

Поурочные разработки практических занятий по высшей математике

Разделы: линейная алгебра, векторная алгебра с приложениями, аналитическая геометрия, предел функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями

Объём: 11 практических занятий по 90 минут (2 академических часа)

Дидактическая база: сборник задач по высшей математике (части 1–4)

Пояснительная записка

Настоящие поурочные разработки составлены на основе сборника задач по высшей математике и предназначены для проведения практических занятий со студентами первого курса. Разработки рассчитаны на расширенный вариант курса: 11 занятий по 90 минут, то есть 22 академических часа. По сравнению со сжатым (семизанятийным) вариантом здесь подробнее развёрнуты линейная алгебра, аналитическая геометрия и дифференциальное исчисление: каждому крупному приёму отведено отдельное занятие, что позволяет увеличить долю самостоятельной работы и снизить плотность теоретического конспекта.

Распределение учебного времени по разделам:

Раздел	Количество занятий	Номера занятий
Линейная алгебра	3	1–3
Векторная алгебра с приложениями	2	4–5
Аналитическая геометрия	3	6–8
Предел и непрерывность функции	2	9–10
Дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями	1	11
Итого	11	1–11

Каждое занятие построено по единой методической схеме и включает:

1. организационный момент и актуализацию опорных знаний (устный фронтальный опрос) — 5 минут;
2. опорный теоретический материал (конспект формул и алгоритмов) — 15 минут;
3. разбор типовых задач у доски с подробными решениями — 30 минут;
4. тестовый контроль (10 закрытых заданий с выбором одного верного ответа из четырёх) — 15 минут;
5. самостоятельную работу — 12 классических заданий — 20 минут;
6. подведение итогов и выдачу домашнего задания — 5 минут.

Внутри каждого занятия принята сквозная нумерация заданий: задания с номерами от 1 до 10 — тестовые, с номерами от 11 до 22 — классические. Ответы ко всем заданиям помещены в конце соответствующего занятия, что позволяет использовать разработки и для аудиторной работы преподавателя, и для самоподготовки студентов.

В конце каждого занятия указаны конкретные параграфы и номера задач сборника, выносимые на домашнюю работу.

Формы контроля: текущий (устный опрос, проверка самостоятельной работы), тематический (тестирование в конце каждого занятия), рубежный (типовые варианты контрольных работ из сборника после занятий 3, 5, 8 и 11).

Критерии оценивания тестового блока: 9–10 верных ответов из 10 — «отлично»; 7–8 — «хорошо»; 6 — «удовлетворительно»; менее 6 — «неудовлетворительно».

Тематический план

№	Тема практического занятия	Часы
1	Матрицы и действия над ними. Определители	2
2	Обратная матрица. Ранг матрицы. Матричные уравнения	2
3	Системы линейных алгебраических уравнений	2
4	Векторы. Линейные операции. Скалярное произведение и его приложения	2
5	Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения	2
6	Прямая на плоскости	2
7	Плоскость и прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости	2
8	Кривые и поверхности второго порядка	2
9	Область определения функции. Предел функции. Раскрытие неопределённостей	2
10	Замечательные пределы. Непрерывность функции. Точки разрыва	2
11	Производная и её приложения. Исследование функции	2

Раздел 1. Линейная алгебра

Занятие 1. Матрицы и действия над ними. Определители

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию первичных умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение выполнять линейные операции над матрицами и их умножение, вычислять определители второго и третьего порядков разными способами;
- *развивающая:* развивать вычислительную культуру, внимание, умение выбирать рациональный способ вычисления;
- *воспитательная:* воспитывать аккуратность в оформлении записей и привычку проверять результат.

В результате занятия студент должен

знать: определение матрицы и виды матриц, правила линейных операций и умножения матриц, условие согласованности размеров, определение определителя второго и третьего порядков, правило треугольников, понятия минора и алгебраического дополнения, свойства определителей;

уметь: складывать матрицы и умножать их на число, перемножать матрицы, транспонировать, вычислять определители второго и третьего порядков правилом треугольников и разложением по строке или столбцу, применять свойства определителей для упрощения вычислений.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, разделы I–II), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется матрицей размера $m \times n$?
2. При каком условии определена сумма матриц? произведение матриц?
3. Верно ли, что $AB = BA$ для любых квадратных матриц?
4. Для каких матриц определён определитель?
5. Чем алгебраическое дополнение отличается от минора?
6. Как изменится определитель, если поменять местами две его строки?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Линейные операции. Для матриц одинакового размера

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Умножение матриц. Если A имеет размер $m \times n$, а B — размер $n \times p$, то $C = AB$ имеет размер $m \times p$ и

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

(правило «строка на столбец»). Умножение некоммутативно: в общем случае $AB \neq BA$.

Транспонирование: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$, причём $(AB)^T = B^T A^T$.

Определители второго и третьего порядков:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

(правило треугольников).

Минор и алгебраическое дополнение. Минор M_{ij} — определитель, полученный вычёркиванием i -й строки и j -го столбца; алгебраическое дополнение

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Разложение определителя по i -й строке:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}.$$

Свойства определителя. Определитель не меняется при транспонировании; меняет знак при перестановке двух строк; равен нулю, если строка нулевая или две строки пропорциональны; общий множитель строки выносится за знак определителя; определитель не меняется, если к строке прибавить другую строку, умноженную на число. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Вычислить $2A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 8 & -2 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 15 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 15 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение AB , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Размеры согласованы: $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3)$, произведение имеет размер 3×3 .

$$c_{11} = 2 - 3 = -1, \quad c_{12} = 4 + 0 = 4, \quad c_{13} = -2 - 2 = -4;$$

$$c_{21} = 0 + 9 = 9, \quad c_{22} = 0, \quad c_{23} = 0 + 6 = 6; \quad c_{31} = 4 + 3 = 7, \quad c_{32} = 8, \quad c_{33} = -4 + 2 = -2;$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 9 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Убедиться, что умножение матриц некоммутативно, на примере $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad AB \neq BA.$$

Пример 4. Вычислить определитель двумя способами: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. Способ 1 (правило треугольников):

$$\Delta = 60 + 4 + 0 - 8 + 3 - 0 = 59.$$

Способ 2 (разложение по первому столбцу, в котором есть нуль):

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 21 + 2 \cdot (-2) = 59.$$

Разложение выгоднее выбирать по строке или столбцу с наибольшим числом нулей.

Пример 5. Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ разложением по первой строке.

Решение.

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 20 - 3 \cdot 6 = 22.$$

Пример 6. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Разложим по третьему столбцу:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 3(4 - x^2) = 0.$$

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Пример 7. Не раскрывая определитель, показать, что $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Вторая строка получается из первой умножением на 2, то есть строки пропорциональны. По свойству определителя такой определитель равен нулю.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $A + B$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

1.2. Матрица A имеет размер 4×3 , матрица B — размер 3×5 . Тогда произведение AB имеет размер...

1)	2)	3)	4)
4×5	3×3	5×4	произведение не определено

1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда AB равно...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

1.4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ матрица A^2 равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1.5. Определитель $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
23	-7	-23	7

1.6. Корни уравнения $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$ равны...

1)	2)	3)	4)
3 и -2	-3 и 2	1 и 6	уравнение корней не имеет

1.7. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
-5	5	0	-20

1.8. Алгебраическое дополнение A_{32} элемента определителя третьего порядка равно...

1)	2)	3)	4)
M_{32}	$-M_{32}$	M_{23}	$-M_{23}$

1.9. Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю, то определитель...

1)	2)	3)	4)
равен единице	не существует	равен сумме остальных строк	равен нулю

1.10. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ равен...

1) 2) 3) 4)
18 -2 -18 22

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

1.11. Найти сумму $A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.12. Вычислить $3A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

1.13. Найти произведение AB , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.14. Вычислить A^2 , если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.15. Найти транспонированную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.16. Найти AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, и сравнить результаты.

1.17. Вычислить $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.18. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

1.19. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ разложением по второй строке.

1.20. При каких значениях λ определитель $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 12 & \lambda \end{vmatrix}$ равен нулю?

1.21. Не раскрывая определитель, доказать, что $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

1.22. Вычислить определитель четвёртого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны линейные операции над матрицами и умножение «строка на столбец», два способа вычисления определителя третьего порядка и приёмы упрощения определителя с помощью его свойств.

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел I «Действия над матрицами» — задачи 1–20; раздел II «Определители» — задачи 33–44.

Ответы к занятию 1

Тестовые задания: 1.1 — 2; 1.2 — 1; 1.3 — 4; 1.4 — 2; 1.5 — 3; 1.6 — 1; 1.7 — 1; 1.8 — 2; 1.9 — 4; 1.10 — 3.

Классические задания.

1.11. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. **1.12.** $\begin{pmatrix} 8 & -4 & -9 \\ 3 & -19 & 16 \end{pmatrix}$. **1.13.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$.

1.14. $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. **1.15.** $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. **1.16.** $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$.

1.17. 26. **1.18.** 44. **1.19.** 52. **1.20.** $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 6$.

1.21. Вторая строка равна первой, умноженной на 2, поэтому определитель равен нулю. **1.22.** -30.

Занятие 2. Обратная матрица. Ранг матрицы. Матричные уравнения

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение находить обратную матрицу и ранг матрицы, решать простейшие матричные уравнения;
- *развивающая:* развивать алгоритмическое мышление, умение выполнять и оформлять проверку полученного результата;
- *воспитательная:* воспитывать настойчивость и самоконтроль при громоздких вычислениях.

В результате занятия студент должен

знать: определение обратной матрицы, критерий её существования, формулу через присоединённую матрицу, свойства обратной матрицы, определение ранга и метод элементарных преобразований, вид решения матричных уравнений $AX = B$, $XA = B$, $AXB = C$;

уметь: находить обратную матрицу второго и третьего порядков и выполнять проверку, вычислять ранг методом элементарных преобразований, решать матричные уравнения.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, разделы III–IV), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какая матрица называется единичной? невырожденной?
2. При каком условии существует обратная матрица?
3. Как проверить, что найденная матрица действительно обратная?
4. Что называется рангом матрицы?
5. Какие преобразования матрицы не меняют её ранга?
6. Чем отличаются уравнения $AX = B$ и $XA = B$?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Обратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$, и вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} (обратите внимание: дополнения записываются **по столбцам**).

Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Свойства:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Ранг матрицы — наибольший порядок отличного от нуля минора; равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной элементарными преобразованиями. Элементарные преобразования: перестановка строк (столбцов), умножение строки на число, отличное от нуля, прибавление к строке другой строки, умноженной на число, отбрасывание нулевой строки.

Матричные уравнения. Если $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$, то

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; \quad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}; \quad AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Порядок сомножителей менять нельзя.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и выполнить проверку.

Решение. $\det A = 6 - 5 = 1 \neq 0$, поэтому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 2. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = 2(-1 - 0) - 1(1 - 6) + 0 = -2 + 5 = 3 \neq 0$. Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = 5, \quad A_{13} = 3; \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = 3; \quad A_{31} = 2, \quad A_{32} = -4, \quad A_{33} = -3.$$

Записывая их по столбцам, получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $AA^{-1} = E$.

Пример 3. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Вторая строка вдвое больше первой, поэтому её отбрасываем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся строки не пропорциональны, а минор $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Значит, ранг равен 2.

Пример 4. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычитаем из второй строки удвоенную первую, из третьей — утроенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rang} A = 2.$$

Пример 5. Решить матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Из примера 1 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = B$.

Пример 6. Решить уравнение $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = 5$, $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, откуда

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. При каком значении λ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix}$ равен единице?

Решение. Ранг равен единице, когда определитель равен нулю и матрица ненулевая: $\lambda - 6 = 0$, то есть $\lambda = 6$. При $\lambda \neq 6$ ранг равен двум.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

2.1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ обратная матрица равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.2. Для невырожденных матриц A и B верно равенство...

1)	2)	3)	4)
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$	$(AB)^{-1} = AB$	$(AB)^{-1} = A^{-1}B$

2.3. Если $\det A \neq 0$, то $\det(A^{-1})$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\det A$	$\frac{1}{\det A}$	$-\det A$	0

2.4. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	2	3	0

2.5. Ранг единичной матрицы пятого порядка равен...

1)	2)	3)	4)
1	0	25	5

2.6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ обратная матрица...

1)	2)	3)	4)
равна $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	не существует, так как $\det A = 0$	равна $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	существует при любых элементах

2.7. Решение уравнения $AX = B$ при $\det A \neq 0$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$X = A^{-1}B$	$X = BA^{-1}$	$X = A^{-1}B^{-1}$	$X = BA$

2.8. Решение уравнения $XA = B$ при $\det A \neq 0$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$X = A^{-1}B$	$X = AB^{-1}$	$X = BA^{-1}$	$X = AB$

2.9. Ранг нулевой матрицы размера 3×4 равен...

1)	2)	3)	4)
1	0	3	4

2.10. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	3	0	2

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

2.11. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.12. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

2.13. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.14. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.15. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.16. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

2.17. При каком значении λ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & \lambda \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ равен единице?

2.18. Решить уравнение $AX = B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.19. Решить уравнение $XA = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.20. Решить уравнение $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.21. Найти матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

2.22. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны алгоритм построения обратной матрицы через алгебраические дополнения с обязательной проверкой, метод элементарных преобразований для вычисления ранга и три схемы решения матричных уравнений.

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел III «Обратные матрицы и ранг» — задачи 49–68; раздел IV «Матричные уравнения» — задачи 69–80.

Ответы к занятию 2

Тестовые задания: 2.1 — 3; 2.2 — 1; 2.3 — 2; 2.4 — 1; 2.5 — 4; 2.6 — 2; 2.7 — 1; 2.8 — 3; 2.9 — 2; 2.10 — 4.

Классические задания.

2.11. $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. 2.12. $\det A = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2.13. $\det A = -27$, $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 2.14. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.15. 2. 2.16. 2. 2.17. $\lambda = 2$.

2.18. $X = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. **2.19.** $X = \begin{pmatrix} 18 & -5 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}$. **2.20.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.21. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **2.22.** 2.

Занятие 3. Системы линейных алгебраических уравнений

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по обобщению и систематизации знаний.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение решать системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса, исследовать систему на совместность;
- *развивающая:* развивать умение выбирать рациональный метод решения и анализировать полученный результат;
- *воспитательная:* воспитывать ответственность за точность вычислений и культуру записи.

В результате занятия студент должен

знать: формулы Крамера, матричную форму записи системы, схему метода Гаусса, теорему Кронекера — Капелли, условия существования ненулевых решений однородной системы;

уметь: решать системы тремя методами, исследовать систему на совместность и определённую, находить общее решение и фундаментальную систему решений.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, раздел V), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется решением системы линейных уравнений?
2. Какая система называется совместной? определённой?
3. Когда применимы формулы Крамера?
4. Как записать систему в матричной форме?
5. Что утверждает теорема Кронекера — Капелли?
6. Может ли однородная система быть несовместной?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Матричная форма записи. Система m уравнений с n неизвестными записывается как $AX = B$, где A — матрица коэффициентов, X — столбец неизвестных, B — столбец свободных членов. Матрица $\bar{A} = (A | B)$ называется расширенной.

Метод Крамера. Если число уравнений равно числу неизвестных и $\Delta = \det A \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ_k получается из Δ заменой k -го столбца столбцом свободных членов.

Матричный метод. Если $\det A \neq 0$, то $X = A^{-1}B$.

Метод Гаусса. Расширенная матрица элементарными преобразованиями строк приводится к ступенчатому виду, после чего неизвестные находятся обратным ходом. Метод применим к любой системе, в том числе при $m \neq n$.

Теорема Кронекера — Капелли. Система совместна тогда и только тогда, когда

$$\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}.$$

При этом если $\text{rang} A = n$, решение единственно; если $\text{rang} A = r < n$, система имеет бесконечно много решений, причём $n - r$ неизвестных объявляются свободными.

Однородные системы $AX = 0$ всегда совместны (нулевое решение). Квадратная однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $\det A = 0$. Совокупность $n - r$ линейно независимых решений называется фундаментальной системой решений.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Решить методом Крамера систему

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -10.$$

$$x = \frac{-10}{-10} = 1, \quad y = \frac{-20}{-10} = 2, \quad z = \frac{-10}{-10} = 1.$$

Ответ: (1; 2; 1).

Пример 2. Решить матричным методом систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1, y = 2$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

Решение. Приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 2 < 3$, значит, система имеет бесконечно много решений. Полагая $z = t$, получаем $y = 2 + t$, $x = 5 - 2y + z = 1 - t$.

Ответ: $x = 1 - t$, $y = 2 + t$, $z = t$, где t — произвольное число.

Пример 4. Исследовать на совместность и решить систему

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ 2x - 2y + 4z = 5. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из второго уравнения удвоенное первое, получаем $0 = 3$ — противоречие. Здесь $\text{rang} A = 1$, а $\text{rang} \bar{A} = 2$.

Ответ: система несовместна.

Пример 5. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Решение. $\det A = 0$, поэтому ненулевые решения существуют. Приводим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $z = t$, получаем $y = t$, $x = -2y + z = -t$.

Ответ: $(-t; t; t)$; фундаментальная система решений состоит из одного вектора $(-1; 1; 1)$.

Пример 6. При каких значениях λ система $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + \lambda y = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение. $\Delta = \lambda - 1$. При $\lambda \neq 1$ решение единственно. При $\lambda = 1$ система принимает вид $x + y = 1$, $x + y = 2$ и несовместна.

Ответ: при $\lambda \neq 1$.

Пример 7. Решить систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Складывая уравнения, находим $3x_1 + x_3 = 3$, откуда $x_3 = 3 - 3x_1$. Из второго уравнения $x_2 = -2x_1 + x_3 = 3 - 5x_1$. Полагая $x_1 = t$, получаем общее решение.

Ответ: $(t; 3 - 5t; 3 - 3t)$.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

3.1. По формулам Крамера неизвестное x_1 находится как...

1)	2)	3)	4)
$\Delta \cdot \Delta_1$	$\frac{\Delta}{\Delta_1}$	$\frac{\Delta_1}{\Delta}$	$\Delta - \Delta_1$

3.2. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$\det A \neq 0$	$\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}$	$\text{rang} A < \text{rang} \bar{A}$	число уравнений равно числу неизвестных

3.3. Если в квадратной системе $\Delta \neq 0$, то она...

1)	2)	3)	4)
несовместна	имеет бесконечно много решений	не имеет решений	имеет единственное решение

3.4. Однородная система линейных уравнений...

1)	2)	3)	4)
всегда совместна	может быть несовместной	всегда определённа	не имеет нулевого решения

3.5. Квадратная однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$\det A > 0$	$\det A \neq 0$	$\det A = 0$	$\text{rang} A = n$

3.6. Решением системы $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$ является пара...

1)	2)	3)	4)
(1; 3)	(2; 1)	(3; -1)	(2; -1)

3.7. Главный определитель системы $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + 4y = 5 \end{cases}$ равен...

1)	2)	3)	4)
10	14	-14	12

3.8. Для системы трёх уравнений с тремя неизвестными $\text{rang} A = 2$, $\text{rang} \bar{A} = 3$. Тогда система...

1)	2)	3)	4)
имеет единственное решение	несовместна	имеет бесконечно много решений	имеет ровно два решения

3.9. Для системы с четырьмя неизвестными $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 2$. Число свободных неизвестных равно...

1)	2)	3)	4)
0	1	2	4

3.10. Матричная запись решения системы $AX = B$ при $\det A \neq 0$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$X = BA^{-1}$	$X = AB$	$X = A^{-1}B$	$X = BA$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

3.11. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} 5x - 2y = 4, \\ 3x + y = 9. \end{cases}$

3.12. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ x + 2y - z = -3. \end{cases}$

3.13. Решить матричным методом систему $\begin{cases} 4x + 3y = 11, \\ x + y = 3. \end{cases}$

3.14. Решить методом Гаусса систему $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - y + z = 9, \\ x + 2y - z = -1. \end{cases}$

3.15. Решить методом Гаусса систему $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + 4y - 2z = 2, \\ x - y + 2z = 4. \end{cases}$

3.16. Исследовать на совместность систему $\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ 2x - 2y + 4z = 5. \end{cases}$

3.17. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0, \\ 3x = 0. \end{cases}$$

3.18. При каких значениях a система $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

3.19. Исследовать на совместность систему $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$

3.20. Найти общее решение системы $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 4. \end{cases}$

3.21. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

3.22. Найти фундаментальную систему решений уравнения $x + 2y - z = 0$, рассматриваемого как однородная система.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны три метода решения систем и общая схема исследования системы по теореме Кронекера — Капелли; показано, что метод Гаусса универсален, а формулы Крамера и матричный метод применимы лишь при $\det A \neq 0$.

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел V «Системы линейных алгебраических уравнений» — задачи 85–109; раздел VI — тестовые задания 110–125. Подготовиться к контрольной работе по линейной алгебре.

Ответы к занятию 3

Тестовые задания: 3.1 — 3; 3.2 — 2; 3.3 — 4; 3.4 — 1; 3.5 — 3; 3.6 — 2; 3.7 — 2; 3.8 — 2; 3.9 — 3; 3.10 — 3.

Классические задания.

3.11. $x = 2, y = 3$. **3.12.** $x = 1, y = -1, z = 2$. **3.13.** $x = 2, y = 1$. **3.14.** $x = 3, y = -1, z = 2$.

3.15. $x = 3 - t, y = t - 1, z = t$. **3.16.** Система несовместна: $\text{rang} A = 1, \text{rang} \bar{A} = 2$.

3.17. $x = 0, y = t, z = t$; фундаментальная система решений: $(0; 1; 1)$. **3.18.** $a \neq 4$.

3.19. Система несовместна. **3.20.** $x = 2 - t, y = t$.

3.21. $x_1 = 1 + \frac{t}{3}, x_2 = -2 + \frac{5t}{3}, x_3 = t$. **3.22.** Например, $(-2; 1; 0)$ и $(1; 0; 1)$.

Раздел 2. Векторная алгебра с приложениями

Занятие 4. Векторы. Линейные операции. Скалярное произведение и его приложения

Раздел: векторная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию первичных умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение выполнять линейные операции над векторами в координатной форме, вычислять скалярное произведение и применять его к нахождению углов, проекций и работы силы;
- *развивающая:* развивать пространственное воображение и умение переводить геометрическое условие на язык координат;
- *воспитательная:* воспитывать аккуратность в записи координат и внимательность к знакам.

В результате занятия студент должен

знать: определение вектора и его координат, формулы длины вектора и направляющих косинусов, правила линейных операций, условия коллинеарности и перпендикулярности, определение и свойства скалярного произведения, формулы угла между векторами и проекции;

уметь: находить координаты и длину вектора по координатам точек, выполнять линейные операции, вычислять скалярное произведение двумя способами, находить угол между векторами, проекцию вектора на вектор и работу постоянной силы.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 2, разделы I–II), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется вектором? Какие векторы называются равными?
2. Как найти координаты вектора по координатам его начала и конца?
3. Чему равна длина вектора, заданного координатами?
4. Как связаны коллинеарность векторов и пропорциональность их координат?
5. Какие два определения скалярного произведения вы знаете?
6. Каков геометрический смысл равенства $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Координаты вектора. Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Линейные операции. Для $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Условие коллинеарности: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, то есть

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

Деление отрезка в отношении λ : если $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = \lambda$, то

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$$

(аналогично для остальных координат); при $\lambda = 1$ получаются координаты середины отрезка.

Скалярное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Приложение в механике: работа постоянной силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении $\vec{S}$ равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Даны точки $A(2; -1; 3)$ и $B(-1; 4; 5)$. Найти $\overrightarrow{AB}$ и его длину.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 5; 2), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}.$$

Пример 2. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (2; -3; 6)$.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, поэтому

$$\cos \alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos \beta = -\frac{3}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{6}{7}.$$

Проверка: $\frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1$.

Пример 3. Найти скалярное произведение и угол между векторами $\vec{a} = (1; -2; 2)$ и $\vec{b} = (3; 0; -4)$.

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 0 - 8 = -5, \quad |\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \cos \varphi = \frac{-5}{15} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ — угол тупой.

Пример 4. Для тех же векторов найти проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

Решение.

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-5}{5} = -1.$$

Отрицательный знак означает, что проекция направлена противоположно вектору $\vec{b}$.

Пример 5. При каком значении λ векторы $\vec{a} = (\lambda; 2; -1)$ и $\vec{b} = (3; -1; 4)$ перпендикулярны?

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\lambda - 2 - 4 = 0$, откуда $\lambda = 2$.

Пример 6. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\vec{a} = (2; -4; 6)$ и $\vec{b} = (-1; 2; -3)$.

Решение. Координаты пропорциональны: $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$. Векторы коллинеарны и противоположно направлены.

Пример 7. Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, а угол между векторами равен 60° .

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$, поэтому

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 + 12 + 16 = 37, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}.$$

Пример 8. Найти работу силы $\vec{F} = (2; -1; 3)$ при перемещении точки приложения из $M(1; 2; 0)$ в $N(3; 1; 2)$.

Решение. $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (2; -1; 2)$, поэтому $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 4 + 1 + 6 = 11$.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

4.1. Даны точки $A(1; -2; 3)$ и $B(4; 0; -1)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны...

1)	2)	3)	4)
$(-3; -2; 4)$	$(5; -2; 2)$	$(3; 2; -4)$	$(3; -2; -4)$

4.2. Длина вектора $\vec{a} = (1; -2; 2)$ равна...

1)	2)	3)	4)
3	9	5	7

4.3. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2; -1; 3)$ и $\vec{b} = (1; 4; -2)$ равно...

1)	2)	3)	4)
8	-2	2	-8

4.4. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$\vec{a} = \lambda \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$ \vec{a} = \vec{b} $	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

4.5. Ненулевые векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
их координаты пропорциональны	их скалярное произведение равно нулю	их длины равны	сумма их координат равна нулю

4.6. Косинус угла между ненулевыми векторами вычисляется по формуле...

1)	2)	3)	4)
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\frac{ \vec{a} \vec{b} }{\vec{a} \cdot \vec{b}}$	$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$	$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} }$

4.7. Если $\vec{a} = (1; 0; -2)$ и $\vec{b} = (3; -1; 1)$, то $2\vec{a} - \vec{b}$ равен...

1)	2)	3)	4)
(1; 1; -5)	(-1; 1; -5)	(-1; -1; -3)	(5; -1; -3)

4.8. Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} }$	$ \vec{a} \cos\varphi$	$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} }$

4.9. Угол между векторами $\vec{i} = (1; 0; 0)$ и $\vec{j} = (0; 1; 0)$ равен...

1)	2)	3)	4)
90°	0°	45°	180°

4.10. Векторы $\vec{a} = (\lambda; 2; -1)$ и $\vec{b} = (3; -1; 4)$ перпендикулярны при λ , равном...

1)	2)	3)	4)
-2	2	3	0

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

4.11. Даны точки $A(2; -1; 3)$ и $B(-1; 4; 5)$. Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

4.12. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (2; -3; 6)$.

4.13. Найти скалярное произведение и косинус угла между векторами $\vec{a} = (1; -2; 2)$ и $\vec{b} = (3; 0; -4)$.

4.14. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (1; -2; 2)$ на вектор $\vec{b} = (3; 0; -4)$.

- 4.15. При каком значении m векторы $\vec{a} = (m; -3; 1)$ и $\vec{b} = (1; 2; 3)$ перпендикулярны?
- 4.16. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\vec{a} = (2; -4; 6)$ и $\vec{b} = (-1; 2; -3)$.
- 4.17. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, а угол между векторами равен 60° .
- 4.18. Для условий задания 4.17 найти $|\vec{a} + \vec{b}|$.
- 4.19. Найти координаты середины отрезка AB , если $A(1; -3; 5)$, $B(5; 1; -1)$.
- 4.20. Найти координаты точки M , делящей отрезок AB в отношении $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 1 : 2$, если $A(2; -1; 3)$, $B(-4; 5; 0)$.
- 4.21. Найти работу силы $\vec{F} = (2; -1; 3)$ при перемещении точки приложения из $M(1; 2; 0)$ в $N(3; 1; 2)$.
- 4.22. Даны вершины треугольника $A(1; 0; 2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 1; 1)$. Найти косинус угла при вершине A .

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработан переход от геометрического условия к координатам, вычисление длин и направляющих косинусов, два определения скалярного произведения и его приложения — угол, проекция, работа силы.

Домашнее задание: сборник задач, часть 2, раздел II, § 7 «Линейные операции над векторами» — задачи 7.1–7.14; § 8 «Скалярное произведение» — задачи 8.1–8.16.

Ответы к занятию 4

Тестовые задания: 4.1 — 3; 4.2 — 1; 4.3 — 4; 4.4 — 2; 4.5 — 1; 4.6 — 3; 4.7 — 2; 4.8 — 4; 4.9 — 1; 4.10 — 2.

Классические задания.

4.11. $\vec{AB} = (-3; 5; 2)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{38}$. 4.12. $|\vec{a}| = 7$; $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = -\frac{3}{7}$, $\cos \gamma = \frac{6}{7}$.

4.13. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$, $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$. 4.14. -1 . 4.15. $m = 3$. 4.16. Коллинеарны: $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$.

4.17. 6. 4.18. $\sqrt{37}$. 4.19. $(3; -1; 2)$. 4.20. $M(0; 1; 2)$. 4.21. $A = 11$.

4.22. $\vec{AB} = (2; 2; -2)$, $\vec{AC} = (-1; 1; -1)$, $\cos A = \frac{1}{3}$.

Занятие 5. Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения

Раздел: векторная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение вычислять векторное и смешанное произведения и применять их к вычислению площадей, объёмов, момента силы и к проверке компланарности;
- *развивающая:* развивать умение связывать алгебраическую формулу с её геометрическим смыслом;
- *воспитательная:* воспитывать внимательность при раскрытии определителей и аккуратность в оформлении.

В результате занятия студент должен

знать: определение векторного произведения, его выражение через определитель, геометрический и механический смысл; определение смешанного произведения, его выражение через определитель, условие компланарности, формулы объёмов параллелепипеда и тетраэдра;

уметь: вычислять векторное и смешанное произведения, находить площадь параллелограмма и треугольника, объём параллелепипеда и тетраэдра, момент силы, строить вектор, перпендикулярный двум данным, проверять компланарность.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 2, разделы I–II), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Чем векторное произведение отличается от скалярного по результату?
2. Как направлен вектор $\vec{a} \times \vec{b}$?
3. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения?
4. Чему равно $\vec{a} \times \vec{a}$?
5. Что называется смешанным произведением трёх векторов?
6. Каково условие компланарности трёх векторов?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Векторное произведение. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен обоим сомножителям, образует с ними правую тройку и имеет длину

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

В координатах

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Свойства: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$; векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору. Для базисных векторов $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Приложения:

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}.$$

Смешанное произведение:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приложения:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|, \quad V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|, \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0.$$

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; -4)$.

Решение.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(4 - 6) - \vec{j}(-8 - 3) + \vec{k}(4 + 1) = (-2; 11; 5).$$

Проверка: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -4 - 11 + 15 = 0.$

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах примера 1.

Решение. $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 121 + 25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}.$

Пример 3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$.

Решение. $\vec{AB} = (2; -2; 1)$, $\vec{AC} = (1; -3; 3)$,

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{i}(-6 + 3) - \vec{j}(6 - 1) + \vec{k}(-6 + 2) = (-3; -5; -4),$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 25 + 16} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 4. Найти вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1; -1; 2)$ и $\vec{b} = (2; 1; -1)$.

Решение.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(1 - 2) - \vec{j}(-1 - 4) + \vec{k}(1 + 2) = (-1; 5; 3).$$

Любой вектор вида $\lambda(-1; 5; 3)$ также перпендикулярен обоим данным.

Пример 5. Найти момент силы $\vec{F} = (1; 2; -1)$, приложенной в точке $A(2; 0; 1)$, относительно начала координат.

Решение.

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 2) - \vec{j}(-2 - 1) + \vec{k}(4 - 0) = (-2; 3; 4).$$

Пример 6. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 0; 2)$, $\vec{c} = (-1; 1; 4)$ и найти объём построенного на них параллелепипеда.

Решение.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(0 - 2) - 2(12 + 2) - 1(3 - 0) = -33, \quad V = 33.$$

Объём тетраэдра, построенного на тех же векторах, равен $\frac{33}{6} = 5,5$.

Пример 7. Выяснить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (3; 0; 1)$.

Решение.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 5 - 6 = 0.$$

Смешанное произведение равно нулю, следовательно, векторы компланарны (заметим, что $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$).

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

5.1. Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ для $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 0; 2)$ равно...

- | | | | |
|------------|-------------|-------------|------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| (4; 5; -6) | (4; -5; -6) | (-4; -5; 6) | (4; -5; 6) |

5.2. Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов равен...

- | | | | |
|------------------------|----------------|----------------------|-------------------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| объёму параллелепипеда | длине проекции | площади треугольника | площади параллелограмма |

5.3. Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда...

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------|--------------------------------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| их смешанное произведение равно нулю | их скалярные произведения равны нулю | их длины равны | их векторное произведение равно нулю |

5.4. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна...

1)	2)	3)	4)
$ \vec{a} \times \vec{b} $	$ \vec{a} \cdot \vec{b} $	$\frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b} $	$\frac{1}{6} \vec{a} \times \vec{b} $

5.5. Произведение $\vec{i} \times \vec{j}$ равно...

1)	2)	3)	4)
$-\vec{k}$	$\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$

5.6. Для любого вектора $\vec{a}$ произведение $\vec{a} \times \vec{a}$ равно...

1)	2)	3)	4)
$\vec{0}$	$ \vec{a} ^2$	$2\vec{a}$	$\vec{a}$

5.7. Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен...

1)	2)	3)	4)
$\vec{a} \vec{b} \vec{c}$	$\frac{1}{6} \vec{a} \vec{b} \vec{c} $	$\frac{1}{2} \vec{a} \vec{b} \vec{c} $	$ \vec{a} \vec{b} \vec{c} $

5.8. Объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен...

1)	2)	3)	4)
$ \vec{a} \vec{b} \vec{c} $	$\frac{1}{2} \vec{a} \vec{b} \vec{c} $	$\frac{1}{6} \vec{a} \vec{b} \vec{c} $	$\frac{1}{3} \vec{a} \vec{b} \vec{c} $

5.9. Смешанное произведение векторов $(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$ равно...

1)	2)	3)	4)
1	0	3	-1

5.10. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$...

1)	2)	3)	4)
параллелен вектору $\vec{a}$	перпендикулярен и $\vec{a}$, и $\vec{b}$	лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$	равен нулевому вектору всегда

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

5.11. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; 2; -4)$.

5.12. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах задания 5.11.

5.13. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 2; 0), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3)$.

5.14. Найти какой-нибудь вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1; -1; 2)$ и $\vec{b} = (2; 1; -1)$.

5.15. Найти момент силы $\vec{F} = (1; 2; -1)$, приложенной в точке $A(2; 0; 1)$, относительно начала координат.

5.16. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (3; 0; 2), \vec{c} = (-1; 1; 4)$.

5.17. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах задания 5.16.

5.18. Найти объём тетраэдра, построенного на векторах задания 5.16.

5.19. Выяснить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (3; 0; 1)$.

5.20. При каком значении λ векторы $\vec{a} = (1; 2; \lambda)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$, $\vec{c} = (0; 1; 1)$ компланарны?

5.21. Найти объём тетраэдра с вершинами $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 1; 1)$.

5.22. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработано вычисление векторного и смешанного произведений через определители и их приложения — площади, объёмы, момент силы, проверка компланарности.

Домашнее задание: сборник задач, часть 2, раздел II, § 9 «Векторное произведение» — задачи 9.1–9.15; § 10 «Смешанное произведение» — задачи 10.1–10.12; § 12 «Приложения и комбинированные задачи» — задачи 12.1–12.12. Подготовиться к контрольной работе по векторной алгебре.

Ответы к занятию 5

Тестовые задания: 5.1 — 2; 5.2 — 4; 5.3 — 1; 5.4 — 3; 5.5 — 2; 5.6 — 1; 5.7 — 4; 5.8 — 3; 5.9 — 1; 5.10 — 2.

Классические задания.

5.11. $(-2; 11; 5)$. **5.12.** $5\sqrt{6}$. **5.13.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **5.14.** $(-1; 5; 3)$.

5.15. $\vec{M}_O = (-2; 3; 4)$. **5.16.** -33 . **5.17.** 33 . **5.18.** $5,5$.

5.19. Компланарны, так как смешанное произведение равно нулю. **5.20.** $\lambda = 3$.

5.21. $\frac{5}{6}$. **5.22.** $2\sqrt{6}$.

Раздел 3. Аналитическая геометрия

Занятие 6. Прямая на плоскости

Раздел: аналитическая геометрия. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение составлять уравнения прямой на плоскости в различных формах и решать задачи на взаимное расположение прямых;
- *развивающая:* развивать умение переходить от одной формы уравнения к другой и выбирать удобную для данной задачи;
- *воспитательная:* воспитывать графическую культуру и привычку сопровождать решение чертежом.

В результате занятия студент должен

знать: общее уравнение прямой и смысл его коэффициентов, уравнение с угловым коэффициентом, уравнения прямой через точку и через две точки, уравнение в отрезках, канонические и параметрические уравнения, формулы угла между прямыми и расстояния от точки до прямой, условия параллельности и перпендикулярности;

уметь: составлять уравнение прямой по различным данным, находить угол между прямыми, точку пересечения, расстояние от точки до прямой, составлять уравнения высот и медиан треугольника.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 3, разделы 1–2), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется угловым коэффициентом прямой?
2. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты A и B в уравнении $Ax + By + C = 0$?
3. Как записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки?
4. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых?
5. Как найти точку пересечения двух прямых?
6. Как найти расстояние от точки до прямой?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Формы уравнения прямой:

$$Ax + By + C = 0 \quad (\text{общее}), \quad y = kx + b \quad (\text{с угловым коэффициентом}),$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (\text{через точку}), \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (\text{через две точки}),$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{в отрезках}), \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (\text{каноническое}), \quad \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases} \quad (\text{параметрические}).$$

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ — нормальный вектор прямой $Ax + By + C = 0$, вектор $\vec{s} = (-B; A)$ — направляющий; при этом

$$k = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 :

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|; \quad \ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2; \quad \ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

Для прямых, заданных общими уравнениями,

$$\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -3)$ и $B(-1; 3)$.

Решение.

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y + 3}{3 + 3}, \quad \frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 3}{6}, \quad 6x - 12 = -3y - 9,$$

откуда $2x + y - 1 = 0$, или $y = -2x + 1$.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через $M(1; -2)$ параллельно прямой $3x - y + 5 = 0$.

Решение. Угловым коэффициентом данной прямой $k = 3$, поэтому

$$y + 2 = 3(x - 1), \quad 3x - y - 5 = 0.$$

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через $M(1; -2)$ перпендикулярно прямой $3x - y + 5 = 0$.

Решение. Здесь $k = -\frac{1}{3}$, поэтому

$$y + 2 = -\frac{1}{3}(x - 1), \quad x + 3y + 5 = 0.$$

Пример 4. Найти угол между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$.

Решение. $k_1 = 2, k_2 = -\frac{1}{3}$, поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 - \frac{2}{3}} \right| = 7, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 7.$$

Пример 5. Найти расстояние от точки $M(3; -1)$ до прямой $4x - 3y + 2 = 0$.

Решение.

$$d = \frac{|12 + 3 + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{17}{5} = 3,4.$$

Пример 6. Найти точку пересечения прямых $2x + y = 5$ и $x - 3y = -1$.

Решение. Из второго уравнения $x = 3y - 1$; подставляя в первое, получаем $7y = 7$, то есть $y = 1, x = 2$.

Ответ: (2; 1).

Пример 7. Привести уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ к уравнению в отрезках.

Решение. $3x - 4y = -12$, делим обе части на -12 :

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1.$$

Прямая отсекает на оси Ox отрезок -4 , на оси Oy — отрезок 3 .

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

6.1. Угловой коэффициент прямой $3x - 2y + 6 = 0$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	3

6.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$y + y_0 = k(x + x_0)$	$y_0 - y = k(x_0 + x)$	$y - y_0 = k(x - x_0)$	$y = kx_0 + y_0$

6.3. Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$k_1k_2 = -1$	$k_1 = k_2$	$b_1 = b_2$	$k_1 + k_2 = 0$

6.4. Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$k_1 = k_2$	$k_1 + k_2 = 0$	$b_1b_2 = -1$	$k_1k_2 = -1$

6.5. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле...

1)	2)	3)	4)
$ Ax_0 + By_0 + C $	$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$	$\frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	$\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{ Ax_0 + By_0 + C }$

6.6. Расстояние от точки $M(3; -1)$ до прямой $4x - 3y + 2 = 0$ равно...

1)	2)	3)	4)
3,4	1,7	17	2,4

6.7. Нормальный вектор прямой $2x - 5y + 1 = 0$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
(5; 2)	(2; -5)	(-5; 2)	(2; 5)

6.8. Направляющий вектор прямой $2x - 5y + 1 = 0$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
(2; -5)	(-2; 5)	(5; -2)	(5; 2)

6.9. Прямые $2x - 3y + 1 = 0$ и $4x - 6y - 5 = 0$...

1)	2)	3)	4)
параллельны	перпендикулярны	совпадают	пересекаются под углом 45°

6.10. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(3; 6)$, имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$y = x + 1$	$y = 2x + 1$	$y = 2x$	$y = 3x - 1$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

6.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -3)$ и $B(-1; 3)$.

6.12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -2)$ параллельно прямой $3x - y + 5 = 0$.

6.13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -2)$ перпендикулярно прямой $3x - y + 5 = 0$.

6.14. Найти угол между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$.

6.15. Найти расстояние от точки $M(3; -1)$ до прямой $4x - 3y + 2 = 0$.

6.16. Найти точку пересечения прямых $2x + y = 5$ и $x - 3y = -1$.

6.17. Привести уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ к уравнению в отрезках.

6.18. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок 2, а на оси Oy — отрезок -3 .

6.19. Найти острый угол между прямыми $y = 3x - 1$ и $y = -2x + 4$.

6.20. В треугольнике с вершинами $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(3; 7)$ составить уравнение медианы, проведённой из вершины A .

6.21. Для того же треугольника составить уравнение высоты, опущенной из вершины A .

6.22. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 10 = 0$ и $3x + 4y + 5 = 0$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны все основные формы уравнения прямой и переходы между ними, вычисление угла между прямыми и расстояния от точки до прямой, составление уравнений медианы и высоты треугольника.

Домашнее задание: сборник задач, часть 3, раздел 2, § 7 «Прямая на плоскости» — задачи 7.1–7.24.

Ответы к занятию 6

Тестовые задания: 6.1 — 1; 6.2 — 3; 6.3 — 2; 6.4 — 4; 6.5 — 3; 6.6 — 1; 6.7 — 2; 6.8 — 4; 6.9 — 1; 6.10 — 3.

Классические задания.

6.11. $2x + y - 1 = 0$. **6.12.** $3x - y - 5 = 0$. **6.13.** $x + 3y + 5 = 0$. **6.14.** $\arctg 7$.

6.15. 3,4. **6.16.** (2; 1). **6.17.** $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$. **6.18.** $3x - 2y - 6 = 0$.

6.19. 45° . **6.20.** $4x - 3y - 1 = 0$. **6.21.** $x - 2y + 1 = 0$. **6.22.** 3.

Занятие 7. Плоскость и прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

Раздел: аналитическая геометрия. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение составлять уравнения плоскости и прямой в пространстве и решать задачи на их взаимное расположение;
- *развивающая:* развивать пространственное воображение и умение применять векторную алгебру к геометрическим задачам;
- *воспитательная:* воспитывать последовательность и обоснованность рассуждений.

В результате занятия студент должен

знать: общее уравнение плоскости и смысл его коэффициентов, уравнение плоскости через точку с данным нормальным вектором и через три точки, уравнение в отрезках, формулу расстояния от точки до плоскости, канонические и параметрические уравнения прямой, формулы углов между плоскостями, между прямыми, между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности;

уметь: составлять уравнения плоскости и прямой по различным данным, находить углы и расстояния, определять взаимное расположение прямой и плоскости, находить точку их пересечения.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 3, разделы 1–2), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что задаёт уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ и каков смысл его коэффициентов?
2. Как составить уравнение плоскости по точке и нормальному вектору?
3. Как записать канонические уравнения прямой в пространстве?
4. Каково условие перпендикулярности двух плоскостей?
5. Как определить, параллельна ли прямая плоскости?
6. Чем отличаются пересекающиеся и скрещивающиеся прямые?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Плоскость. Общее уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$; вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Плоскость через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}; \quad \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \quad \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

Прямая в пространстве. Канонические и параметрические уравнения:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где $\vec{s} = (m; n; p)$ — направляющий вектор. Прямая через две точки: в качестве $\vec{s}$ берётся $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

Угол между прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}.$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}; \quad \ell \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0; \quad \ell \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n}.$$

Точка пересечения прямой и плоскости находится подстановкой параметрических уравнений прямой в уравнение плоскости.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; -1; 4)$.

Решение.

$$2(x - 1) - (y + 2) + 4(z - 3) = 0, \quad 2x - y + 4z - 16 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

Решение. Плоскость отсекает на осях отрезки 1, 2, 3, поэтому

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, \quad 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Пример 3. Найти расстояние от точки $M(2; -1; 3)$ до плоскости $2x - 2y + z - 5 = 0$.

Решение.

$$d = \frac{|4 + 2 + 3 - 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{4}{3}.$$

Пример 4. Найти угол между плоскостями $x + y - z = 0$ и $2x - y + 2z + 1 = 0$.

Решение. $\vec{n}_1 = (1; 1; -1)$, $\vec{n}_2 = (2; -1; 2)$,

$$\cos\varphi = \frac{|2 - 1 - 2|}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Пример 5. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1; 2; -1)$ и $B(3; -1; 2)$.

Решение. $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (2; -3; 3)$, поэтому

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}, \quad \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$$

Пример 6. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ и плоскостью $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Решение. $\vec{s} = (2; -1; 2)$, $\vec{n} = (1; 2; -2)$,

$$\sin\varphi = \frac{|2 - 2 - 4|}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}, \quad \varphi = \arcsin \frac{4}{9}.$$

Пример 7. Найти точку пересечения прямой $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = -2 + 2t$ с плоскостью $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Решение. Подставляем в уравнение плоскости:

$$(1 + 2t) + 2(-t) - 2(-2 + 2t) + 3 = 8 - 4t = 0, \quad t = 2.$$

Ответ: $(5; -2; 2)$.

Пример 8. Выяснить взаимное расположение прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ и плоскости $x - y + 2z + 5 = 0$.

Решение. $\vec{s} \cdot \vec{n} = 3 - 1 - 2 = 0$, значит, прямая параллельна плоскости или лежит в ней. Подставим точку $(1; -2; 0)$: $1 + 2 + 0 + 5 = 8 \neq 0$.

Ответ: прямая параллельна плоскости и не лежит в ней.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

7.1. Нормальный вектор плоскости $3x - 2y + z - 5 = 0$ имеет координаты...

- | | | | |
|-----------|------------|-------------|------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| (3; 2; 1) | (-3; 2; 1) | (3; -2; -1) | (3; -2; 1) |

7.2. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$Ax + By + Cz = 0$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	$A(x + x_0) + B(y + y_0) + C(z + z_0) = 0$	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 1$

7.3. Расстояние от точки M_0 до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно...

1)	2)	3)	4)
$\frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	$ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D $	$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$	$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

7.4. Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
их нормальные векторы перпендикулярны	их свободные члены равны	их нормальные векторы коллинеарны	их нормальные векторы имеют равные длины

7.5. Направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(1; -3; 0)$	$(-2; 1; 4)$	$(2; 1; 4)$	$(2; -1; 4)$

7.6. Прямая с направляющим вектором $\vec{s}$ параллельна плоскости с нормальным вектором $\vec{n}$ тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$\vec{s} \parallel \vec{n}$	$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$	$\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0}$	$ \vec{s} = \vec{n} $

7.7. Синус угла между прямой и плоскостью равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{ \vec{s} \cdot \vec{n} }{ \vec{s} }$	$\frac{ \vec{s} \times \vec{n} }{ \vec{s} \vec{n} }$	$\frac{ \vec{s} \cdot \vec{n} }{ \vec{s} \vec{n} }$	$ \vec{s} \cdot \vec{n} $

7.8. Плоскость $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ отсекает на оси Ox отрезок, равный...

1)	2)	3)	4)
6	-4	2	12

7.9. Уравнение $z = 0$ задаёт координатную плоскость...

1)	2)	3)	4)
Oxz	Oxy	Oyz	ни одну из координатных плоскостей

7.10. Прямые с направляющими векторами $(1; 2; -1)$ и $(-2; -4; 2)$...

1)	2)	3)	4)
перпендикулярны	скрещиваются	пересекаются под углом 60°	параллельны или совпадают

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

- 7.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; -1; 4)$.
- 7.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$.
- 7.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 1; -1)$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z + 4 = 0$.
- 7.14. Найти расстояние от точки $M(2; -1; 3)$ до плоскости $2x - 2y + z - 5 = 0$.
- 7.15. Найти косинус угла между плоскостями $x + y - z = 0$ и $2x - y + 2z + 1 = 0$.
- 7.16. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1; 2; -1)$ и $B(3; -1; 2)$.
- 7.17. Записать параметрические уравнения прямой из задания 7.16.
- 7.18. Найти синус угла между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ и плоскостью $x + 2y - 2z + 3 = 0$.
- 7.19. Найти точку пересечения прямой $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = -2 + 2t$ с плоскостью $x + 2y - 2z + 3 = 0$.
- 7.20. Выяснить взаимное расположение прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ и плоскости $x - y + 2z + 5 = 0$.
- 7.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$.
- 7.22. Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x - y + 2z - 3 = 0$ и $2x - y + 2z + 6 = 0$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны способы составления уравнений плоскости и прямой в пространстве, вычисление углов и расстояний, схема исследования взаимного расположения прямой и плоскости.

Домашнее задание: сборник задач, часть 3, раздел 2, § 8 «Плоскость в пространстве» — задачи 8.1–8.20; § 9 «Прямая в пространстве» — задачи 9.1–9.18; § 10 «Взаимное расположение прямой и плоскости» — задачи 10.1–10.16.

Ответы к занятию 7

Тестовые задания: 7.1 — 4; 7.2 — 2; 7.3 — 1; 7.4 — 3; 7.5 — 4; 7.6 — 2; 7.7 — 3; 7.8 — 1; 7.9 — 2; 7.10 — 4.

Классические задания.

- 7.11. $2x - y + 4z - 16 = 0$. 7.12. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. 7.13. $x - 2y + 3z + 3 = 0$. 7.14. $\frac{4}{3}$.
- 7.15. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{9}$. 7.16. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}$. 7.17. $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = -1 + 3t$.
- 7.18. $\sin \varphi = \frac{4}{9}$. 7.19. $(5; -2; 2)$. 7.20. Прямая параллельна плоскости и не лежит в ней.
- 7.21. $x - 2y + 3z - 2 = 0$. 7.22. 3.

Занятие 8. Кривые и поверхности второго порядка

Раздел: аналитическая геометрия. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение распознавать кривые и поверхности второго порядка, приводить их уравнения к каноническому виду и находить основные характеристики;
- *развивающая:* развивать умение выделять полный квадрат и связывать вид уравнения с формой линии или поверхности;
- *воспитательная:* воспитывать графическую культуру и аккуратность при построении эскизов.

В результате занятия студент должен

знать: канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы, их основные характеристики (полуоси, фокусы, эксцентриситет, директрисы, асимптоты), канонические уравнения основных поверхностей второго порядка;

уметь: приводить уравнение кривой второго порядка к каноническому виду выделением полного квадрата, находить характеристики кривой, определять тип поверхности по её уравнению и делать эскиз.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 3, разделы 1–2), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Как записывается уравнение окружности с центром в точке $C(x_0; y_0)$?
2. Чем отличаются канонические уравнения эллипса и гиперболы?
3. Что называется эксцентриситетом? В каких пределах он изменяется для эллипса?
4. Как найти асимптоты гиперболы?
5. Каков геометрический смысл параметра p в уравнении параболы?
6. Какая поверхность задаётся уравнением $x^2 + y^2 = R^2$ в пространстве?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Окружность: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \quad x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \text{ — директрисы.}$$

Фокусы $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$; сумма расстояний от точки эллипса до фокусов равна $2a$.

Гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} > 1, \quad y = \pm \frac{b}{a}x \text{ — асимптоты.}$$

Парабола: $y^2 = 2px$ — фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, директриса $x = -\frac{p}{2}$; $x^2 = 2py$ — фокус $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, директриса $y = -\frac{p}{2}$.

Приведение к каноническому виду выполняется выделением полных квадратов по каждой переменной и переносом начала координат в центр (вершину) кривой.

Поверхности второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — эллипсоид; } \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — однополостный гиперболоид;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — двуполостный гиперболоид; } \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \text{ — конус;}$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \text{ — эллиптический параболоид; } \quad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ — гиперболический параболоид.}$$

Уравнение, не содержащее одной из переменных, задаёт цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными соответствующей оси.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Решение. Выделяем полные квадраты:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9, \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Ответ: $C(2; -3)$, $R = 4$.

Пример 2. Для эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и директрисы.

Решение. $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, поэтому

$$F_1(-4; 0), \quad F_2(4; 0), \quad \varepsilon = \frac{4}{5} = 0,8, \quad x = \pm \frac{25}{4}.$$

Пример 3. Для гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты.

Решение. $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{16 + 9} = 5$;

$$A_1(-4; 0), \quad A_2(4; 0), \quad F_1(-5; 0), \quad F_2(5; 0), \quad \varepsilon = \frac{5}{4} = 1,25, \quad y = \pm \frac{3}{4}x.$$

Пример 4. Для параболы $y^2 = 8x$ найти параметр, фокус и директрису.

Решение. $2p = 8$, значит, $p = 4$; фокус $F(2; 0)$, директриса $x = -2$.

Пример 5. Привести к каноническому виду уравнение $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ и определить тип кривой.

Решение.

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) = 11, \quad 9(x - 1)^2 - 9 + 4(y + 2)^2 - 16 = 11,$$

$$9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 36, \quad \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1.$$

Ответ: эллипс с центром $C(1; -2)$, большая полуось 3 направлена вдоль оси Oy , малая полуось равна 2.

Пример 6. Привести к каноническому виду уравнение $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$.

Решение.

$$(x + 3)^2 - 9 - 4(y - 1)^2 + 4 + 1 = 0, \quad (x + 3)^2 - 4(y - 1)^2 = 4, \quad \frac{(x + 3)^2}{4} - (y - 1)^2 = 1.$$

Ответ: гипербола с центром $C(-3; 1)$, $a = 2$, $b = 1$.

Пример 7. Найти центр и радиус сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

Решение.

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = -5 + 1 + 4 + 9 = 9.$$

Ответ: центр $C(1; -2; 3)$, $R = 3$.

Пример 8. Определить тип поверхностей: а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; в) $z = x^2 + y^2$; г) $x^2 + y^2 = 9$.

Решение. а) эллипсоид с полуосями 2, 3, 4; б) круговой конус с осью Oz ; в) параболоид вращения; г) круговой цилиндр радиуса 3 с образующими, параллельными оси Oz .

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

8.1. Уравнение окружности с центром $C(2; -3)$ и радиусом 4 имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$	$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$	$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$	$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

8.2. Эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$

8.3. Асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ задаются уравнениями...

1)	2)	3)	4)
$y = \pm \frac{4}{3}x$	$y = \pm \frac{16}{9}x$	$y = \pm x$	$y = \pm \frac{3}{4}x$

8.4. Фокус параболы $y^2 = 8x$ находится в точке...

1)	2)	3)	4)
(4; 0)	(2; 0)	(0; 2)	(-2; 0)

8.5. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
окружность радиуса 5	эллипсоид с различными полуосями	сферу радиуса 5	конус

8.6. Уравнение $z = x^2 + y^2$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
параболоид вращения	конус	цилиндр	гиперболический параболоид

8.7. Уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
эллипсоид	двуполостный гиперболоид	конус	одноплостный гиперболоид

8.8. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ в пространстве задаёт...

1)	2)	3)	4)
окружность радиуса 2	круговой цилиндр радиуса 2	сферу радиуса 2	конус

8.9. Полуоси эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ равны...

1)	2)	3)	4)
$a = 3, b = 2$	$a = 2, b = 3$	$a = 9, b = 4$	$a = 6, b = 4$

8.10. Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ на плоскости задаёт...

1)	2)	3)	4)
гиперболу	точку	пару пересекающихся прямых	пустое множество

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

8.11. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

8.12. Для эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти полуоси, фокусы и эксцентриситет.

8.13. Для гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты.

8.14. Для параболы $y^2 = 8x$ найти параметр, фокус и директрису.

- 8.15.** Привести к каноническому виду уравнение $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ и определить тип кривой.
- 8.16.** Привести к каноническому виду уравнение $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ и определить тип кривой.
- 8.17.** Составить уравнение эллипса с фокусами $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$ и большей полуосью, равной 5.
- 8.18.** Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом $F(0; 3)$.
- 8.19.** Найти центр и радиус сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.
- 8.20.** Определить тип поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ и указать её полуоси.
- 8.21.** Определить тип поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
- 8.22.** Определить тип поверхности $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработано распознавание кривых второго порядка по каноническому уравнению, приведение общего уравнения к каноническому виду выделением полного квадрата и классификация основных поверхностей второго порядка.

Домашнее задание: сборник задач, часть 3, раздел 2, § 11 «Кривые второго порядка» — задачи 11.1–11.24; § 12 «Поверхности второго порядка» — задачи 12.1–12.12. Подготовиться к контрольной работе по аналитической геометрии.

Ответы к занятию 8

Тестовые задания: 8.1 — 3; 8.2 — 1; 8.3 — 4; 8.4 — 2; 8.5 — 3; 8.6 — 1; 8.7 — 4; 8.8 — 2; 8.9 — 1; 8.10 — 3.

Классические задания.

- 8.11.** $C(2; -3)$, $R = 4$. **8.12.** $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$, $\varepsilon = 0,8$.
- 8.13.** $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$, $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$, $\varepsilon = 1,25$, $y = \pm \frac{3}{4}x$. **8.14.** $p = 4$, $F(2; 0)$, $x = -2$.
- 8.15.** $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ — эллипс с центром $C(1; -2)$. **8.16.** $\frac{(x+3)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$ — гипербола с центром $C(-3; 1)$.
- 8.17.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **8.18.** $x^2 = 12y$. **8.19.** $C(1; -2; 3)$, $R = 3$.
- 8.20.** Эллипсоид с полуосями 2, 3, 4. **8.21.** Круговой конус с осью Oz . **8.22.** Гиперболический параболоид.

Раздел 4. Предел и непрерывность функции

Занятие 9. Область определения функции. Предел функции. Раскрытие неопределённостей

Раздел: предел функции. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию первичных умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение находить область определения функции и вычислять пределы с раскрытием неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$;
- *развивающая:* развивать умение распознавать тип неопределённости и выбирать соответствующий приём преобразования;
- *воспитательная:* воспитывать логическую строгость записи и внимание к области допустимых значений.

В результате занятия студент должен

знать: определение области определения функции и ограничения, налагаемые дробью, корнем чётной степени и логарифмом; определение предела функции, основные теоремы о пределах, виды неопределённостей и приёмы их раскрытия;

уметь: находить область определения функции, вычислять пределы рациональных и иррациональных выражений, раскрывать неопределённости разложением на множители, делением на старшую степень и умножением на сопряжённое выражение.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, разделы I–II), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется областью определения функции?
2. Какие ограничения накладывают дробь, корень чётной степени и логарифм?
3. Что означает запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
4. Какие неопределённости вы знаете?
5. Как раскрывается неопределённость $\frac{0}{0}$ для рациональной дроби?
6. Что делают со степенями при вычислении предела на бесконечности?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Область определения. Основные ограничения:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}: Q(x) \neq 0; \quad \sqrt[k]{f(x)}: f(x) \geq 0; \quad \log_a f(x): f(x) > 0.$$

Теоремы о пределах. Если пределы существуют и конечны, то предел суммы, произведения и частного (при отличном от нуля пределе знаменателя) равен соответственно сумме, произведению и частному пределов; постоянный множитель выносится за знак предела.

Если функция непрерывна в точке a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ — предел вычисляется подстановкой.

Неопределённость $\frac{0}{0}$ для рациональной дроби раскрывается разложением числителя и знаменателя на множители и сокращением на $(x - a)$.

Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ раскрывается делением числителя и знаменателя на старшую степень x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

Иррациональные выражения: числитель или знаменатель умножают на сопряжённое выражение, используя формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x + 2} + \ln(5 - x)$.

Решение. Требуется $x + 2 \geq 0$ и $5 - x > 0$, то есть $x \geq -2$ и $x < 5$.

Ответ: $D(y) = [-2; 5)$.

Пример 2. Найти область определения функции $y = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

Решение. Знаменатель обращается в нуль при $x = 2$ и $x = 3$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

Решение. Неопределённость $\frac{0}{0}$. Разложим на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}.$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7x - 4}$.

Решение. Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Делим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{3}{2}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{x^4 - 3}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{3x^2 + 1}$.

Решение. В первом случае степень числителя меньше степени знаменателя, предел равен нулю; во втором степень числителя больше, предел равен бесконечности.

Пример 7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 8. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Решение. Неопределённость $\infty - \infty$; умножаем и делим на сопряжённое:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

9.1. Областью определения функции $y = \frac{1}{x-3}$ является множество...

- 1) 2) 3) 4)

$x > 3$ все $x \neq 3$ $x \geq 3$ все действительные числа

9.2. Областью определения функции $y = \sqrt{x-2}$ является множество...

- 1) 2) 3) 4)

$x > 2$ $x \neq 2$ $x \leq 2$ $x \geq 2$

9.3. Областью определения функции $y = \ln(x+1)$ является множество...

- 1) 2) 3) 4)

$x > -1$ $x \geq -1$ $x \neq -1$ $x < -1$

9.4. Предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ равен...

- 1) 2) 3) 4)

0 2 4 не существует

9.5. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7x - 4}$ равен...

- | | | | |
|---------------|----|----------|----------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| $\frac{3}{2}$ | 0 | ∞ | $-\frac{1}{4}$ |

9.6. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2}{x^2 - 1}$ равен...

- | | | | |
|----|----|----------|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 5 | 0 | ∞ | -2 |

9.7. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^2 + x}$ равен...

- | | | | |
|----|---------------|----|----------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 | ∞ |

9.8. При $x \rightarrow 3$ выражение $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ представляет собой неопределённость вида...

- | | | | |
|-------------------------|-------------------|---------------|------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| $\frac{\infty}{\infty}$ | $\infty - \infty$ | $\frac{0}{0}$ | 1^∞ |

9.9. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ равен...

- | | | | |
|----|---------------|----|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 2 |

9.10. Предел $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3)$ равен...

- | | | | |
|----|----|----|----------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 4 | 3 | 1 | ∞ |

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

9.11. Найти область определения функции $y = \sqrt{x + 2} + \ln(5 - x)$.

9.12. Найти область определения функции $y = \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$.

9.13. Найти область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2}$.

9.14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

9.15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

9.16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$.

9.17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7x - 4}$.

9.18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{x^4 - 3}$.

9.19. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{3x^2 + 1}$.

9.20. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

9.21. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$.

9.22. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработано нахождение области определения и три основных приёма раскрытия неопределённостей — разложение на множители, деление на старшую степень и умножение на сопряжённое выражение.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, раздел II, § 11 «Область определения и непрерывность функции» — задачи 11.1–11.16; § 12 «Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей» — задачи 12.1–12.20.

Ответы к занятию 9

Тестовые задания: 9.1 — 2; 9.2 — 4; 9.3 — 1; 9.4 — 3; 9.5 — 1; 9.6 — 2; 9.7 — 4; 9.8 — 3; 9.9 — 2; 9.10 — 1.

Классические задания.

9.11. $[-2; 5)$. **9.12.** $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. **9.13.** $[-3; 3]$. **9.14.** 4.

9.15. $\frac{3}{2}$. **9.16.** $\frac{5}{6}$. **9.17.** $\frac{3}{2}$. **9.18.** 0. **9.19.** ∞ .

9.20. $\frac{1}{2}$. **9.21.** $\frac{1}{4}$. **9.22.** 0.

Занятие 10. Замечательные пределы. Непрерывность функции. Точки разрыва

Раздел: предел и непрерывность функции. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение применять первый и второй замечательные пределы и эквивалентные бесконечно малые, исследовать функцию на непрерывность и классифицировать точки разрыва;
- *развивающая:* развивать умение сводить предел к стандартному виду и анализировать поведение функции в окрестности точки;
- *воспитательная:* воспитывать точность формулировок и обоснованность выводов.

В результате занятия студент должен

знать: первый и второй замечательные пределы, таблицу эквивалентных бесконечно малых, определение непрерывности функции в точке, определение односторонних пределов, классификацию точек разрыва;

уметь: вычислять пределы с помощью замечательных пределов и эквивалентных бесконечно малых, находить односторонние пределы, определять точки разрыва и их тип, подбирать параметр, при котором функция непрерывна.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, разделы I–II), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Сформулируйте первый замечательный предел.
2. Сформулируйте второй замечательный предел.
3. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?
4. Каково определение непрерывности функции в точке?
5. Что такое односторонние пределы?
6. Какие типы точек разрыва вы знаете?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Эквивалентные бесконечно малые при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x.$$

В произведении и частном бесконечно малые можно заменять эквивалентными.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Он применяется для раскрытия неопределённости 1^∞ ; полезна и общая формула

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$

Непрерывность. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Классификация точек разрыва:

- *устранимый разрыв*: односторонние пределы конечны и равны, но не равны значению функции (или функция в точке не определена);
- *разрыв первого рода (скачок)*: односторонние пределы конечны, но не равны; величина скачка равна их разности;
- *разрыв второго рода*: хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

Решение. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, $\sin 5x \sim 5x$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

Решение. Так как $1 - \cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2} = 8x^2$, предел равен 8.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 2x}$.

Решение. Числитель эквивалентен $3x^2$, знаменатель — $2x^2$, поэтому предел равен $\frac{3}{2}$.

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

Решение. Это неопределённость 1^∞ ; по второму замечательному пределу ответ равен e^3 .

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$.

Решение. Преобразуем основание:

$$\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^x = e^3.$$

Пример 7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2 = e^2$.

Пример 8. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ и определить тип разрыва.

Решение. В точке $x = 1$ функция не определена, но

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2.$$

Односторонние пределы конечны и равны, следовательно, $x = 1$ — точка устранимого разрыва: доопределив $f(1) = 2$, получим непрерывную функцию.

Пример 9. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x = 0$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1.$$

Пределы конечны, но различны, значит, $x = 0$ — точка разрыва первого рода со скачком, равным 2.

Пример 10. При каком значении a функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + a, & x > 0 \end{cases}$$

непрерывна на всей числовой оси?

Решение. Левый предел в нуле равен 1, правый равен a , значение функции равно 1. Из условия $a = 1$ функция непрерывна.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

10.1. Первый замечательный предел утверждает, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	∞	1	e

10.2. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	1	15

10.3. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	0	∞	e

10.4. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	$\frac{1}{2}$	0	2

10.5. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
3	$\frac{1}{3}$	1	0

10.6. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ равен...

1)	2)	3)	4)
e	$2e$	e^2	1

10.7. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если...

1)	2)	3)	4)
$f(x_0) = 0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	функция определена в точке x_0	односторонние пределы бесконечны

10.8. Точка $x = 1$ для функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ является точкой...

1)	2)	3)	4)
разрыва второго рода	непрерывности	разрыва первого рода со скачком 2	устранимого разрыва

10.9. Точка $x = 2$ для функции $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ является точкой...

1)	2)	3)	4)
устранимого разрыва	непрерывности	разрыва второго рода	разрыва первого рода

10.10. Если односторонние пределы функции в точке конечны, но не равны между собой, то это точка...

1)	2)	3)	4)
разрыва первого рода	устранимого разрыва	разрыва второго рода	непрерывности

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

10.11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$.

10.12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

10.13. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

10.14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 2x}$.

10.15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

10.16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$.

10.17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

10.18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x$.

10.19. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ и определить тип разрыва.

10.20. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x-2}$ и определить тип разрыва.

10.21. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x = 0$ и найти величину скачка.

10.22. При каком значении a функция $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + a, & x > 0 \end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси?

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработано применение первого и второго замечательных пределов, замена бесконечно малых эквивалентными, а также схема исследования функции на непрерывность с классификацией точек разрыва.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, раздел II, § 13 «Первый и второй замечательные пределы» — задачи 13.1–13.14; раздел I, § 5 «Непрерывность функции. Точки разрыва» — тестовые задания 5.1–5.24.

Ответы к занятию 10

Тестовые задания: 10.1 — 3; 10.2 — 1; 10.3 — 4; 10.4 — 2; 10.5 — 1; 10.6 — 3; 10.7 — 2; 10.8 — 4; 10.9 — 3; 10.10 — 1.

Классические задания.

10.11. $\frac{5}{3}$. 10.12. $\frac{2}{5}$. 10.13. 8. 10.14. $\frac{3}{2}$. 10.15. e^3 . 10.16. e^3 .

10.17. e^2 . 10.18. e^2 . 10.19. $x = 1$ — точка устранимого разрыва, предел равен 2.

10.20. $x = 2$ — точка разрыва второго рода. **10.21.** $x = 0$ — точка разрыва первого рода, скачок равен 2.
10.22. $a = 1$.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями

Занятие 11. Производная и её приложения. Исследование функции

Раздел: дифференциальное исчисление. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по обобщению и систематизации знаний.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение дифференцировать функции по таблице и правилам, включая сложные функции, и применять производную к исследованию функции и построению графика;
- *развивающая:* развивать умение связывать аналитические свойства производной с геометрической картиной;
- *воспитательная:* воспитывать системность мышления и умение доводить исследование до полного вывода.

В результате занятия студент должен

знать: определение производной, её геометрический и механический смысл, таблицу производных, правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции, уравнения касательной и нормали, признаки монотонности и экстремума, признаки выпуклости и точки перегиба, схему полного исследования функции;

уметь: находить производные, составлять уравнения касательной и нормали, находить скорость и ускорение, интервалы монотонности, экстремумы, интервалы выпуклости, точки перегиба и асимптоты графика.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, разделы I–II), карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	15 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	20 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется производной функции в точке?
2. В чём состоит геометрический смысл производной?
3. Как дифференцируется произведение и частное двух функций?
4. Как найти производную сложной функции?
5. Каково необходимое условие экстремума?
6. Как по второй производной определить характер выпуклости?

Этап 2. Опорный теоретический материал (15 мин)

Определение:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной; механический смысл: $s'(t) = v(t)$, $v'(t) = a(t)$.

Основные табличные производные:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Правила дифференцирования:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Касательная и нормаль в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Исследование функции. Если $f'(x) > 0$ на интервале, функция возрастает; если $f'(x) < 0$ — убывает. Точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует, — критические; при смене знака производной с плюса на минус имеем максимум, с минуса на плюс — минимум.

Если $f''(x) > 0$, график выпуклый вниз; если $f''(x) < 0$ — выпуклый вверх; точка, в которой $f''(x)$ меняет знак, — точка перегиба.

Асимптоты: вертикальные — в точках бесконечного разрыва; наклонная $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти производную функции $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$.

Решение. $y' = 12x^3 - 6x^2 + 5$.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2 \sin x$.

Решение. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Пример 3. Найти производную функции $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

Решение.

$$y' = \frac{2(x+3) - (2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \sin^3 2x$.

Решение. Дифференцируем как сложную функцию:

$$y' = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x \cos 2x.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \ln(x^2 + 1)$.

Решение. $y' = \frac{2x}{x^2+1}.$

Пример 6. Составить уравнения касательной и нормали к графику $y = x^2 - 3x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. $y(2) = 0, y' = 2x - 3, y'(2) = 1$. Тогда

$$y = 0 + 1 \cdot (x - 2), \quad \text{то есть} \quad y = x - 2 \quad (\text{касательная});$$

$$y = -(x - 2), \quad \text{то есть} \quad y = -x + 2 \quad (\text{нормаль}).$$

Пример 7. Точка движется по закону $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент $t = 2$.

Решение. $v(t) = 3t^2 - 6t + 2, a(t) = 6t - 6$; при $t = 2$ получаем $v = 2, a = 6$.

Пример 8. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Решение. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; критические точки $x = 0$ и $x = 2$.

На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ производная положительна — функция возрастает; на интервале $(0; 2)$ — убывает.

Ответ: $y_{\max} = y(0) = 4, y_{\min} = y(2) = 0$.

Пример 9. Найти интервалы выпуклости и точку перегиба той же функции.

Решение. $y'' = 6x - 6 = 0$ при $x = 1$. При $x < 1$ вторая производная отрицательна (график выпуклый вверх), при $x > 1$ — положительна (выпуклый вниз).

Ответ: точка перегиба $(1; 2)$.

Пример 10. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Решение. При $x = 1$ знаменатель обращается в нуль, поэтому $x = 1$ — вертикальная асимптота. Далее

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1.$$

Ответ: $x = 1$ и $y = x + 1$.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

11.1. Производная функции $y = x^5$ равна...

1)	2)	3)	4)
x^4	$5x^4$	$5x^6$	$\frac{x^6}{6}$

11.2. Производная произведения вычисляется по формуле...

1)	2)	3)	4)
$(uv)' = u'v'$	$(uv)' = u'v - uv'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$(uv)' = \frac{u'}{v'}$

11.3. Производная функции $y = \sin x$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

11.4. Геометрический смысл производной $f'(x_0)$ состоит в том, что она равна...

1)	2)	3)	4)
значению функции в точке	площади под графиком	длине касательной	угловому коэффициенту касательной

11.5. Производная функции $y = \ln x$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x$	$\frac{1}{x \ln x}$

11.6. Если $f'(x) > 0$ на интервале, то на этом интервале функция...

1)	2)	3)	4)
возрастает	убывает	постоянна	имеет точку перегиба

11.7. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции в точке x_0 состоит в том, что...

1)	2)	3)	4)
$f(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) > 0$

11.8. Если $f''(x) > 0$ на интервале, то график функции на нём...

1)	2)	3)	4)
выпуклый вверх	имеет вертикальную асимптоту	не имеет касательных	выпуклый вниз

11.9. Производная функции $y = e^{3x}$ равна...

1)	2)	3)	4)
$3e^{3x}$	e^{3x}	$3e^x$	$\frac{e^{3x}}{3}$

11.10. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$y = f'(x_0)x$	$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	$y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$	$y = f(x_0)(x - x_0)$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (20 мин)

11.11. Найти производную функции $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$.

11.12. Найти производную функции $y = x^2 \sin x$.

11.13. Найти производную функции $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

11.14. Найти производную функции $y = \sin^3 2x$.

11.15. Найти производную функции $y = \ln(x^2 + 1)$.

11.16. Найти производную функции $y = e^{-x^2}$.

11.17. Найти производную функции $y = \sqrt{3x+1}$.

11.18. Составить уравнения касательной и нормали к графику $y = x^2 - 3x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

11.19. Точка движется по закону $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент $t = 2$.

11.20. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

11.21. Найти интервалы выпуклости и точку перегиба графика функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

11.22. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработана техника дифференцирования, включая сложную функцию, и приложения производной — касательная и нормаль, скорость и ускорение, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба и асимптоты.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, раздел II, § 14 «Дифференцирование функции одной переменной» — задачи 14.1–14.30; § 15 «Приложения производной» — задачи 15.1–15.18; § 16 «Исследование функций и построение графиков» — задачи 16.1–16.12. Подготовиться к контрольной работе по разделам «Предел функции» и «Дифференциальное исчисление».

Ответы к занятию 11

Тестовые задания: 11.1 — 2; 11.2 — 3; 11.3 — 1; 11.4 — 4; 11.5 — 2; 11.6 — 1; 11.7 — 3; 11.8 — 4; 11.9 — 1; 11.10 — 2.

Классические задания.

11.11. $12x^3 - 6x^2 + 5$. **11.12.** $2x \sin x + x^2 \cos x$. **11.13.** $\frac{7}{(x+3)^2}$. **11.14.** $6 \sin^2 2x \cos 2x$.

11.15. $\frac{2x}{x^2+1}$. **11.16.** $-2xe^{-x^2}$. **11.17.** $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

11.18. Касательная $y = x - 2$; нормаль $y = -x + 2$. **11.19.** $v(2) = 2$, $a(2) = 6$.

11.20. Возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, убывает на $(0; 2)$; $y_{\max} = y(0) = 4$, $y_{\min} = y(2) = 0$.

11.21. Выпуклость вверх на $(-\infty; 1)$, вниз на $(1; +\infty)$; точка перегиба $(1; 2)$.

11.22. $x = 1$ — вертикальная асимптота, $y = x + 1$ — наклонная асимптота.