контрольных работ из сборника после занятий 2, 4, 5 и 7).

Критерии оценивания тестового блока: 9–10 верных ответов из 10 — «отлично»; 7–8 — «хорошо»; 6 — «удовлетворительно»; менее 6 — «неудовлетворительно».

Тематический план

№	Тема практического занятия	Часы
1	Матрицы и действия над ними. Определители. Обратная матрица. Ранг матрицы	2
2	Матричные уравнения. Системы линейных алгебраических уравнений	2
3	Векторы. Линейные операции. Скалярное произведение и его приложения	2
4	Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения	2
5	Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве. Кривые и поверхности второго порядка	2
6	Предел функции. Раскрытие неопределённостей. Замечательные пределы. Непрерывность	2
7	Производная и её приложения. Исследование функции	2

Раздел 1. Линейная алгебра

Занятие 1. Матрицы и действия над ними. Определители. Обратная матрица. Ранг матрицы

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию первичных умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение выполнять действия над матрицами, вычислять определители второго и третьего порядков различными способами, находить обратную матрицу и ранг матрицы;
- *развивающая:* развивать вычислительную культуру, внимание, умение выбирать рациональный способ вычисления;
- *воспитательная:* воспитывать аккуратность в оформлении записей и привычку проверять результат.

В результате занятия студент должен

знать: определение матрицы и виды матриц, правила линейных операций и умножения матриц, определение определителя, правило треугольников, понятия минора и алгебраического дополнения, свойства определителей, критерий существования и формулу обратной матрицы, определение ранга;

уметь: складывать матрицы и умножать их на число, перемножать матрицы, транспонировать, вычислять определители второго и третьего порядков, находить обратную матрицу и выполнять проверку, вычислять ранг методом элементарных преобразований.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, разделы 1–3), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется матрицей размера $m \times n$?
2. При каком условии определена сумма матриц? произведение матриц?
3. Верно ли, что $AB = BA$ для любых квадратных матриц?
4. Для каких матриц определён определитель?
5. Чем алгебраическое дополнение отличается от минора?
6. Какая матрица называется невырожденной?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Линейные операции. Для матриц одинакового размера

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Умножение матриц. Если A имеет размер $m \times n$, а B — размер $n \times p$, то $C = AB$ имеет размер $m \times p$ и

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Правило «строка на столбец». Умножение некоммутативно: в общем случае $AB \neq BA$.

Транспонирование: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$; при этом $(AB)^T = B^T A^T$.

Определители:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Минор и алгебраическое дополнение: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. **Разложение по строке:**

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Свойства определителей: $\det A^T = \det A$; при перестановке двух строк определитель меняет знак; определитель с нулевой строкой или с двумя пропорциональными строками равен нулю; общий множитель строки выносится за знак определителя; определитель не изменится, если к строке прибавить другую строку, умноженную на число; определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали; $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

для матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы — наибольший порядок отличного от нуля минора. Практически ранг находят приведением матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк: он равен числу ненулевых строк.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Вычислить $3A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3A - 2B = \begin{pmatrix} 8 & -13 & 9 \\ -6 & 16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение AB , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Размеры согласованы: $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3)$, произведение имеет размер 3×3 .

$$c_{11} = 2, \quad c_{12} = 1 + 4 = 5, \quad c_{13} = -3 - 10 = -13; \quad c_{21} = 6, \quad c_{22} = 3, \quad c_{23} = -9;$$

$$c_{31} = -2, \quad c_{32} = -1 - 8 = -9, \quad c_{33} = 3 + 20 = 23; \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -13 \\ 6 & 3 & -9 \\ -2 & -9 & 23 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислить определитель двумя способами: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. Способ 1 (правило треугольников):

$$\Delta = -24 + 2 + 0 - 12 + 20 - 0 = -14.$$

Способ 2 (разложение по первому столбцу, в котором есть нуль):

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) + (-10) = -14.$$

Разложение выгоднее выбирать по строке или столбцу с наибольшим числом нулей.

Пример 4. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Разложение по первой строке даёт

$$x(x^2 - 1) - (x - 1) + (1 - x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0.$$

Ответ: $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2$.

Пример 5. Найти A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и выполнить проверку.

Решение. $\det A = 12 + 2 = 14 \neq 0$;

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad AA^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 6. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = 2(3 + 2) - 1(0 - 2) - 1(0 - 3) = 15 \neq 0$. Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 5, A_{12} = 2, A_{13} = -3; \quad A_{21} = 0, A_{22} = 3, A_{23} = 3; \quad A_{31} = 5, A_{32} = -4, A_{33} = 6.$$

Записывая их по столбцам, получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычитая из второй строки удвоенную первую, а из третьей — утроенную первую, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ранг} A = 2.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $A + B$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.2. Матрица A имеет размер 3×4 , матрица B — размер 4×2 . Тогда произведение AB имеет размер...

1)	2)	3)	4)
3×2	4×4	2×3	произведение не определено

1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда AB равно...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

1.4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ матрица A^2 равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

1.5. Определитель $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
26	14	-26	20

1.6. Корень уравнения $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ равен...

1)	2)	3)	4)
6	-6	-1,5	1,5

1.7. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
12	-12	0	30

1.8. Алгебраическое дополнение A_{23} элемента определителя третьего порядка равно...

1)	2)	3)	4)
M_{23}	$-M_{23}$	M_{32}	$(-1)^6 M_{23}$

1.9. Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
A симметрическая	$\det A \neq 0$	$\det A = 0$	все элементы A отличны от нуля

1.10. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	1	2	4

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

1.11. Найти сумму $A + B$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

1.12. Вычислить $2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.13. Найти произведение AB , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.14. Вычислить A^2 , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.15. Найти транспонированную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.16. Вычислить $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.17. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

1.18. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ разложением по второй строке.

1.19. При каком значении λ определитель $\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 8 & \lambda \end{vmatrix}$ равен нулю?

1.20. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.21. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.22. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны действия над матрицами, два способа вычисления определителя третьего порядка, алгоритм построения обратной матрицы и метод элементарных преобразований.

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел 1 «Действия над матрицами» — задачи 1–20; раздел 2 «Определители» — задачи 33–50; раздел 3 «Обратные матрицы и ранг» — задачи 56–70.

Ответы к занятию 1

Тестовые задания: 1.1 — 1; 1.2 — 1; 1.3 — 2; 1.4 — 2; 1.5 — 1; 1.6 — 2; 1.7 — 2; 1.8 — 2; 1.9 — 2; 1.10 — 2.

Классические задания.

1.11. $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$. 1.12. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ -12 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. 1.13. $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

1.14. $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. 1.15. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 1.16. 26. 1.17. 13. 1.18. -32.

1.19. $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4$. 1.20. $\det A = -1, A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1.21. $\det A = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 1.22. 2.

Занятие 2. Матричные уравнения. Системы линейных алгебраических уравнений

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по обобщению и систематизации знаний.

Цели занятия:

- *обучающая*: сформировать умение решать матричные уравнения и системы линейных алгебраических уравнений тремя методами, исследовать систему на совместность по теореме Кронекера — Капелли, находить фундаментальную систему решений однородной системы;
- *развивающая*: развивать умение выбирать рациональный метод решения в зависимости от структуры системы;
- *воспитательная*: формировать критическое отношение к результату, привычку выполнять проверку подстановкой.

В результате занятия студент должен

знать: правила решения матричных уравнений, формулы Крамера, матричную форму записи системы, алгоритм метода Гаусса, теорему Кронекера — Капелли, понятия базисных и свободных неизвестных, фундаментальной системы решений;

уметь: решать уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, решать системы по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса, исследовать систему на совместность, находить общее решение.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, разделы 4–5), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Как найти обратную матрицу второго порядка?
2. Как записать систему в матричной форме?
3. Какая система называется совместной? определённой?
4. При каком условии применимо правило Крамера?
5. Что такое расширенная матрица системы?
6. Может ли однородная система быть несовместной?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Матричные уравнения:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; \quad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}; \quad AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Порядок сомножителей существен: обратная матрица приписывается с той же стороны, с которой стоит исключаемая матрица.

Матричная форма системы: $AX = B$, где A — матрица коэффициентов, X — столбец неизвестных, B — столбец свободных членов.

Правило Крамера (число уравнений равно числу неизвестных, $\Delta = \det A \neq 0$):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_k получается из Δ заменой k -го столбца столбцом свободных членов. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один Δ_k отличен от нуля, система несовместна.

Матричный метод: при $\det A \neq 0$ решение $X = A^{-1}B$.

Метод Гаусса: расширенная матрица $\bar{A} = (A \mid B)$ элементарными преобразованиями строк приводится к ступенчатому виду, затем обратным ходом находятся неизвестные. Метод универсален и применим к любым системам.

Теорема Кронекера — Капелли. Система совместна тогда и только тогда, когда $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = r$. При этом если $r = n$, решение единственно; если $r < n$, система имеет бесконечно много решений и $n - r$ неизвестных объявляются свободными.

Однородная система $AX = 0$ всегда совместна. Ненулевые решения существуют тогда и только тогда, когда $r < n$; число векторов фундаментальной системы решений равно $n - r$, а общее решение имеет вид $X = C_1 e_1 + \dots + C_{n-r} e_{n-r}$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Решить матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = 1 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 8-5 & -2-2 \\ -12+10 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить уравнение $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Неизвестная матрица стоит слева, поэтому умножаем на A^{-1} справа:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Решить систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4, \\ x - 3y + 2z = -5, \\ 3x + 2y + z = 7. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -14 + 5 - 11 = -20 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = -20, \quad \Delta_2 = -40, \quad \Delta_3 = 0;$$

$$x = \frac{-20}{-20} = 1, \quad y = \frac{-40}{-20} = 2, \quad z = 0.$$

Проверка по первому уравнению: $2 + 2 - 0 = 4$ — верно.

Пример 4. Решить систему матричным методом: $2x + 3y = 8, x - y = -1$.

Решение. $\det A = -5, A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Решить систему методом Гаусса: $x + 2y + 3z = 6, 2x - y + z = 2, 3x + y - 2z = 2$.

Решение.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -11 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Обратный ход: $z = 1, y = 1, x = 1$.

Ответ: (1; 1; 1).

Пример 6. Исследовать систему на совместность: $x + y = 1, 2x + 2y = 3$.

Решение.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\text{rang} A = 1, \text{rang} \bar{A} = 2$: ранги не совпадают, система несовместна (вторая строка соответствует уравнению $0 = 1$).

Пример 7. Найти фундаментальную систему решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен 2, неизвестных 4, свободных неизвестных две: x_2 и x_4 . Тогда $x_1 = -2x_2 - 2x_4, x_3 = -x_4$, и фундаментальная система решений

$$e_1 = (-2; 1; 0; 0), \quad e_2 = (-2; 0; -1; 1),$$

общее решение $X = C_1 e_1 + C_2 e_2$.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

2.1. Решение матричного уравнения $AX = B$ при $\det A \neq 0$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$X = A^{-1}B$	$X = BA^{-1}$	$X = B^{-1}A$	$X = AB^{-1}$

2.2. Решение матричного уравнения $XA = B$ при $\det A \neq 0$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$X = A^{-1}B$	$X = BA^{-1}$	$X = AB$	$X = B^{-1}A$

2.3. Если главный определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система...

1)	2)	3)	4)
несовместна	имеет решение	единственное решение	имеет бесконечно много нулевое решение

2.4. По правилу Крамера неизвестная x_2 находится по формуле...

1)	2)	3)	4)
$x_2 = \frac{\Delta}{\Delta_2}$	$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$	$x_2 = \Delta_2 \Delta$	$x_2 = \Delta - \Delta_2$

2.5. Для системы $3x + 2y = 7$, $x - y = -1$ значение x равно...

1)	2)	3)	4)
1	2	-1	3

2.6. Согласно теореме Кронекера — Капелли система совместна тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$\text{ранг}A = n$	$\text{ранг}A = \text{ранг}\bar{A}$	$\text{ранг}A < \text{ранг}\bar{A}$	$\det A \neq 0$

2.7. Система четырёх уравнений с четырьмя неизвестными совместна, причём $\text{ранг}A = \text{ранг}\bar{A} = 2$. Тогда число свободных неизвестных равно...

1)	2)	3)	4)
0	1	2	4

2.8. Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, то система...

1)	2)	3)	4)
имеет решение	единственное решение	несовместна	имеет бесконечно много нулевое решение

2.9. Однородная система линейных уравнений...

1)	2)	3)	4)
всегда совместна	всегда несовместна	всегда определённа	не имеет решений при $\Delta = 0$

2.10. Однородная система трёх уравнений с тремя неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$	все свободные члены равны нулю	$\text{ранг}A = 3$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

2.11. Решить матричное уравнение $AX = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

2.12. Решить матричное уравнение $XA = B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.13. Решить по правилу Крамера: $x + 2y = 5$, $3x - y = 1$.

2.14. Решить по правилу Крамера: $x + y + z = 6$, $x - y + 2z = 5$, $2x + y - z = 1$.

2.15. Решить матричным методом: $2x + y = 5$, $x + 3y = 10$.

2.16. Решить методом Гаусса: $x + y + z = 2$, $2x - y + 3z = 13$, $x + 2y - z = -6$.

2.17. Исследовать на совместность и найти общее решение: $x + 2y = 3$, $2x + 4y = 6$.

2.18. Исследовать на совместность: $x - y = 1$, $2x - 2y = 5$.

2.19. Найти фундаментальную систему решений однородной системы $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

2.20. Найти фундаментальную систему решений однородной системы $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.

2.21. При каких значениях λ однородная система $\lambda x + y = 0$, $x + \lambda y = 0$ имеет ненулевое решение?

2.22. Записать систему задания 2.16 в матричной форме $AX = B$ и указать размеры матриц A , X , B .

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: систематизированы методы решения систем; выработано умение выбирать метод — правило Крамера для небольших систем с ненулевым определителем, метод Гаусса как универсальный.

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел 4 «Матричные уравнения» — задачи 76–85; раздел 5 «Системы линейных алгебраических уравнений» — задачи 86–109; подготовиться к рубежному контролю по линейной алгебре.

Ответы к занятию 2

Тестовые задания: 2.1 — 1; 2.2 — 2; 2.3 — 2; 2.4 — 2; 2.5 — 1; 2.6 — 2; 2.7 — 3; 2.8 — 2; 2.9 — 1; 2.10 — 2.

Классические задания.

2.11. $X = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. 2.12. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

2.13. $\Delta = -7$, $\Delta_1 = -7$, $\Delta_2 = -14$; $x = 1$, $y = 2$. 2.14. $\Delta = 7$; $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

2.15. $\det A = 5$; $x = 1$, $y = 3$. 2.16. $(1; -2; 3)$.

2.17. Система совместна и неопределённая: $\text{ранг} A = \text{ранг} \bar{A} = 1 < 2$; общее решение $x = 3 - 2y$, где y — свободная неизвестная.

2.18. Система несовместна: $\text{ранг} A = 1$, $\text{ранг} \bar{A} = 2$.

2.19. Фундаментальная система состоит из одного вектора $e_1 = (0; 1; 1)$; общее решение $X = C(0; 1; 1)$.

2.20. $\text{ранг} A = 2$, $n = 4$; $e_1 = (-2; 1; 0; 0)$, $e_2 = (-2; 0; -1; 1)$.

2.21. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

2.22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -6 \end{pmatrix}$; размеры: 3×3 , 3×1 , 3×1 .

Раздел 2. Векторная алгебра с приложениями

Занятие 3. Векторы. Линейные операции. Скалярное произведение и его приложения

Раздел: векторная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение находить координаты и длину вектора, выполнять линейные операции, находить орт и направляющие косинусы, применять условие коллинеарности и формулы деления отрезка, вычислять скалярное произведение, угол между векторами, проекцию и работу силы;
- *развивающая:* развивать пространственное воображение и умение переводить геометрическое условие в аналитическую запись;
- *воспитательная:* показать связь математики с механикой и физикой.

В результате занятия студент должен

знать: координатные формулы линейных операций, формулу длины вектора, определение орта и направляющих косинусов, условие коллинеарности, формулы деления отрезка, определение и координатную формулу скалярного произведения, формулы угла и проекции, условие перпендикулярности, формулу работы силы;

уметь: выполнять действия над векторами в координатной форме, вычислять длины, углы, проекции, решать простейшие геометрические и физические задачи.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 2, § 1, § 2, § 7, § 8, § 11), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Как найти координаты вектора по координатам его начала и конца?
2. Чему равна длина вектора в координатной форме?
3. Какой вектор называется ортом?
4. Каково условие коллинеарности двух векторов?
5. Что называется скалярным произведением? Число это или вектор?
6. Каково условие перпендикулярности двух ненулевых векторов?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Линейные операции:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Длина вектора, орт и направляющие косинусы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

причём $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Условие коллинеарности: координаты пропорциональны, то есть $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Деление отрезка в отношении $AM:MB = \lambda$:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

Координаты середины отрезка равны полусуммам координат концов; координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим координат вершин.

Скалярное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2.$$

Угол между векторами и проекция:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

Условие перпендикулярности: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Работа постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$: $A = (\vec{F}, \vec{s})$.

Полезное следствие: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Даны точки $A(2; -1; 3)$ и $B(-1; 4; 5)$. Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (-3; 5; 2)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$.

Пример 2. Для вектора $\vec{a} = (2; -3; 6)$ найти длину, орт и направляющие косинусы.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{49} = 7$;

$$\vec{a}^0 = \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right), \quad \cos\alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{6}{7}.$$

Проверка: $\frac{4+9+36}{49} = 1$.

Пример 3. При каком значении m векторы $\vec{a} = (m; 3; -2)$ и $\vec{b} = (4; -6; 4)$ коллинеарны?

Решение. $\frac{m}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, откуда $m = -2$.

Пример 4. Точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB = 2:1$, где $A(1; 2)$, $B(7; -1)$. Найти координаты точки M .

Решение. При $\lambda = 2$

$$x_M = \frac{1 + 14}{3} = 5, \quad y_M = \frac{2 - 2}{3} = 0, \quad M(5; 0).$$

Пример 5. Найти скалярное произведение и угол между векторами $\vec{a} = (2; -1; 3)$ и $\vec{b} = (1; 4; -2)$.

Решение. $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 - 4 - 6 = -8$; $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{21}$;

$$\cos\varphi = \frac{-8}{\sqrt{294}} = \frac{-8}{7\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{21} \approx -0,47, \quad \varphi \approx 118^\circ.$$

Пример 6. При каком значении m векторы $\vec{a} = (m; 2; -1)$ и $\vec{b} = (3; m; 4)$ перпендикулярны?

Решение. $3m + 2m - 4 = 0$, откуда $m = \frac{4}{5} = 0,8$.

Пример 7. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (3; -2; 1)$ на вектор $\vec{b} = (2; 1; -2)$.

Решение. $(\vec{a}, \vec{b}) = 6 - 2 - 2 = 2$, $|\vec{b}| = 3$, поэтому проекция равна $\frac{2}{3}$.

Пример 8 (приложение). Сила $\vec{F} = (2; -1; 3)$ перемещает точку из $A(1; 2; 0)$ в $B(4; 0; 2)$. Найти работу силы.

Решение. $\vec{s} = (3; -2; 2)$, $A = 6 + 2 + 6 = 14$ единиц работы.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

3.1. Даны точки $A(2; -1; 3)$ и $B(-1; 4; 5)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны...

1)	2)	3)	4)
$(-3; 5; -2)$	$(-3; 5; 2)$	$(1; 3; 8)$	$(3; -5; -2)$

3.2. Длина вектора $\vec{a} = (2; -3; 6)$ равна...

1)	2)	3)	4)
11	7	5	49

3.3. Даны $\vec{a} = (1; -2; 0)$, $\vec{b} = (0; 3; -1)$. Тогда $2\vec{a} + 3\vec{b}$ равно...

1)	2)	3)	4)
$(1; 1; -1)$	$(2; -13; 3)$	$(2; 5; -3)$	$(3; 0; -2)$

3.4. Векторы $(m; 3; -2)$ и $(4; -6; 4)$ коллинеарны при m , равном...

1)	2)	3)	4)
-2	2	8	-8

3.5. Орт вектора $\vec{a} = (6; -3; 2)$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\left(\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right)$	$\left(\frac{6}{49}; -\frac{3}{49}; \frac{2}{49}\right)$	$\left(\frac{3}{7}; -\frac{3}{14}; \frac{1}{7}\right)$	$\left(\frac{7}{6}; -\frac{7}{3}; \frac{7}{2}\right)$

3.6. Середина отрезка с концами $A(-1; 3)$ и $B(5; -7)$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(2; -2)$	$(4; -4)$	$(-3; 5)$	$(6; -10)$

3.7. Скалярное произведение векторов $(2; -1; 3)$ и $(1; 4; -2)$ равно...

1)	2)	3)	4)
8	-8	0	12

3.8. Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$	$(\vec{a}, \vec{b}) = 1$	$ \vec{a} = \vec{b} $	$\vec{a} = \lambda \vec{b}$

3.9. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{a})$ равно...

1)	2)	3)	4)
0	$ \vec{a} $	$ \vec{a} ^2$	1

3.10. Угол между векторами $(1; 1; 0)$ и $(0; 1; 1)$ равен...

1)	2)	3)	4)
30°	45°	60°	90°

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

3.11. Даны точки $A(-2; 3; 1)$ и $B(4; -1; 5)$. Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

3.12. Найти длину и орт вектора $\vec{a} = (3; -4; 12)$.

3.13. Даны $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-1; 4; 0)$. Найти $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

- 3.14. При каком значении m векторы $(m; -4; 6)$ и $(3; -2; 3)$ коллинеарны?
- 3.15. Разложить вектор $\vec{c} = (5; 2; 7)$ по векторам $\vec{a} = (1; 1; 2)$ и $\vec{b} = (2; -1; 1)$.
- 3.16. Найти координаты середины отрезка с концами $A(3; -5; 2)$ и $B(-1; 7; 4)$.
- 3.17. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(1; 2)$, $B(4; -1)$, $C(1; 5)$.
- 3.18. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, если $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (4; 0; -1)$.
- 3.19. Найти угол между векторами $\vec{a} = (1; 2; 2)$ и $\vec{b} = (2; 1; -2)$.
- 3.20. При каком значении λ векторы $(\lambda; 3; -2)$ и $(4; -1; \lambda)$ перпендикулярны?
- 3.21. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (2; 3; -1)$ на вектор $\vec{b} = (1; -2; 2)$.
- 3.22. Сила $\vec{F} = (3; -2; 1)$ перемещает точку из $A(1; -1; 2)$ в $B(4; 1; 0)$. Найти работу силы.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработан переход «точки — вектор — координаты» и все приложения скалярного произведения: угол, проекция, перпендикулярность, работа силы.

Домашнее задание: сборник задач, часть 2, § 7 «Линейные операции над векторами», § 8 «Скалярное произведение», § 11 «Прямоугольные координаты на плоскости».

Ответы к занятию 3

Тестовые задания: 3.1 — 2; 3.2 — 2; 3.3 — 3; 3.4 — 1; 3.5 — 1; 3.6 — 1; 3.7 — 2; 3.8 — 1; 3.9 — 3; 3.10 — 3.

Классические задания.

- 3.11. $\overrightarrow{AB} = (6; -4; 4)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.
- 3.12. $|\vec{a}| = 13$, $\vec{a}^0 = \left(\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right)$.
- 3.13. $(8; -11; 9)$. 3.14. $m = 6$. 3.15. $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$. 3.16. $(1; 1; 3)$.
- 3.17. $(2; 2)$. 3.18. 1. 3.19. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, следовательно, $\varphi = 90^\circ$.
- 3.20. $\lambda = 1,5$. 3.21. $(\vec{a}, \vec{b}) = -6$, $|\vec{b}| = 3$, проекция равна -2 . 3.22. $A = 3$.

Занятие 4. Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения

Раздел: векторная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по применению и обобщению знаний.

Цели занятия:

- обучающая:* сформировать умение вычислять векторное и смешанное произведения, применять их к вычислению площадей и объёмов, к проверке коллинеарности и компланарности, к построению нормали и вычислению момента силы;

- *развивающая*: развивать пространственное мышление и умение выбирать подходящий вид произведения векторов;
- *воспитательная*: показать прикладную значимость векторной алгебры в механике.

В результате занятия студент должен

знать: определения векторного и смешанного произведений, их геометрический смысл, координатные формулы, свойства, условия коллинеарности и компланарности, формулы площади треугольника и объёма тетраэдра, формулу момента силы;

уметь: вычислять векторное и смешанное произведения, находить площади и объёмы, проверять компланарность, строить вектор, перпендикулярный двум данным, решать комбинированные задачи.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 2, § 3, § 5, § 6, § 9, § 10, § 12), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что является результатом векторного умножения?
2. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения?
3. Чему равно $[\vec{a}, \vec{a}]$?
4. Что называется смешанным произведением трёх векторов?
5. Каково условие компланарности трёх векторов?
6. Как найти объём тетраэдра по трём векторам?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ — вектор, перпендикулярный обоим сомножителям, образующий с ними правую тройку и имеющий модуль

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Координатная формула:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Свойства: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$; $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$; $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$. Условие коллинеарности: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Площади:

$$S_{\text{парал.}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Смешанное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Объёмы:

$$V_{\text{парал.-да}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|, \quad V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Условие компланарности: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Знак смешанного произведения определяет ориентацию тройки: при положительном значении тройка правая.

Момент силы: $\vec{M} = [\overrightarrow{OA}, \vec{F}]$.

Сводка трёх произведений.

Произведение	Результат	Основное приложение
скалярное $(\vec{a}, \vec{b})$	число	угол, проекция, работа силы
векторное $[\vec{a}, \vec{b}]$	вектор	площадь, нормаль, момент силы
смешанное $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$	число	объём, компланарность

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти векторное произведение и его модуль для $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; 4; -2)$.

Решение.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 4) - \vec{j}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) + \vec{k}(2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) = (-10; 7; 9);$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{100 + 49 + 81} = \sqrt{230}.$$

Контроль: $(-10) \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + 9 \cdot 3 = 0$ — вектор перпендикулярен первому сомножителю.

Пример 2. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 4; -3)$;

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (15; 12; 16), \quad |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = 25, \quad S_{\Delta} = 12,5.$$

Пример 3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1; 2; 2)$ и $\vec{b} = (2; 1; -2)$.

Решение. $[\vec{a}, \vec{b}] = (-6; 6; -3)$, модуль равен 9, поэтому

$$\vec{e} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

(подходит также противоположный вектор).

Пример 4. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$, $\vec{c} = (0; 1; -2)$ и найти объёмы параллелепипеда и тетраэдра.

Решение.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 6 = 15;$$

$$V_{\text{парал-да}} = 15, \quad V_{\text{тетраэдра}} = \frac{15}{6} = 2,5.$$

Смешанное произведение положительно, следовательно, тройка правая.

Пример 5. При каком значении λ векторы $(1; 2; -1)$, $(2; -1; 3)$, $(\lambda; 1; 1)$ компланарны?

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 6\lambda - 2 - \lambda = 5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Пример 6 (приложение). Найти момент силы $\vec{F} = (1; -2; 3)$, приложенной в точке $A(2; 1; 0)$, относительно начала координат.

Решение.

$$\vec{M} = [\vec{OA}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (3; -6; -5), \quad |\vec{M}| = \sqrt{70}.$$

Пример 7 (комбинированная задача). Найти высоту параллелепипеда из примера 4, опущенную на грань, построенную на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Площадь основания $S = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |(5; 5; -5)| = 5\sqrt{3}$, поэтому

$$h = \frac{V}{S} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

4.1. Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ для $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$ равно...

1)	2)	3)	4)
$(5; 5; -5)$	$(-5; -5; 5)$	$(5; 5; 5)$	$(2; -2; 3)$

4.2. Модуль векторного произведения численно равен...

1)	2)	3)	4)
объёму параллелепипеда	площади построенного на векторах	параллелограмма, площади треугольника	длине проекции

4.3. Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{a}]$ равно...

1)	2)	3)	4)
$ \vec{a} ^2$	1	$\vec{0}$	$2\vec{a}$

4.4. Ненулевые векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$	$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$	$ \vec{a} = \vec{b} $	$(\vec{a}, \vec{b}) = 1$

4.5. Площадь треугольника, построенного на векторах $(3; 0; 0)$ и $(0; 4; 0)$, равна...

1)	2)	3)	4)
12	6	24	5

4.6. Если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и угол между векторами равен 30° , то $||[\vec{a}, \vec{b}]||$ равен...

1)	2)	3)	4)
10	5	$5\sqrt{3}$	$\frac{5}{2}$

4.7. Смешанное произведение векторов $(1; 2; 3)$, $(2; -1; 1)$, $(0; 1; -2)$ равно...

1)	2)	3)	4)
0	15	-15	5

4.8. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение...

1)	2)	3)	4)
положительно	отрицательно	равно нулю	равно единице

4.9. Смешанное произведение трёх векторов равно 18. Тогда объём тетраэдра, построенного на них, равен...

1)	2)	3)	4)
18	9	6	3

4.10. Векторное произведение $[\vec{i}, \vec{j}]$ равно...

1)	2)	3)	4)
$\vec{k}$	$-\vec{k}$	1	$\vec{0}$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

4.11. Найти $[\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 4)$.

4.12. Найти $[\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = (1; 0; -2)$, $\vec{b} = (3; 1; 0)$.

4.13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $(1; 2; 2)$ и $(2; 1; -2)$.

4.14. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

4.15. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(5; 2)$.

- 4.16.** Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $(1; 2; 2)$ и $(2; 1; -2)$.
- 4.17.** Вычислить смешанное произведение векторов $(1; -1; 2)$, $(2; 1; -1)$, $(3; 0; 1)$ и сделать вывод об их взаимном расположении.
- 4.18.** Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $(1; 2; 3)$, $(2; -1; 1)$, $(0; 1; -2)$.
- 4.19.** Найти объём тетраэдра с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 1; 3)$.
- 4.20.** При каком значении λ векторы $(2; 1; \lambda)$, $(1; -1; 2)$, $(3; 0; 1)$ компланарны?
- 4.21.** Найти момент силы $\vec{F} = (2; 1; -1)$, приложенной в точке $A(1; 0; 2)$, относительно начала координат.
- 4.22.** Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$, $\vec{c} = (0; 1; -2)$, опущенную на грань, построенную на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: сопоставлены три произведения векторов и их геометрическое и механическое содержание.

Домашнее задание: сборник задач, часть 2, § 9 «Векторное произведение», § 10 «Смешанное произведение», § 12 «Приложения и комбинированные задачи»; подготовиться к типовому варианту контрольной работы по векторной алгебре.

Ответы к занятию 4

Тестовые задания: 4.1 — 1; 4.2 — 2; 4.3 — 3; 4.4 — 2; 4.5 — 2; 4.6 — 2; 4.7 — 2; 4.8 — 3; 4.9 — 4; 4.10 — 1.

Классические задания.

4.11. $(10; -9; -7)$. **4.12.** $(2; -6; 1)$. **4.13.** $[\vec{a}, \vec{b}] = (-6; 6; -3)$, $S = 9$.

4.14. $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (-4; 8; -4)$, $S = 2\sqrt{6}$.

4.15. $\vec{AB} = (3; 4; 0)$, $\vec{AC} = (4; 0; 0)$, $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (0; 0; -16)$, $S = 8$.

4.16. $\vec{e} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ (или противоположный ему вектор).

4.17. Смешанное произведение равно нулю — векторы компланарны.

4.18. 15. **4.19.** $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = -12$, $V = 2$. **4.20.** $\lambda = -1$.

4.21. $\vec{M} = (-2; 5; 1)$. **4.22.** $S = 5\sqrt{3}$, $h = \sqrt{3}$.

Раздел 3. Аналитическая геометрия

Занятие 5. Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве. Кривые и поверхности второго порядка

Раздел: аналитическая геометрия. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и систематизации знаний.

Цели занятия:

- *обучающая*: сформировать умение составлять уравнение прямой на плоскости, плоскости и прямой в пространстве, находить углы и расстояния, точку пересечения прямой с плоскостью, приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и распознавать поверхности второго порядка;
- *развивающая*: развивать пространственные представления и умение переводить геометрическое условие на язык уравнений;
- *воспитательная*: воспитывать графическую культуру и аккуратность.

В результате занятия студент должен

знать: виды уравнения прямой на плоскости, формулу угла между прямыми и расстояния от точки до прямой; общее уравнение плоскости, уравнение через три точки и в отрезках, формулу расстояния от точки до плоскости; канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости; канонические уравнения кривых и поверхностей второго порядка;

уметь: составлять уравнения прямой и плоскости по различным данным, вычислять углы и расстояния, находить точку пересечения прямой и плоскости, выделять полные квадраты и определять параметры кривой, распознавать поверхности второго порядка.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 3, § 1–§ 12), карточки с тестовыми заданиями, чертёжные принадлежности.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какой вид имеет общее уравнение прямой на плоскости? Что такое нормальный вектор?
2. Как связаны угловые коэффициенты параллельных и перпендикулярных прямых?
3. Какой вид имеет общее уравнение плоскости?
4. Что называется направляющим вектором прямой в пространстве?
5. Как связаны полуоси эллипса и его фокусное расстояние?
6. Что такое асимптоты гиперболы?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Прямая на плоскости. Общее уравнение $Ax + By + C = 0$; нормальный вектор $\vec{n} = (A; B)$, направляющий вектор $\vec{s} = (-B; A)$. Уравнение с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$. Прямая через точку с данным угловым коэффициентом: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Прямая через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Условие параллельности $k_1 = k_2$; условие перпендикулярности $k_1 k_2 = -1$.

Плоскость. Общее уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, нормаль $\vec{n} = (A; B; C)$. Плоскость через точку с нормалью:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Расстояние от точки до плоскости и угол между плоскостями:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Плоскость через три точки удобно строить, взяв в качестве нормали векторное произведение $[\vec{M_1 M_2}, \vec{M_1 M_3}]$.

Прямая в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}, \quad x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + pt, \quad z = z_0 + qt.$$

Угол между прямой и плоскостью: $\sin \varphi = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$. Прямая параллельна плоскости при $(\vec{n}, \vec{s}) = 0$ и перпендикулярна ей при коллинеарных $\vec{n}$ и $\vec{s}$.

Кривые второго порядка. Окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon > 1$, асимптоты $y = \pm \frac{b}{a}x$. Парабола $y^2 = 2px$, фокус $F(\frac{p}{2}; 0)$, директриса $x = -\frac{p}{2}$. Приведение к каноническому виду выполняется выделением полных квадратов.

Поверхности второго порядка.

Уравнение	Поверхность
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	сфера
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	эллипсоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	однополостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	двуполостный гиперболоид
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	эллиптический параболоид
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	гиперболический параболоид

Уравнение	Поверхность
$x^2 + y^2 = R^2$ (в пространстве)	круговой цилиндр

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(3; -4)$.

Решение. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-6}$, откуда $-6(x-1) = 2(y-2)$ и

$$3x + y - 5 = 0.$$

Проверка по точке B : $9 - 4 - 5 = 0$ — верно.

Пример 2. Найти угол между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $3x + y - 1 = 0$ и расстояние от точки $M(3; -2)$ до прямой $4x - 3y + 5 = 0$.

Решение. $k_1 = 2, k_2 = -3$;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 - 2}{1 - 6} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ; \quad d = \frac{|12 + 6 + 5|}{5} = \frac{23}{5} = 4,6.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; 2; -2)$, и найти расстояние от точки $P(1; 1; 1)$ до плоскости $2x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Плоскость: $(x-2) + 2(y+1) - 2(z-3) = 0$, то есть $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

$$d = \frac{|2 - 2 + 1 - 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{5}{3}.$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

Решение. Точки лежат на осях, поэтому запишем уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Пример 5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ с плоскостью $x + 2y - z + 4 = 0$.

Решение. Параметрические уравнения: $x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$. Подставляем:

$$(1 + 2t) + 2(-1 - t) - 3t + 4 = 3 - 3t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Ответ: $(3; -2; 3)$.

Пример 6. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Решение. Выделяем полные квадраты:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 12 + 9 + 4 = 25,$$

значит, центр $C(3; -2)$, радиус $R = 5$.

Пример 7. Для эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и (для гиперболы) асимптоты.

Решение. Эллипс: $a = 5, b = 3, c = 4, F_1(-4; 0), F_2(4; 0), e = 0,8$.

Гипербола: $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$, $\varepsilon = 1,25$, асимптоты $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Пример 8. Привести уравнение $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ к каноническому виду.

Решение.

$$9(x-1)^2 - 9 + 4(y+2)^2 - 16 - 11 = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

— эллипс с центром $C(1; -2)$ и полуосями 2 и 3.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

5.1. Угловой коэффициент прямой $3x - 2y + 6 = 0$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	3

5.2. Прямые $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 5$...

1)	2)	3)	4)
пересекаются под углом 45°	параллельны	перпендикулярны	совпадают

5.3. Расстояние от начала координат до прямой $3x + 4y - 10 = 0$ равно...

1)	2)	3)	4)
10	2	$\frac{10}{7}$	5

5.4. Нормальный вектор плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(2; -3; 1)$	$(2; 3; 1)$	$(-3; 1; -5)$	$(2; -3; -5)$

5.5. Расстояние от точки $M(1; 1; 1)$ до плоскости $2x - 2y + z - 6 = 0$ равно...

1)	2)	3)	4)
5	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$	3

5.6. Направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(1; -3; 0)$	$(2; -1; 4)$	$(-2; 1; -4)$	$(1; 3; 0)$

5.7. Прямая перпендикулярна плоскости тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$(\vec{n}, \vec{s}) = 0$	векторы $\vec{n}$ и $\vec{s}$ коллинеарны	$ \vec{n} = \vec{s} $	$D = 0$

5.8. Уравнение окружности с центром $C(3; -2)$ и радиусом 5 имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$(x-3)^2 + (y+2)^2$	$(x+3)^2 + (y-2)^2$	$(x-3)^2 + (y+2)^2$	$(x-3)^2 - (y+2)^2$
= 25	= 25	= 5	= 25

5.9. Эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ равен...

1)	2)	3)	4)
0,6	0,8	1,25	4

5.10. В пространстве уравнение $x^2 + y^2 = 4$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
окружность	круговой цилиндр	сферу	конус

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

5.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 4)$ и $B(3; 0)$.

5.12. Найти расстояние от точки $M(-2; 3)$ до прямой $5x - 12y + 2 = 0$.

5.13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -2)$ параллельно прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

5.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -2)$ перпендикулярно прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

5.15. Найти точку пересечения прямых $3x - y - 7 = 0$ и $x + 2y - 7 = 0$.

5.16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; -1; 3)$.

5.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

5.18. Найти расстояние от точки $M(3; 1; -2)$ до плоскости $2x - y + 2z - 7 = 0$.

5.19. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(4; 3; -1)$.

5.20. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ с плоскостью $x + 2y - z + 4 = 0$.

5.21. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

5.22. Привести уравнение $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ к каноническому виду и определить вид кривой.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: единый векторный подход применён к прямой на плоскости, плоскости и прямой в пространстве; систематизированы канонические уравнения кривых и поверхностей второго порядка.

Домашнее задание: сборник задач, часть 3, § 7 «Прямая на плоскости», § 8 «Плоскость в пространстве», § 9 «Прямая в пространстве», § 11 «Кривые второго порядка», § 12 «Поверхности второго порядка».

Ответы к занятию 5

Тестовые задания: 5.1 — 1; 5.2 — 2; 5.3 — 2; 5.4 — 1; 5.5 — 2; 5.6 — 2; 5.7 — 2; 5.8 — 1; 5.9 — 2; 5.10 — 2.

Классические задания.

5.11. $x + y - 3 = 0$. 5.12. $d = \frac{44}{13}$. 5.13. $2x + 3y + 4 = 0$. 5.14. $3x - 2y - 7 = 0$.

5.15. $(3; 2)$. 5.16. $2x - y + 3z + 4 = 0$. 5.17. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1$, или $6x - 4y + 3z - 12 = 0$.

5.18. $d = \frac{|6-1-4-7|}{3} = 2$. 5.19. $\vec{s} = (1; 2; -2)$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$.

5.20. $(3; -2; 3)$. 5.21. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; центр $C(-2; 3)$, $R = 4$.

5.22. $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ — эллипс с центром $C(1; -2)$, $a = 3$, $b = 2$.

Раздел 4. Предел функции

Занятие 6. Предел функции. Раскрытие неопределённостей. Замечательные пределы. Непрерывность

Раздел: предел функции. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- обучающая:* сформировать умение находить область определения функции, раскрывать неопределённости вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ и 1^∞ , применять замечательные пределы и эквивалентные бесконечно малые, исследовать функцию на непрерывность и находить асимптоты;
- развивающая:* развивать умение распознавать тип неопределённости и выбирать соответствующий приём;
- воспитательная:* воспитывать внимательность при алгебраических преобразованиях.

В результате занятия студент должен

знать: определение области определения и предела функции, виды неопределённостей и приёмы их раскрытия, оба замечательных предела и их следствия, таблицу эквивалентных бесконечно малых, определение непрерывности, классификацию точек разрыва, формулы асимптот;

уметь: находить область определения, вычислять пределы всех основных типов, определять точки разрыва и их тип, находить асимптоты графика.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, § 1–§ 5, § 11–§ 13), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин

Этап	Содержание этапа	Время
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какие ограничения накладывают дробь, корень чётной степени, логарифм?
2. Что означает запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
3. Какие выражения называются неопределённостями?
4. Сформулируйте первый и второй замечательные пределы.
5. Какая функция называется непрерывной в точке?
6. Как найти вертикальную асимптоту графика?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Область определения. Знаменатель дроби отличен от нуля; подкоренное выражение корня чётной степени неотрицательно; аргумент логарифма положителен.

Приёмы раскрытия неопределённостей.

1. $\frac{0}{0}$ для рациональной дроби — разложить числитель и знаменатель на множители и сократить на $(x - a)$.
2. $\frac{\infty}{\infty}$ для отношения многочленов — разделить на старшую степень; при этом

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

3. Иррациональности и неопределённость $\infty - \infty$ — умножить и разделить на сопряжённое выражение.

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Второй замечательный предел раскрывает неопределённость 1^∞ ; практическая схема: если $\lim u = 1$ и $\lim v = \infty$, то $\lim u^v = \exp(\lim v(u - 1))$.

Эквивалентные бесконечно малые при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1 + x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

В произведении и частном бесконечно малые можно заменять эквивалентными; в сумме такая замена, вообще говоря, недопустима.

Непрерывность. Функция непрерывна в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Точки разрыва: **устранимый** (односторонние пределы конечны и равны, но не равны значению функции), **первого рода** (конечны, но различны; разность — величина скачка), **второго рода** (хотя бы один односторонний предел бесконечен или не существует).

Асимптоты. Прямая $x = a$ — вертикальная асимптота, если хотя бы один односторонний предел в точке a бесконечен. Прямая $y = b$ — горизонтальная, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Прямая $y = kx + b$ — наклонная, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 3}$.

Решение. Одновременно $x^2 - 4 \geq 0$ и $x \neq 3$:

$$D(y) = (-\infty; -2] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty).$$

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Неопределённость $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{4}{1} = 4.$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x^2 , получаем $\frac{3}{5}$.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$.

Решение. Умножаем на сопряжённое:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)} = \frac{1}{4}.$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

Решение. Неопределённость $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3}{2}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

Решение. В первом случае $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}$. Во втором случае $1 - \cos 4x \sim 8x^2$, поэтому предел равен 8.

Пример 7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Решение. Полагая $x = 3u$, получаем

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{6u} = e^6.$$

Пример 8. Исследовать на непрерывность функции $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ и $y = \frac{1}{x-2}$.

Решение. В первом случае $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$ — устранимый разрыв, функция доопределяется значением $f(1) = 2$.

Во втором случае односторонние пределы в точке $x = 2$ равны $-\infty$ и $+\infty$ — разрыв второго рода, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Пример 9. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение. Вертикальная асимптота $x = 1$. Далее

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

следовательно, наклонная асимптота $y = x + 1$.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

6.1. Область определения функции $y = \sqrt{x-2}$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$x > 2$	$x \geq 2$	$x \leq 2$	$x \neq 2$

6.2. Предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	2	4	∞

6.3. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	2	-3	∞

6.4. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^2+2}$ равен...

1)	2)	3)	4)
3	$\frac{1}{2}$	0	∞

6.5. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	7	$\frac{1}{7}$	0

6.6. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{2}$	1	2	4

6.7. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
e	e^3	$3e$	1

6.8. При $x \rightarrow 0$ бесконечно малая $1 - \cos x$ эквивалентна...

1)	2)	3)	4)
x	x^2	$\frac{x^2}{2}$	$2x^2$

6.9. Точка $x = 2$ для функции $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ является точкой...

1)	2)	3)	4)
устраняемого разрыва	разрыва первого рода со скачком	разрыва второго рода	непрерывности

6.10. Горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{2x+1}{x-1}$ является прямая...

1)	2)	3)	4)
$y = 1$	$y = 2$	$y = -1$	$y = 0$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

6.11. Найти область определения функции $y = \frac{x+1}{x^2-9}$.

6.12. Найти область определения функции $y = \ln(x-4)$.

6.13. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

6.14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-x+2}{2x^3+5x^2}$.

6.15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$.

6.16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

6.17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$.

6.18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{2x}$.

6.19. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$.

6.20. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x$.

6.21. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$.

6.22. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)}$, определить их тип и указать вертикальные асимптоты.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: освоена классификация неопределённостей и приёмы их раскрытия, введены замечательные пределы, эквивалентные бесконечно малые, точки разрыва и асимптоты.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, § 11 «Область определения и непрерывность функции», § 12 «Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей», § 13 «Первый и второй замечательные пределы».

Ответы к занятию 6

Тестовые задания: 6.1 — 2; 6.2 — 3; 6.3 — 2; 6.4 — 3; 6.5 — 2; 6.6 — 3; 6.7 — 2; 6.8 — 3; 6.9 — 1; 6.10 — 2.

Классические задания.

6.11. $x \neq \pm 3$, то есть $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

6.12. $D(y) = (4; +\infty)$. 6.13. 6. 6.14. 2. 6.15. $\frac{2}{5}$. 6.16. $\frac{1}{4}$.

6.17. $\frac{5}{2}$. 6.18. 2. 6.19. 18. 6.20. e^3 . 6.21. $\frac{3}{2}$.

6.22. $x = 2$ и $x = -5$ — точки разрыва второго рода; прямые $x = 2$ и $x = -5$ — вертикальные асимптоты.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями

Занятие 7. Производная и её приложения. Исследование функции

Раздел: дифференциальное исчисление. Продолжительность: 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по обобщению и систематизации знаний.

Цели занятия:

- обучающая:* отработать технику дифференцирования (таблица, правила, сложная и неявная функции, производные высших порядков) и применение производной: касательная и нормаль, механический смысл, правило Лопиталя, монотонность и экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, полное исследование функции;
- развивающая:* развивать умение объединять частные приёмы в единый алгоритм;

- *воспитательная*: воспитывать самостоятельность и графическую культуру.

В результате занятия студент должен

знать: таблицу производных и правила дифференцирования, правило дифференцирования сложной и неявной функций, уравнения касательной и нормали, механический смысл производных, правило Лопиталя, достаточные признаки монотонности, экстремума и выпуклости, общую схему исследования функции;

уметь: дифференцировать функции всех основных типов, составлять уравнения касательной и нормали, вычислять пределы по правилу Лопиталя, находить экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, проводить полное исследование функции и строить эскиз графика.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, § 6–§ 10, § 14–§ 17), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется производной функции в точке?
2. В чём состоит геометрический смысл производной?
3. Как дифференцируется произведение и частное?
4. В каких случаях применимо правило Лопиталя?
5. Сформулируйте достаточное условие экстремума по первой производной.
6. Что показывает знак второй производной?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Таблица производных:

$$(C)' = 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Правила:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad y'_x = f'(u) \cdot u'_x.$$

Неявная функция: уравнение $F(x, y) = 0$ дифференцируют по x , считая y функцией от x , затем выражают y' . **Производные высших порядков**: $y'' = (y')'$.

Касательная и нормаль в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Механический смысл: $v(t) = s'(t)$, $a(t) = s''(t)$.

Правило Лопиталя. Для неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел справа существует; правило можно применять повторно.

Монотонность и экстремумы. Если $y' > 0$, функция возрастает; если $y' < 0$ — убывает. Критические точки: $y' = 0$ или y' не существует. Смена знака производной с «плюса» на «минус» даёт максимум, с «минуса» на «плюс» — минимум.

Наибольшее и наименьшее значения на отрезке находят сравнением значений функции в критических точках отрезка и на его концах.

Выпуклость и перегиб. При $y'' > 0$ график выпуклый вниз, при $y'' < 0$ — выпуклый вверх; точка смены знака второй производной — точка перегиба.

Общая схема исследования функции: 1) область определения и точки разрыва; 2) чётность и нечётность; 3) точки пересечения с осями; 4) асимптоты; 5) монотонность и экстремумы; 6) выпуклость и точки перегиба; 7) построение графика.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти производные функций: а) $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$; б) $y = x^2 \sin x$; в) $y = \frac{2x-1}{x^2+3}$.

Решение. а) $y' = 12x^3 - 6x^2 + 5$; б) $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$;

$$\text{в) } y' = \frac{2(x^2+3) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2+2x+6}{(x^2+3)^2}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \ln \sin 3x$.

Решение. Дифференцируем «снаружи внутрь»:

$$y' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3 \operatorname{ctg} 3x.$$

Пример 3. Найти y' для неявно заданной функции $x^2 + y^2 - 3xy = 0$.

Решение. $2x + 2yy' - 3y - 3xy' = 0$, откуда

$$y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x}.$$

Пример 4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. $f(2) = 3$, $y' = 3x^2 - 4x$, $f'(2) = 4$. Касательная: $y = 4x - 5$. Нормаль: $y = 3 - \frac{1}{4}(x - 2)$, то есть $x + 4y - 14 = 0$.

Пример 5. Точка движется по закону $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент $t = 2$.

Решение. $v(t) = 3t^2 - 6t + 2$, $a(t) = 6t - 6$; $v(2) = 2$, $a(2) = 6$.

Пример 6. Вычислить по правилу Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 7. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Решение. $y' = 3(x - 3)(x + 1)$. Функция возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на $(-1; 3)$;

$$y_{\max} = y(-1) = 10, \quad y_{\min} = y(3) = -22.$$

Пример 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение. $y' = 3(x - 1)(x + 1)$; критические точки $x = \pm 1$;

$$y(-2) = -2, \quad y(-1) = 2, \quad y(1) = -2, \quad y(3) = 18.$$

Наибольшее значение равно 18, наименьшее равно -2 .

Пример 9. Провести полное исследование функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ и построить её график.

Решение. 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$; 2) функция общего вида; 3) $y(0) = 4$, нули: $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2 = 0$, то есть $x = -1$ и $x = 2$ (двукратный корень); 4) асимптот нет; 5) $y' = 3x(x - 2)$, $y_{\max} = y(0) = 4$, $y_{\min} = y(2) = 0$; 6) $y'' = 6(x - 1)$, точка перегиба $(1; 2)$; 7) кривая поднимается до максимума, опускается до минимума, касаясь оси абсцисс, затем неограниченно возрастает.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

7.1. Производная функции $y = x^5$ равна...

1)	2)	3)	4)
$5x^4$	x^4	$5x^6$	$\frac{x^6}{6}$

7.2. Производная функции $y = \ln x$ равна...

1)	2)	3)	4)
x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln x}$	e^x

7.3. Производная функции $y = e^{3x}$ равна...

1)	2)	3)	4)
e^{3x}	$3e^{3x}$	$3e^x$	$\frac{e^{3x}}{3}$

7.4. Производная функции $y = (2x + 1)^5$ равна...

1)	2)	3)	4)
$5(2x + 1)^4$	$10(2x + 1)^4$	$2(2x + 1)^4$	$10(2x + 1)^6$

7.5. Производная функции $y = x \cos x$ равна...

1)	2)	3)	4)
$-\sin x$	$\cos x - x \sin x$	$\cos x + x \sin x$	$-x \sin x$

7.6. Геометрический смысл производной $f'(x_0)$ состоит в том, что она равна...

1)	2)	3)	4)
ординате точки касания	угловому коэффициенту касательной	площади под графиком	длине дуги

7.7. Уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$y = 2x - 1$	$y = 2x + 1$	$y = x - 1$	$y = x^2 - 1$

7.8. Если на некотором интервале $y' > 0$, то на этом интервале функция...

1)	2)	3)	4)
возрастает	убывает	постоянна	имеет экстремум

7.9. Функция $y = x^3 - 3x$ имеет точку максимума при x , равном...

1)	2)	3)	4)
-1	0	1	3

7.10. Наклонной асимптотой графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ является прямая...

1)	2)	3)	4)
$y = x$	$y = x + 1$	$y = x - 1$	$y = 2x$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

7.11. Найти производную $y = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 9$.

7.12. Найти производную $y = x^3 \ln x$.

7.13. Найти производную $y = \frac{3x-2}{x+4}$.

7.14. Найти производную $y = \ln(x^2 + 1)$.

7.15. Найти производную $y = e^{-2x} \cos 3x$.

7.16. Найти y' для неявно заданной функции $x^2 + y^2 = 25$.

7.17. Найти y'' , если $y = x^3 - 4x^2 + 5x$.

7.18. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 3x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

7.19. Точка движется по закону $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t$. Найти скорость и ускорение в момент $t = 1$.

7.20. Вычислить по правилу Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

7.21. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

7.22. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 4]$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: техника дифференцирования сведена воедино с приложениями производной; отработан алгоритм полного исследования функции.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, § 14 «Дифференцирование функции одной переменной», § 15 «Приложения производной», § 16 «Исследование функций и построение графиков», § 17 «Задачи на наибольшее и наименьшее значения»; подготовиться к итоговой контрольной работе.

Ответы к занятию 7

Тестовые задания: 7.1 — 1; 7.2 — 2; 7.3 — 2; 7.4 — 2; 7.5 — 2; 7.6 — 2; 7.7 — 1; 7.8 — 1; 7.9 — 1; 7.10 — 2.

Классические задания.

7.11. $y' = 12x^2 - 10x + 2$. 7.12. $y' = 3x^2 \ln x + x^2$. 7.13. $y' = \frac{14}{(x+4)^2}$.

7.14. $y' = \frac{2x}{x^2+1}$. 7.15. $y' = -e^{-2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$.

7.16. $2x + 2yy' = 0$, откуда $y' = -\frac{x}{y}$. 7.17. $y' = 3x^2 - 8x + 5$, $y'' = 6x - 8$.

7.18. $f(2) = 0$, $f'(2) = 1$; касательная $y = x - 2$.

7.19. $v(t) = 6t^2 - 10t + 3$, $v(1) = -1$; $a(t) = 12t - 10$, $a(1) = 2$.

7.20. $\frac{1}{2}$.

7.21. $y' = 3(x - 1)(x - 3)$; функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на $(1; 3)$; $y_{\max} = y(1) = 4$, $y_{\min} = y(3) = 0$.

7.22. Критические точки $x = 0$ и $x = 2$; $y(-1) = -4$, $y(0) = 0$, $y(2) = -4$, $y(4) = 16$. Наибольшее значение 16, наименьшее -4 .