

Поурочные разработки практических занятий по высшей математике

Разделы: линейная алгебра, векторная алгебра с приложениями, аналитическая геометрия, предел функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями

Объём: 15 практических занятий по 90 минут (2 академических часа)

Дидактическая база: сборник задач по высшей математике (части 1–4)

Пояснительная записка

Настоящие поурочные разработки составлены на основе сборника задач по высшей математике и предназначены для проведения практических занятий со студентами первого курса технических и естественнонаучных направлений подготовки.

Курс рассчитан на 15 практических занятий продолжительностью 90 минут каждое (30 академических часов). Распределение учебного времени по разделам:

Раздел	Количество занятий	Номера занятий
Линейная алгебра	4	1–4
Векторная алгебра с приложениями	3	5–7
Аналитическая геометрия	3	8–10
Предел функции	2	11–12
Дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями	3	13–15
Итого	15	1–15

Каждое занятие построено по единой методической схеме и включает:

1. организационный момент и актуализацию опорных знаний (устный фронтальный опрос) — 5 минут;
2. опорный теоретический материал (краткий конспект формул и алгоритмов) — 10 минут;
3. разбор типовых задач у доски с подробными решениями — 30 минут;
4. тестовый контроль (закрытые задания с выбором одного верного ответа из четырёх) — 15 минут;
5. самостоятельную работу — классические задания по образцу и на перенос знаний — 25 минут;
6. подведение итогов и выдачу домашнего задания — 5 минут.

Ответы ко всем тестовым и классическим заданиям помещены в конце соответствующего занятия, что позволяет использовать разработки как для аудиторной работы преподавателя, так и для самоподготовки студентов.

Формы контроля: текущий (устный опрос, проверка самостоятельной работы), тематический (тестирование в конце каждого занятия), рубежный (типовые варианты контрольных работ из сборника задач).

Критерии оценивания тестового блока: 8 верных ответов из 8 — «отлично»; 6–7 — «хорошо»; 5 — «удовлетворительно»; менее 5 — «неудовлетворительно».

Тематический план

№	Тема практического занятия	Часы
1	Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение и транспонирование матриц	2
2	Определители второго, третьего и высших порядков. Свойства определителей	2
3	Обратная матрица. Ранг матрицы. Матричные уравнения	2
4	Системы линейных алгебраических уравнений: правило Крамера, матричный метод, метод Гаусса	2
5	Векторы. Линейные операции над векторами. Координаты вектора	2
6	Скалярное произведение векторов и его приложения	2
7	Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения	2
8	Прямая на плоскости	2
9	Плоскость и прямая в пространстве	2
10	Кривые и поверхности второго порядка	2
11	Область определения функции. Предел функции. Раскрытие неопределённостей	2
12	Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые. Непрерывность функции	2
13	Производная функции одной переменной. Правила и техника дифференцирования	2
14	Приложения производной: касательная, скорость, правило Лопиталя, монотонность и экстремумы	2
15	Полное исследование функции и построение графика. Наибольшее и наименьшее значения	2

Раздел 1. Линейная алгебра

Занятие 1. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение и транспонирование матриц

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию первичных умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение выполнять сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц и транспонирование; закрепить понятие согласованности размеров матриц;
- *развивающая:* развивать вычислительную культуру, внимание, умение контролировать промежуточные результаты;
- *воспитательная:* воспитывать аккуратность в оформлении записей и ответственность за результат самостоятельной работы.

В результате занятия студент должен

знать: определение матрицы, её размеров и элементов; виды матриц (нулевая, единичная, диагональная, треугольная, симметрическая); правила линейных операций; условие существования произведения матриц; свойства операций;

уметь: находить линейную комбинацию матриц, перемножать матрицы, возводить квадратную матрицу в натуральную степень, транспонировать матрицу, решать простейшие уравнения относительно матрицы.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, разделы 1–6), раздаточные карточки с тестовыми заданиями, доска, мел.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

Фронтальный опрос:

1. Что называется матрицей размера $m \times n$? Как обозначается элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце?
2. Какие матрицы называются равными?
3. При каком условии определена сумма двух матриц?
4. При каком условии определено произведение AB ?
5. Верно ли равенство $AB = BA$ для любых квадратных матриц одного порядка?
6. Что называется транспонированной матрицей?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Матрица размера $m \times n$ — прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Линейные операции. Для матриц одинакового размера

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Умножение матриц. Если A имеет размер $m \times n$, а B — размер $n \times p$, то произведение $C = AB$ имеет размер $m \times p$ и

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Правило: элемент c_{ij} есть «строка на столбец» — сумма произведений элементов i -й строки первой матрицы на соответствующие элементы j -го столбца второй.

Транспонирование: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

Свойства операций:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$$

$$(AB)C = A(BC), \quad (A + B)C = AC + BC, \quad (\lambda A)B = \lambda(AB);$$

$$(A^T)^T = A, \quad (A + B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Умножение матриц **некоммутативно**: в общем случае $AB \neq BA$. Для квадратной матрицы $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$, причём $AE = EA = A$, где E — единичная матрица.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Вычислить $3A - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицы имеют одинаковый размер 2×3 , значит, линейная комбинация определена. Умножаем каждую матрицу на своё число и вычитаем поэлементно:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 - (-2) & -3 - 10 & 9 - 0 \\ 0 - 6 & 12 - (-4) & -6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -13 & 9 \\ -6 & 16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение AB , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Размер A равен 3×2 , размер B равен 2×3 ; число столбцов A совпадает с числом строк B , произведение определено и имеет размер 3×3 .

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 = 2, \quad c_{12} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5, \quad c_{13} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 = -13;$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 6, \quad c_{22} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 3, \quad c_{23} = 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 5 = -9;$$

$$c_{31} = -1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = -2, \quad c_{32} = -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -9, \quad c_{33} = -1 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 = 23.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -13 \\ 6 & 3 & -9 \\ -2 & -9 & 23 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислить $A^2 - 3A + 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала возводим матрицу в квадрат:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 & -2 - 1 \\ 6 + 3 & -3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Далее

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 - 6 + 2 & -3 + 3 + 0 \\ 9 - 9 + 0 & -2 - 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3E.$$

Замечание для студентов: внимание на порядок действий — единичная матрица играет роль числа 1, поэтому свободный член записывается в виде $2E$, а не просто числом 2.

Пример 4. Проверить справедливость равенства $(AB)^T = B^T A^T$ для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Левая часть:

$$AB = \begin{pmatrix} 3+4 & -1+8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad (AB)^T = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Правая часть:

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^T A^T = \begin{pmatrix} 3+4 & -2 \\ -1+8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Равенство выполнено. Обратим внимание: порядок сомножителей при транспонировании меняется на противоположный.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $A + B$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда $2A - B$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1.3. Матрица A имеет размер 3×4 , матрица B — размер 4×2 . Тогда произведение AB имеет размер...

1)	2)	3)	4)
3×2	4×4	2×3	произведение не определено

1.4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда AB равно...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

1.5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ матрица A^2 равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

1.6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ транспонированная матрица A^T равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

1.7. Произведение $A \cdot A$ определено тогда и только тогда, когда матрица A ...

1)	2)	3)	4)
диагональная	квадратная	симметрическая	имеет размер 2×2

1.8. Матрица A имеет размер 2×3 , матрица B — размер 3×2 . Тогда произведение BA имеет размер...

1)	2)	3)	4)
2×2	3×3	2×3	произведение не определено

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

1.9. Найти сумму $A + B$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

1.10. Вычислить $4A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.11. Вычислить $2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.12. Найти произведение AB , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.13. Найти произведение AB , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1.14. Для матриц задания 1.13 найти произведение BA и объяснить, почему $AB \neq BA$.

1.15. Вычислить A^2 , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.16. Вычислить A^3 , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.17. Найти $A \cdot A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.18. Найти матрицу X из уравнения $2X + A = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны линейные операции, умножение и транспонирование матриц; закреплено правило согласования размеров.

Домашнее задание: сборник задач по высшей математике, часть 1, раздел 1 «Действия над матрицами» — задачи 1–20; повторить определение определителя второго порядка.

Ответы к занятию 1

Тестовые задания: 1.1 — 1; 1.2 — 1; 1.3 — 1; 1.4 — 2; 1.5 — 2; 1.6 — 1; 1.7 — 2; 1.8 — 2.

Классические задания.

1.9. $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$. **1.10.** $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -1 & -3 \\ -22 & -4 \end{pmatrix}$. **1.11.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ -12 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

1.12. $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. **1.13.** $AB = (-4)$ — матрица размера 1×1 .

1.14. $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; произведения имеют разные размеры, поэтому не могут быть равны.

1.15. $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. **1.16.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.17.** $A \cdot A^T = (9)$. **1.18.** $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Занятие 2. Определители второго, третьего и высших порядков. Свойства определителей

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию и совершенствованию умений.

Цели занятия:

- *обучающая:* научить вычислять определители второго и третьего порядков различными способами, применять разложение по строке (столбцу) и свойства определителей для вычисления определителей высших порядков;
- *развивающая:* развивать логическое мышление, умение выбирать рациональный способ вычисления;
- *воспитательная:* формировать настойчивость и самоконтроль при выполнении многошаговых вычислений.

В результате занятия студент должен

знать: определение определителя второго и третьего порядков, правило треугольников (правило Саррюса), понятия минора и алгебраического дополнения, теорему о разложении определителя, основные свойства определителей;

уметь: вычислять определители второго и третьего порядков, разлагать определитель по строке или столбцу, приводить определитель к треугольному виду, решать уравнения, содержащие определитель.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, раздел 2), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Для каких матриц определён определитель?
2. Как вычисляется определитель второго порядка?
3. Что называется минором элемента a_{ij} ?
4. Чем алгебраическое дополнение отличается от минора?

5. Как изменится определитель при перестановке двух строк?
6. Чему равен определитель матрицы с двумя одинаковыми строками?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка (правило треугольников):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Минор M_{ij} элемента a_{ij} — определитель, полученный вычёркиванием i -й строки и j -го столбца. **Алгебраическое дополнение:**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема о разложении: определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Свойства определителей.

1. $\det A^T = \det A$ (строки и столбцы равноправны).
2. При перестановке двух строк определитель меняет знак.
3. Определитель с нулевой строкой равен нулю.
4. Определитель с двумя одинаковыми (или пропорциональными) строками равен нулю.
5. Общий множитель элементов строки выносится за знак определителя.
6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.
7. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.
8. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Вычислить $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 + 10 = 22$.

Пример 2. Вычислить определитель двумя способами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. **Способ 1** (правило треугольников):

$$\Delta = 2 \cdot 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 5 - (-1) \cdot 0 \cdot (-3);$$

$$\Delta = -24 + 2 + 0 - 12 + 20 - 0 = -14.$$

Способ 2 (разложение по первому столбцу — в нём есть нуль):

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-12 + 10) + (2 - 12) = -4 - 10 = -14.$$

Результаты совпали. Разложение выгоднее выбирать по той строке или столбцу, где больше нулей.

Пример 3. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Разложим по первой строке:

$$x(x^2 - 1) - 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (1 - x) = x^3 - x - x + 1 + 1 - x = x^3 - 3x + 2.$$

Уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$. Подбором находим корень $x = 1$; делением получаем $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.

Ответ: $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2$.

Пример 4. Вычислить определитель четвёртого порядка приведением к треугольному виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Переставим первую и вторую строки (определитель меняет знак):

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обнулим первый столбец: из второй строки вычтем удвоенную первую, из четвёртой — первую:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим по первому столбцу и в полученном определителе третьего порядка переставим первую и вторую строки:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к второй строке первую, умноженную на 5, а к третьей — первую, умноженную на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 17 & -7 \\ 0 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 17 & -7 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = -51 + 63 = 12.$$

Ответ: $\Delta = 12$.

Пример 5. Не вычисляя, доказать, что определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Третья строка равна сумме первых двух: $5 = 1 + 4$, $7 = 2 + 5$, $9 = 3 + 6$. Строки линейно зависимы, следовательно, определитель равен нулю (по свойству 6 третью строку можно обратить в нулевую).

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

2.1. Определитель $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ равен...

- | | | | |
|----|----|-----|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 26 | 14 | -26 | 20 |

2.2. Корень уравнения $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ равен...

- | | | | |
|----|----|------|-----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 6 | -6 | -1,5 | 1,5 |

2.3. Определитель, заведомо не равный нулю, имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

2.4. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
12	-12	0	30

2.5. Алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} определителя третьего порядка равно...

1)	2)	3)	4)
M_{23}	$-M_{23}$	M_{32}	$(-1)^6 M_{23}$

2.6. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
21	-21	9	15

2.7. Если все элементы второй строки определителя третьего порядка умножить на 3, то определитель...

1)	2)	3)	4)
не изменится	увеличится в 3 раза	увеличится в 9 раз	увеличится в 27 раз

2.8. Известно, что $\det A = 4$ и $\det B = -3$, матрицы квадратные одного порядка. Тогда $\det(AB)$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	-12	12	-1

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

2.9. Вычислить $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

2.10. Вычислить $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

2.11. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$.

2.12. Вычислить определитель по правилу треугольников: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2.13. Вычислить определитель разложением по второй строке: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

2.14. Найти минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{12} для определителя задания 2.13.

2.15. Вычислить определитель треугольной матрицы: $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2.16. Не выполняя вычислений, указать, чему равен определитель $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$, и обосновать ответ.

2.17. Вычислить определитель четвёртого порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

2.18. При каком значении λ определитель $\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 8 & \lambda \end{vmatrix}$ равен нулю?

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: освоены два способа вычисления определителя третьего порядка и приём понижения порядка с помощью свойств.

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел 2 «Определители» — задачи 33–55; повторить понятие обратной матрицы.

Ответы к занятию 2

Тестовые задания: 2.1 — 1; 2.2 — 2; 2.3 — 1; 2.4 — 2; 2.5 — 2; 2.6 — 1; 2.7 — 2; 2.8 — 2.

Классические задания.

2.9. 26. **2.10.** -1 . **2.11.** $x_1 = -3, x_2 = 2$. **2.12.** 13. **2.13.** -32 .

2.14. $M_{12} = 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 1 = 0, A_{12} = -M_{12} = 0$. **2.15.** -6 .

2.16. Определитель равен нулю: третья строка пропорциональна первой (коэффициент пропорциональности равен 1,5).

2.17. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 = -2$. **2.18.** $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4$.

Занятие 3. Обратная матрица. Ранг матрицы. Матричные уравнения

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* научить находить обратную матрицу методом присоединённой матрицы и вычислять ранг методом элементарных преобразований; сформировать умение решать матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$;
- *развивающая:* развивать умение переносить алгоритм на новые объекты, анализировать условие разрешимости задачи;
- *воспитательная:* воспитывать привычку проверять полученный результат.

В результате занятия студент должен

знать: определение обратной матрицы и условие её существования, формулу обратной матрицы через присоединённую, определение ранга и элементарных преобразований, правила решения матричных уравнений;

уметь: находить обратную матрицу второго и третьего порядков, выполнять проверку $AA^{-1} = E$, вычислять ранг матрицы, решать матричные уравнения.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, разделы 3–4), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какая матрица называется невырожденной?
2. Какая матрица называется обратной к матрице A ?
3. Для любой ли квадратной матрицы существует обратная?
4. Что называется присоединённой (союзной) матрицей?
5. Какие преобразования матрицы называются элементарными?
6. Что называется рангом матрицы?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Критерий существования: обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ (матрица невырожденная), и является единственной.

Формула обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A}$ — присоединённая матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A и **транспонированная**.

Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Свойства: $(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Ранг матрицы $\text{rang} A$ — наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях: перестановке строк (столбцов), умножении строки на число, отличное от нуля, прибавлении к строке другой строки, умноженной на число, вычёркивании нулевой строки. Практически ранг находят приведением матрицы к ступенчатому виду: ранг равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы.

Матричные уравнения:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; \quad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}; \quad AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Порядок сомножителей существен: обратная матрица приписывается с той же стороны, с какой стоит исключаемая матрица.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, и выполнить проверку.

Решение. $\det A = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = 14 \neq 0$, обратная существует.

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 12+2 & 6-6 \\ 4-4 & 2+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 2. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) Вычисляем определитель разложением по первой строке:

$$\det A = 2(3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) - 1(0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + (-1)(0 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 10 + 2 + 3 = 15 \neq 0.$$

2) Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 5, \quad A_{12} = 2, \quad A_{13} = -3; \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = 3, \quad A_{23} = 3; \quad A_{31} = 5, \quad A_{32} = -4, \quad A_{33} = 6.$$

3) Составляем присоединённую матрицу (алгебраические дополнения записываем по столбцам):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Контроль: сумма произведений элементов первой строки A на соответствующие элементы первого столбца A^{-1} должна равняться единице: $\frac{1}{15}(2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3)) = \frac{15}{15} = 1$.

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Из второй строки вычтем удвоенную первую, из третьей — утроенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Получены две ненулевые строки ступенчатой матрицы, следовательно, $\text{rang} A = 2$.

Пример 4. Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\det A = 4 - 3 = 1 \neq 0$, значит, $X = A^{-1}B$, где

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5 & -2-2 \\ -12+10 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = B.$

Пример 5. Решить уравнение $XA = B$ с теми же матрицами A и $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Решение. Здесь неизвестная матрица стоит слева, поэтому умножаем обе части на A^{-1} **справа**: $X = BA^{-1}.$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-9 & -4+6 \\ 2-6 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

3.1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ обратная матрица равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

3.2. Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
A симметрическая	$\det A \neq 0$	$\det A = 0$	все элементы A отличны от нуля

3.3. Выражение $(A^{-1})^{-1}$ равно...

1)	2)	3)	4)
E	A	A^T	$\frac{1}{A}$

3.4. Известно, что $\det A = 5$. Тогда $\det(A^{-1})$ равен...

1)	2)	3)	4)
5	-5	$\frac{1}{5}$	1

3.5. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	1	2	4

3.6. Ранг единичной матрицы четвёртого порядка равен...

1)	2)	3)	4)
1	2	4	16

3.7. Решение матричного уравнения $AX = B$ при $\det A \neq 0$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$X = A^{-1}B$	$X = BA^{-1}$	$X = B^{-1}A$	$X = AB^{-1}$

3.8. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ обратная матрица равна...

1)	2)	3)	4)
$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

3.9. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.10. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3.11. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3.12. Выполнить проверку $AA^{-1} = E$ для матрицы задания 3.11.

3.13. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

3.14. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.15. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.16. Решить матричное уравнение $AX = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3.17. Решить матричное уравнение $XA = B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.18. При каком значении λ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix}$ равен единице?

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: освоен алгоритм построения обратной матрицы, отработан метод элементарных преобразований, разобрана техника решения матричных уравнений с учётом стороны умножения.

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел 3 «Обратные матрицы и ранг» — задачи 56–75, раздел 4 «Матричные уравнения» — задачи 76–85.

Ответы к занятию 3

Тестовые задания: 3.1 — 1; 3.2 — 2; 3.3 — 2; 3.4 — 3; 3.5 — 2; 3.6 — 3; 3.7 — 1; 3.8 — 1.

Классические задания.

3.9. $\det A = -1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. 3.10. $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3.11. $\det A = 10$, $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. 3.12. $AA^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = E$.

3.13. $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3.14. 2. 3.15. 2. 3.16. $X = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. 3.17. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. 3.18. $\lambda = 6$.

Занятие 4. Системы линейных алгебраических уравнений: правило Крамера, матричный метод, метод Гаусса

Раздел: линейная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по обобщению и систематизации знаний.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение решать системы линейных алгебраических уравнений тремя методами и исследовать систему на совместность по теореме Кронекера — Капелли; познакомить с построением фундаментальной системы решений однородной системы;
- *развивающая:* развивать умение выбирать рациональный метод решения в зависимости от структуры системы;
- *воспитательная:* формировать критическое отношение к результату, привычку выполнять проверку подстановкой.

В результате занятия студент должен

знать: формулы Крамера, матричную форму записи системы, алгоритм метода Гаусса, теорему Кронекера — Капелли, понятия базисных и свободных неизвестных, фундаментальной системы решений;

уметь: решать системы по правилу Крамера и матричным методом, приводить расширенную матрицу к ступенчатому виду, исследовать систему на совместность, находить общее решение и фундаментальную систему решений.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 1, раздел 5), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какая система называется совместной? определённой?
2. Как записать систему в матричной форме?
3. При каком условии применимо правило Крамера?

4. Что такое расширенная матрица системы?
5. Сформулируйте теорему Кронекера — Капелли.
6. Может ли однородная система быть несовместной?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Система m линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме: $AX = B$, где A — матрица коэффициентов, X — столбец неизвестных, B — столбец свободных членов.

Правило Крамера (для n уравнений с n неизвестными и $\Delta = \det A \neq 0$):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_k получается из Δ заменой k -го столбца столбцом свободных членов.

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из Δ_k отличен от нуля, система несовместна; если $\Delta = 0$ и все $\Delta_k = 0$, система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений (требуется дополнительное исследование).

Матричный метод: при $\det A \neq 0$

$$X = A^{-1}B.$$

Метод Гаусса: расширенная матрица $\bar{A} = (A | B)$ элементарными преобразованиями строк приводится к ступенчатому виду, после чего неизвестные находятся обратным ходом.

Теорема Кронекера — Капелли. Система совместна тогда и только тогда, когда $\text{ранг} A = \text{ранг} \bar{A} = r$. При этом:

- если $r = n$, решение единственно;
- если $r < n$, система имеет бесконечно много решений, причём $n - r$ неизвестных объявляются свободными.

Однородная система $AX = O$ всегда совместна (имеет нулевое решение). Ненулевые решения существуют тогда и только тогда, когда $r < n$; число векторов фундаментальной системы решений равно $n - r$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Решить систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4, \\ x - 3y + 2z = -5, \\ 3x + 2y + z = 7. \end{cases}$$

Решение. Главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-3 - 4) - 1(1 - 6) + (-1)(2 + 9) = -14 + 5 - 11 = -20 \neq 0.$$

Вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -40, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-40}{-20} = 2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0.$$

Проверка подстановкой в первое уравнение: $2 \cdot 1 + 2 - 0 = 4$ — верно.

Ответ: $(1; 2; 0)$.

Пример 2. Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\det A = -2 - 3 = -5 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 - 3 \\ 8 + 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$.

Пример 3. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу и выполним прямой ход:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -11 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

(Из второй строки вычли удвоенную первую, из третьей — утроенную первую; затем вторую строку разделили на -5 и из третьей вычли вторую, умноженную на -5 .)

Обратный ход: $-6z = -6 \Rightarrow z = 1$; $y + z = 2 \Rightarrow y = 1$; $x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6 \Rightarrow x = 1$.

Ответ: $(1; 1; 1)$.

Пример 4. Исследовать систему на совместность:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\text{ранг} A = 1$, $\text{ранг} \overline{A} = 2$. Так как ранги не совпадают, по теореме Кронекера — Капелли система **несовместна** (вторая строка соответствует уравнению $0 = 1$).

Пример 5. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Приводим матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен 2, число неизвестных $n = 4$, значит, свободных неизвестных $4 - 2 = 2$. Базисные неизвестные — x_1 и x_3 , свободные — x_2 и x_4 :

$$x_1 = -2x_2 - 2x_4, \quad x_3 = -x_4.$$

Полагая $x_2 = 1, x_4 = 0$, получаем $e_1 = (-2; 1; 0; 0)$; полагая $x_2 = 0, x_4 = 1$, получаем $e_2 = (-2; 0; -1; 1)$.

Ответ: фундаментальная система решений $e_1 = (-2; 1; 0; 0)$, $e_2 = (-2; 0; -1; 1)$; общее решение $X = C_1 e_1 + C_2 e_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

4.1. Если главный определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система...

1)	2)	3)	4)
несовместна	имеет единственное решение	имеет бесконечно много решений	имеет только нулевое решение

4.2. По правилу Крамера неизвестная x_2 находится по формуле...

1)	2)	3)	4)
$x_2 = \frac{\Delta}{\Delta_2}$	$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$	$x_2 = \Delta_2 \Delta$	$x_2 = \Delta - \Delta_2$

4.3. Для системы $3x + 2y = 7$, $x - y = -1$ значение x равно...

1)	2)	3)	4)
1	2	-1	3

4.4. Однородная система линейных уравнений...

1)	2)	3)	4)
всегда совместна	всегда несовместна	всегда определённа	не имеет решений при $\Delta = 0$

4.5. Согласно теореме Кронекера — Капелли система совместна тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$\text{ранг}A = n$	$\text{ранг}A = \text{ранг}\bar{A}$	$\text{ранг}A < \text{ранг}\bar{A}$	$\det A \neq 0$

4.6. Система четырёх уравнений с четырьмя неизвестными совместна, причём $\text{ранг}A = \text{ранг}\bar{A} = 2$. Тогда число свободных неизвестных равно...

1)	2)	3)	4)
0	1	2	4

4.7. Матричная форма решения системы $AX = B$ при невырожденной матрице A имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$X = BA^{-1}$	$X = A^{-1}B$	$X = AB$	$X = BA^T$

4.8. Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, то система...

1)	2)	3)	4)
имеет решение	единственное решение	несовместна	имеет бесконечно много решений
			имеет только нулевое решение

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

4.9. Решить по правилу Крамера: $x + 2y = 5$, $3x - y = 1$.

4.10. Решить по правилу Крамера: $x + y + z = 6$, $x - y + 2z = 5$, $2x + y - z = 1$.

4.11. Решить матричным методом: $2x + y = 5$, $x + 3y = 10$.

- 4.12.** Решить методом Гаусса: $x + y + z = 2$, $2x - y + 3z = 13$, $x + 2y - z = -6$.
- 4.13.** Исследовать на совместность и найти общее решение: $x + 2y = 3$, $2x + 4y = 6$.
- 4.14.** Исследовать на совместность: $x - y = 1$, $2x - 2y = 5$.
- 4.15.** Найти фундаментальную систему решений однородной системы $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.
- 4.16.** При каком условии однородная система трёх уравнений с тремя неизвестными имеет только нулевое решение?
- 4.17.** При каких значениях λ однородная система $\lambda x + y = 0$, $x + \lambda y = 0$ имеет ненулевое решение?
- 4.18.** Записать систему задания 4.12 в матричной форме $AX = B$ и указать размеры матриц A , X , B .

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: систематизированы три метода решения систем; выработано умение выбирать метод (Крамер — для систем малой размерности с ненулевым определителем, Гаусс — универсальный метод, в том числе для прямоугольных систем).

Домашнее задание: сборник задач, часть 1, раздел 5 «Системы линейных алгебраических уравнений» — задачи 86–109; подготовиться к рубежному контролю по линейной алгебре.

Ответы к занятию 4

Тестовые задания: 4.1 — 2; 4.2 — 2; 4.3 — 1; 4.4 — 1; 4.5 — 2; 4.6 — 3; 4.7 — 2; 4.8 — 2.

Классические задания.

- 4.9.** $\Delta = -7$, $\Delta_1 = -7$, $\Delta_2 = -14$; $x = 1$, $y = 2$.
- 4.10.** $\Delta = 7$; $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
- 4.11.** $\det A = 5$; $x = 1$, $y = 3$.
- 4.12.** $(1; -2; 3)$.
- 4.13.** Система совместна и неопределённая: $\text{ранг} A = \text{ранг} \bar{A} = 1 < 2$; общее решение $x = 3 - 2y$, где y — свободная неизвестная.
- 4.14.** Система несовместна: $\text{ранг} A = 1$, $\text{ранг} \bar{A} = 2$.
- 4.15.** $\text{ранг} A = 2$, $n = 3$, фундаментальная система состоит из одного вектора $e_1 = (0; 1; 1)$; общее решение $X = C(0; 1; 1)$.
- 4.16.** Тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля.

4.17. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1.$

4.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -6 \end{pmatrix};$ размеры: $3 \times 3, 3 \times 1, 3 \times 1.$

Раздел 2. Векторная алгебра с приложениями

Занятие 5. Векторы. Линейные операции над векторами. Координаты вектора

Раздел: векторная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию первичных умений.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение находить координаты вектора по координатам его начала и конца, выполнять линейные операции в координатной форме, вычислять длину вектора, орт и направляющие косинусы, применять условие коллинеарности и формулы деления отрезка;
- *развивающая:* развивать пространственное воображение, умение переходить от геометрической модели к аналитической записи;
- *воспитательная:* формировать интерес к приложениям математики в механике и физике.

В результате занятия студент должен

знать: определение вектора, равных, коллинеарных и компланарных векторов; правила треугольника и параллелограмма; координатные формулы линейных операций; формулу длины вектора; условие коллинеарности; формулы деления отрезка в данном отношении;

уметь: находить координаты и длину вектора, выполнять линейные операции, находить орт и направляющие косинусы, раскладывать вектор по базису, определять коллинеарность векторов.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 2, разделы 1 и 2), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется вектором? Какие векторы называются равными?
2. Как найти координаты вектора, зная координаты начала и конца?

3. Как складываются векторы по правилу треугольника?
4. Чему равна длина вектора в координатной форме?
5. Какой вектор называется единичным (ортом)?
6. Какие векторы называются коллинеарными и каково условие коллинеарности?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Линейные операции в координатах. Для $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Длина (модуль) вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Орт вектора и направляющие косинусы:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

причём $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Условие коллинеарности: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad \text{или} \quad \vec{a} = \lambda \vec{b}.$$

Деление отрезка в данном отношении. Если точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB = \lambda$, то

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

В частности, координаты **середины** отрезка ($\lambda = 1$) равны полусуммам соответствующих координат концов. Координаты **точки пересечения медиан** треугольника равны средним арифметическим координат вершин.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Даны точки $A(2; -1; 3)$ и $B(-1; 4; 5)$. Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2; 4 - (-1); 5 - 3) = (-3; 5; 2);$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}.$$

Пример 2. Для вектора $\vec{a} = (2; -3; 6)$ найти длину, орт и направляющие косинусы.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7;$

$$\vec{a}^0 = \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right), \quad \cos\alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{6}{7}.$$

Проверка: $\frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1.$

Пример 3. Даны $\vec{a} = (1; -2; 0), \vec{b} = (0; 3; -1)$. Найти $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение.

$$2\vec{a} = (2; -4; 0), \quad 3\vec{b} = (0; 9; -3), \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} = (2; -13; 3).$$

Пример 4. При каком значении m векторы $\vec{a} = (m; 3; -2)$ и $\vec{b} = (4; -6; 4)$ коллинеарны?

Решение. Условие коллинеарности:

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Ответ: $m = -2.$

Пример 5. Точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB = 2:1$, где $A(1; 2), B(7; -1)$. Найти координаты точки M .

Решение. Здесь $\lambda = 2$:

$$x_M = \frac{1 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5, \quad y_M = \frac{2 + 2 \cdot (-1)}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Ответ: $M(5; 0).$

Пример 6. Разложить вектор $\vec{c} = (4; 3; 7)$ по векторам $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (2; -1; 1)$.

Решение. Ищем числа α и β такие, что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. В координатах получаем систему

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4, \\ 2\alpha - \beta = 3, \\ 3\alpha + \beta = 7. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений: $\alpha = 2, \beta = 1$. Третье уравнение выполняется: $6 + 1 = 7$.

Ответ: $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}.$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

5.1. Даны точки $A(2; -1; 3)$ и $B(-1; 4; 5)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны...

1)	2)	3)	4)
$(-3; 5; -2)$	$(-3; 5; 2)$	$(1; 3; 8)$	$(3; -5; -2)$

5.2. Длина вектора $\vec{a} = (2; -3; 6)$ равна...

1)	2)	3)	4)
11	7	5	49

5.3. Даны $\vec{a} = (1; -2; 0)$, $\vec{b} = (0; 3; -1)$. Тогда $2\vec{a} + 3\vec{b}$ равно...

1)	2)	3)	4)
$(1; 1; -1)$	$(2; -13; 3)$	$(2; 5; -3)$	$(3; 0; -2)$

5.4. Векторы $\vec{a} = (m; 3; -2)$ и $\vec{b} = (4; -6; 4)$ коллинеарны при m , равном...

1)	2)	3)	4)
-2	2	8	-8

5.5. Орт вектора $\vec{a} = (6; -3; 2)$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\left(\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right)$	$\left(\frac{6}{49}; -\frac{3}{49}; \frac{2}{49}\right)$	$\left(\frac{3}{7}; -\frac{3}{14}; \frac{1}{7}\right)$	$\left(\frac{7}{6}; -\frac{7}{3}; \frac{7}{2}\right)$

5.6. Если $|\vec{a}| = 4$, то длина вектора $-3\vec{a}$ равна...

1)	2)	3)	4)
4	-12	12	81

5.7. Середина отрезка с концами $A(-1; 3)$ и $B(5; -7)$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(2; -2)$	$(4; -4)$	$(-3; 5)$	$(6; -10)$

5.8. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами $A(1; 2)$, $B(4; -1)$, $C(1; 5)$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(3; 3)$	$(2; 2)$	$(6; 6)$	$(2; 3)$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

- 5.9. Даны точки $A(-2; 3; 1)$ и $B(4; -1; 5)$. Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$.
- 5.10. Найти длину и орт вектора $\vec{a} = (3; -4; 12)$.
- 5.11. Даны $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-1; 4; 0)$. Найти $3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 5.12. При каком значении m векторы $(m; -4; 6)$ и $(3; -2; 3)$ коллинеарны?
- 5.13. Разложить вектор $\vec{c} = (5; 2; 7)$ по векторам $\vec{a} = (1; 1; 2)$ и $\vec{b} = (2; -1; 1)$.
- 5.14. Найти координаты середины отрезка с концами $A(3; -5; 2)$ и $B(-1; 7; 4)$.
- 5.15. Точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB = 3:2$, где $A(0; 5)$, $B(5; 0)$. Найти координаты точки M .
- 5.16. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(1; 2)$, $B(4; -1)$, $C(1; 5)$.
- 5.17. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$, если $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (3; -2; 6)$.
- 5.18. Найти вектор, противоположно направленный вектору $\vec{a} = (1; -2; 2)$ и имеющий длину 6.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработан переход «точки — вектор — координаты», закреплены формулы длины, орта, деления отрезка.

Домашнее задание: сборник задач, часть 2, раздел 2, § 7 «Линейные операции над векторами» и § 11 «Прямоугольные координаты на плоскости».

Ответы к занятию 5

Тестовые задания: 5.1 — 2; 5.2 — 2; 5.3 — 3; 5.4 — 1; 5.5 — 1; 5.6 — 3; 5.7 — 1; 5.8 — 2.

Классические задания.

5.9. $\overrightarrow{AB} = (6; -4; 4)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

5.10. $|\vec{a}| = 13$, $\vec{a}^0 = \left(\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

5.11. $(8; -11; 9)$. 5.12. $m = 6$. 5.13. $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$.

5.14. $(1; 1; 3)$. 5.15. $M(3; 2)$. 5.16. $(2; 2)$. 5.17. $|\vec{a} + \vec{b}| = |(4; 0; 4)| = 4\sqrt{2}$.

5.18. $|\vec{a}| = 3$, искомый вектор $-6\vec{a}^0 = (-2; 4; -4)$.

Занятие 6. Скалярное произведение векторов и его приложения

Раздел: векторная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение вычислять скалярное произведение в координатной форме и через модули и угол, находить угол между векторами, проекцию вектора на вектор, применять условие перпендикулярности; показать применение скалярного произведения к вычислению работы силы;
- *развивающая:* развивать умение применять единый аппарат к геометрическим и физическим задачам;
- *воспитательная:* формировать представление о математике как о языке естествознания.

В результате занятия студент должен

знать: определение скалярного произведения, его свойства, координатную формулу, формулу косинуса угла между векторами, условие перпендикулярности, формулу проекции, формулу работы постоянной силы;

уметь: вычислять скалярное произведение, угол между векторами, проекцию, определять перпендикулярность векторов, решать простейшие физические задачи.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 2, § 2 и § 8), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется скалярным произведением двух векторов?
2. Результат скалярного умножения — вектор или число?
3. Как записывается скалярное произведение в координатах?
4. Каково условие перпендикулярности двух ненулевых векторов?
5. Чему равно скалярное произведение вектора на самого себя?

6. В какой физической задаче встречается скалярное произведение?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами.

Координатная форма:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Свойства:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}), \quad (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}), \quad (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c});$$

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2.$$

Угол между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Условие перпендикулярности: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Проекция вектора на вектор:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

Приложение в механике. Работа постоянной силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении $\vec{s}$:

$$A = (\vec{F}, \vec{s}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi.$$

Полезное следствие: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти скалярное произведение и угол между векторами $\vec{a} = (2; -1; 3)$ и $\vec{b} = (1; 4; -2)$.

Решение.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 2 - 4 - 6 = -8;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21};$$

$$\cos\varphi = \frac{-8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{-8}{\sqrt{294}} = \frac{-8}{7\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{21} \approx -0,47.$$

Угол тупой, $\varphi \approx 118^\circ$.

Пример 2. Найти угол между векторами $\vec{a} = (1; 1; 0)$ и $\vec{b} = (0; 1; 1)$.

Решение. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 + 1 + 0 = 1$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$, откуда

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Пример 3. При каком значении m векторы $\vec{a} = (m; 2; -1)$ и $\vec{b} = (3; m; 4)$ перпендикулярны?

Решение. Условие $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ даёт

$$3m + 2m - 4 = 0 \Rightarrow 5m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Пример 4. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (3; -2; 1)$ на вектор $\vec{b} = (2; 1; -2)$.

Решение. $(\vec{a}, \vec{b}) = 6 - 2 - 2 = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$, поэтому

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{2}{3}.$$

Пример 5. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, а угол между векторами равен 60° .

Решение.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ + 16 = 9 + 12 + 16 = 37, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}.$$

Пример 6 (приложение). Сила $\vec{F} = (2; -1; 3)$ перемещает материальную точку из положения $A(1; 2; 0)$ в положение $B(4; 0; 2)$. Найти работу силы.

Решение. Перемещение $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (3; -2; 2)$, тогда

$$A = (\vec{F}, \vec{s}) = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 6 + 2 + 6 = 14 \text{ (единиц работы)}.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

6.1. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2; -1; 3)$ и $\vec{b} = (1; 4; -2)$ равно...

1)	2)	3)	4)
8	-8	0	12

6.2. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$	$(\vec{a}, \vec{b}) = 1$	$ \vec{a} = \vec{b} $	$\vec{a} = \lambda \vec{b}$

6.3. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{a})$ равно...

1)	2)	3)	4)
0	$ \vec{a} $	$ \vec{a} ^2$	1

6.4. Угол между векторами $\vec{a} = (1; 1; 0)$ и $\vec{b} = (0; 1; 1)$ равен...

1)	2)	3)	4)
30°	45°	60°	90°

6.5. Если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ и угол между векторами равен 60°, то $(\vec{a}, \vec{b})$ равно...

1)	2)	3)	4)
15	7,5	-7,5	8

6.6. Векторы $(m; 2; -1)$ и $(3; m; 4)$ перпендикулярны при m , равном...

1)	2)	3)	4)
0,8	-0,8	4	-4

6.7. Проекция вектора $\vec{a} = (3; -2; 1)$ на вектор $\vec{b} = (2; 1; -2)$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

6.8. Работа постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ вычисляется по формуле...

1)	2)	3)	4)
$A = \vec{F} \cdot \vec{s} $	$A = (\vec{F}, \vec{s})$	$A = [\vec{F}, \vec{s}] $	$A = \frac{(\vec{F}, \vec{s})}{ \vec{s} }$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

6.9. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, если $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (4; 0; -1)$.

6.10. Найти угол между векторами $\vec{a} = (1; 2; 2)$ и $\vec{b} = (2; 1; -2)$.

6.11. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, угол между векторами равен 120°.

6.12. При каком значении λ векторы $(\lambda; 3; -2)$ и $(4; -1; \lambda)$ перпендикулярны?

6.13. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (2; 3; -1)$ на вектор $\vec{b} = (1; -2; 2)$.

6.14. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (2; 2; 1)$ и $\vec{b} = (1; 0; 0)$.

6.15. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, угол между векторами равен 60° .

6.16. Сила $\vec{F} = (3; -2; 1)$ перемещает точку из $A(1; -1; 2)$ в $B(4; 1; 0)$. Найти работу силы.

6.17. Доказать, что треугольник с вершинами $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(1; 5)$ прямоугольный, и найти длины его сторон.

6.18. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (1; -2; 2)$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: закреплена координатная формула скалярного произведения и её применения — угол, проекция, перпендикулярность, работа силы.

Домашнее задание: сборник задач, часть 2, § 8 «Скалярное произведение» и § 12 «Приложения и комбинированные задачи».

Ответы к занятию 6

Тестовые задания: 6.1 — 2; 6.2 — 1; 6.3 — 3; 6.4 — 3; 6.5 — 2; 6.6 — 1; 6.7 — 1; 6.8 — 2.

Классические задания.

6.9. 1. **6.10.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, следовательно, $\varphi = 90^\circ$. **6.11.** -3 . **6.12.** $\lambda = 1,5$.

6.13. $(\vec{a}, \vec{b}) = -6$, $|\vec{b}| = 3$, проекция равна -2 . **6.14.** $\cos \varphi = \frac{2}{3}$.

6.15. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{25 + 15 + 9} = 7$. **6.16.** $A = 3$.

6.17. $\overrightarrow{AB} = (3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 4)$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ — угол A прямой; $|AB| = 3$, $|AC| = 4$, $|BC| = 5$.

6.18. $|\vec{a}| = 3$; $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$.

Занятие 7. Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения

Раздел: векторная алгебра. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и их применению.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение вычислять векторное и смешанное произведения в координатной форме, применять их к вычислению площадей и объёмов, к проверке коллинеарности и компланарности, к нахождению момента силы;
- *развивающая:* развивать пространственное мышление и навык работы с определителями;
- *воспитательная:* показать прикладную значимость векторной алгебры в механике.

В результате занятия студент должен

знать: определение векторного произведения и его геометрический смысл, координатную формулу через определитель третьего порядка, определение смешанного произведения, условия коллинеарности и компланарности, формулы площади треугольника и объёма тетраэдра;

уметь: вычислять векторное и смешанное произведения, находить площади параллелограмма и треугольника, объёмы параллелепипеда и тетраэдра, проверять компланарность, вычислять момент силы.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 2, § 3, § 5, § 6, § 9, § 10), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что является результатом векторного умножения — число или вектор?
2. Как направлен вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$?
3. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения?
4. Чему равно $[\vec{a}, \vec{a}]$?

5. Что называется смешанным произведением трёх векторов?

6. Каково условие компланарности трёх векторов?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ — вектор, который:

- 1) перпендикулярен обоим сомножителям; 2) направлен так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ правая; 3) имеет модуль $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$.

Координатная формула:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Свойства: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$; $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$; $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

Геометрические приложения:

$$S_{\text{парал.}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Смешанное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения:

$$V_{\text{парал-да}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|, \quad V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Условие компланарности: три вектора компланарны тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Момент силы. Момент силы $\vec{F}$, приложенной в точке A , относительно точки O :

$$\vec{M} = [\overrightarrow{OA}, \vec{F}].$$

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти векторное произведение и его модуль для $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; 4; -2)$.

Решение.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{i}(2 - 12) - \vec{j}(-4 - 3) + \vec{k}(8 + 1) = (-10; 7; 9);$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{100 + 49 + 81} = \sqrt{230}.$$

Контроль: полученный вектор должен быть перпендикулярен обоим сомножителям:
 $(-10) \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + 9 \cdot 3 = -20 - 7 + 27 = 0$ — верно.

Пример 2. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 4; -3)$;

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (15; 12; 16);$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25, \quad S_{\Delta} = \frac{25}{2} = 12,5.$$

Пример 3. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$, $\vec{c} = (0; 1; -2)$ и найти объём построенного на них параллелепипеда и тетраэдра.

Решение.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(2 - 1) - 2(-4 - 0) + 3(2 - 0) = 1 + 8 + 6 = 15.$$

$$V_{\text{парал-да}} = 15, \quad V_{\text{тетраэдра}} = \frac{15}{6} = 2,5.$$

Так как смешанное произведение положительно, тройка векторов правая.

Пример 4. При каком значении λ векторы $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (2; -1; 3)$, $\vec{c} = (\lambda; 1; 1)$ компланарны?

Решение. Условие компланарности:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1 - 3) - 2(2 - 3\lambda) - (2 + \lambda) = -4 - 4 + 6\lambda - 2 - \lambda = 5\lambda - 10 = 0.$$

Ответ: $\lambda = 2$.

Пример 5 (приложение). Найти момент силы $\vec{F} = (1; -2; 3)$, приложенной в точке $A(2; 1; 0)$, относительно начала координат.

Решение.

$$\vec{M} = [\vec{OA}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (3; -6; -5), \quad |\vec{M}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

7.1. Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ для $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$ равно...

1)	2)	3)	4)
$(5; 5; -5)$	$(-5; -5; 5)$	$(5; 5; 5)$	$(2; -2; 3)$

7.2. Модуль векторного произведения численно равен...

1)	2)	3)	4)
объёму параллелепипеда	площади построенного на векторах	параллелограмма, площади треугольника	длине проекции

7.3. Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{a}]$ равно...

1)	2)	3)	4)
$ \vec{a} ^2$	1	$\vec{0}$	$2\vec{a}$

7.4. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$	$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$	$ \vec{a} = \vec{b} $	$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} $

7.5. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{AB} = (3; 0; 0)$ и $\vec{AC} = (0; 4; 0)$, равна...

1)	2)	3)	4)
12	6	24	5

7.6. Смешанное произведение векторов $(1; 2; 3)$, $(2; -1; 1)$, $(0; 1; -2)$ равно...

1)	2)	3)	4)
0	15	-15	5

7.7. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение...

1)	2)	3)	4)
положительно	отрицательно	равно нулю	равно единице

7.8. Смешанное произведение трёх векторов равно 18. Тогда объём тетраэдра, построенного на этих векторах, равен...

1)	2)	3)	4)
18	9	6	3

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

7.9. Найти $[\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 4)$.

7.10. Найти $||[\vec{a}, \vec{b}]||$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, угол между векторами равен 30° .

7.11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 2; 2)$ и $\vec{b} = (2; 1; -2)$.

7.12. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

7.13. Вычислить смешанное произведение векторов $(1; -1; 2)$, $(2; 1; -1)$, $(3; 0; 1)$ и сделать вывод о их взаимном расположении.

7.14. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $(1; 2; 3)$, $(2; -1; 1)$, $(0; 1; -2)$.

7.15. Найти объём тетраэдра с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(0; 1; -2)$.

7.16. При каком значении λ векторы $(2; 1; \lambda)$, $(1; -1; 2)$, $(3; 0; 1)$ компланарны?

7.17. Найти момент силы $\vec{F} = (2; 1; -1)$, приложенной в точке $A(1; 0; 2)$, относительно начала координат.

7.18. Проверить, что вектор, найденный в задании 7.9, перпендикулярен обоим сомножителям.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: сопоставлены три произведения векторов — скалярное (число), векторное (вектор) и смешанное (число); установлено их геометрическое и механическое содержание.

Домашнее задание: сборник задач, часть 2, § 9 «Векторное произведение» и § 10 «Смешанное произведение»; подготовиться к типовому варианту контрольной работы по векторной алгебре.

Ответы к занятию 7

Тестовые задания: 7.1 — 1; 7.2 — 2; 7.3 — 3; 7.4 — 2; 7.5 — 2; 7.6 — 2; 7.7 — 3; 7.8 — 4.

Классические задания.

7.9. $(10; -9; -7)$. **7.10.** $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = 3 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 6$.

7.11. $[\vec{a}, \vec{b}] = (-6; 6; -3), S = 9.$

7.12. $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3), \overrightarrow{AC} = (3; 2; 1), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 8; -4), S = 2\sqrt{6}.$

7.13. Смешанное произведение равно нулю, следовательно, векторы компланарны.

7.14. 15. **7.15.** $V = \frac{15}{6} = 2,5.$ **7.16.** $\lambda = -1.$ **7.17.** $\vec{M} = (-2; 5; 1).$

7.18. $(10; -9; -7) \cdot (2; 3; -1) = 20 - 27 + 7 = 0$ и $(10; -9; -7) \cdot (1; -2; 4) = 10 + 18 - 28 = 0$ — перпендикулярность подтверждена.

Раздел 3. Аналитическая геометрия

Занятие 8. Прямая на плоскости

Раздел: аналитическая геометрия. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение составлять уравнение прямой в различных видах, находить угол между прямыми, точку пересечения, расстояние от точки до прямой, применять условия параллельности и перпендикулярности;
- *развивающая:* развивать умение переводить геометрическое условие на язык уравнений;
- *воспитательная:* воспитывать аккуратность при построении чертежа и оформлении решения.

В результате занятия студент должен

знать: общее уравнение прямой, уравнение с угловым коэффициентом, уравнения прямой через две точки и в отрезках, канонические уравнения, формулу угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности, формулу расстояния от точки до прямой;

уметь: составлять уравнение прямой по различным исходным данным, находить угол между прямыми и расстояние от точки до прямой, решать задачи на треугольник (высота, медиана).

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 3, § 1 и § 7), карточки с тестовыми заданиями, чертёжные принадлежности.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какой вид имеет общее уравнение прямой на плоскости?
2. Что называется угловым коэффициентом прямой?
3. Как связаны угловые коэффициенты параллельных прямых? перпендикулярных?

4. Какой вектор называется нормальным вектором прямой? направляющим?
5. Как найти точку пересечения двух прямых?
6. Как вычислить расстояние от точки до прямой?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$; вектор $\vec{n} = (A; B)$ — нормальный вектор прямой, вектор $\vec{s} = (-B; A)$ — направляющий.

Уравнение с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$, α — угол наклона прямой к оси Ox .

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k :

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Уравнение прямой через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Уравнение в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Условие параллельности: $k_1 = k_2$. **Условие перпендикулярности:** $k_1 k_2 = -1$, то есть $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(3; -4)$.

Решение. По формуле прямой через две точки:

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 2}{-4 - 2}, \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-6}.$$

Отсюда $-6(x - 1) = 2(y - 2)$, то есть $-6x + 6 = 2y - 4$, окончательно

$$3x + y - 5 = 0, \quad \text{или} \quad y = -3x + 5.$$

Проверка: подставим координаты точки B : $9 - 4 - 5 = 0$ — верно.

Пример 2. Найти угол между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $3x + y - 1 = 0$.

Решение. Приведём к виду с угловым коэффициентом: $y = 2x + 3$, значит, $k_1 = 2$; $y = -3x + 1$, значит, $k_2 = -3$.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 - 2}{1 + 2 \cdot (-3)} = \frac{-5}{-5} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Пример 3. Найти расстояние от точки $M(3; -2)$ до прямой $4x - 3y + 5 = 0$.

Решение.

$$d = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|12 + 6 + 5|}{5} = \frac{23}{5} = 4,6.$$

Пример 4. Через точку $M(2; -1)$ провести прямую: а) параллельно прямой $3x - 2y + 7 = 0$; б) перпендикулярно ей.

Решение. а) Параллельная прямая имеет тот же нормальный вектор, поэтому её уравнение $3x - 2y + C = 0$. Подставим координаты точки M : $6 + 2 + C = 0$, откуда $C = -8$ и

$$3x - 2y - 8 = 0.$$

б) У перпендикулярной прямой нормальный вектор — направляющий вектор исходной, поэтому её уравнение $2x + 3y + C = 0$. Подставим M : $4 - 3 + C = 0$, $C = -1$ и

$$2x + 3y - 1 = 0.$$

Пример 5. Найти точку пересечения прямых $x + 2y - 5 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$.

Решение. Из первого уравнения $x = 5 - 2y$. Подставим во второе:

$$2(5 - 2y) - y + 5 = 0, \quad 10 - 4y - y + 5 = 0, \quad 5y = 15, \quad y = 3, \quad x = -1.$$

Ответ: $(-1; 3)$.

Пример 6. В треугольнике с вершинами $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(2; 6)$ составить уравнения высоты и медианы, проведённых из вершины A .

Решение. Высота перпендикулярна стороне BC , поэтому её нормальным вектором служит $\overrightarrow{BC} = (-3; 3)$:

$$-3(x - 1) + 3(y - 1) = 0 \Rightarrow -3x + 3y = 0 \Rightarrow x - y = 0.$$

Медиана проходит через A и середину M стороны BC : $M(3,5; 4,5)$. Угловой коэффициент

$$k = \frac{4,5 - 1}{3,5 - 1} = \frac{3,5}{2,5} = \frac{7}{5}, \text{ поэтому}$$

$$y - 1 = \frac{7}{5}(x - 1) \Rightarrow 7x - 5y - 2 = 0.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

8.1. Угловой коэффициент прямой $3x - 2y + 6 = 0$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$

8.2. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 2)$ с угловым коэффициентом $k = -1$, имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$y = -x + 2$	$y = x + 2$	$y = -x - 2$	$y = 2x - 1$

8.3. Прямые $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 5$...

1)	2)	3)	4)
пересекаются под углом 45°	параллельны	перпендикулярны	совпадают

8.4. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной прямой $y = 3x + 1$, равен...

1)	2)	3)	4)
3	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

8.5. Расстояние от начала координат до прямой $3x + 4y - 10 = 0$ равно...

1)	2)	3)	4)
10	2	$\frac{10}{7}$	5

8.6. Нормальный вектор прямой $5x - 2y + 1 = 0$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(5; -2)$	$(2; 5)$	$(-2; 5)$	$(5; 2)$

8.7. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(3; -4)$, имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$3x + y - 5 = 0$	$3x - y - 1 = 0$	$x + 3y - 7 = 0$	$x - 3y + 5 = 0$

8.8. Точка пересечения прямых $x + 2y - 5 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
(1; 2)	(-1; 3)	(3; 1)	(-3; 1)

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

8.9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$ с угловым коэффициентом $k = 2$.

8.10. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 4)$ и $B(3; 0)$.

8.11. Найти угол между прямыми $3x - y + 2 = 0$ и $x + 2y - 4 = 0$.

8.12. Найти расстояние от точки $M(-2; 3)$ до прямой $5x - 12y + 2 = 0$.

8.13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -2)$ параллельно прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

8.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -2)$ перпендикулярно прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

8.15. Найти точку пересечения прямых $3x - y - 7 = 0$ и $x + 2y - 7 = 0$.

8.16. Записать уравнение прямой $3x - 4y + 12 = 0$ в отрезках и указать точки пересечения с осями координат.

8.17. В треугольнике $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(2; 6)$ составить уравнение высоты, проведённой из вершины A .

8.18. В том же треугольнике составить уравнение медианы, проведённой из вершины A .

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны все основные виды уравнения прямой и метрические задачи на плоскости.

Домашнее задание: сборник задач, часть 3, § 7 «Прямая на плоскости»; повторить понятие нормального вектора.

Ответы к занятию 8

Тестовые задания: 8.1 — 1; 8.2 — 1; 8.3 — 2; 8.4 — 4; 8.5 — 2; 8.6 — 1; 8.7 — 1; 8.8 — 2.

Классические задания.

8.9. $2x - y - 7 = 0$. **8.10.** $x + y - 3 = 0$. **8.11.** $\operatorname{tg} \varphi = 7$, $\varphi = \operatorname{arctg} 7 \approx 82^\circ$.

8.12. $d = \frac{44}{13}$. **8.13.** $2x + 3y + 4 = 0$. **8.14.** $3x - 2y - 7 = 0$. **8.15.** (3; 2).

8.16. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$; прямая пересекает оси в точках $(-4; 0)$ и $(0; 3)$.

8.17. $x - y = 0$. **8.18.** $7x - 5y - 2 = 0$.

Занятие 9. Плоскость и прямая в пространстве

Раздел: аналитическая геометрия. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение составлять уравнение плоскости и уравнения прямой в пространстве, находить углы между плоскостями, между прямыми, между прямой и плоскостью, расстояние от точки до плоскости и точку пересечения прямой с плоскостью;
- *развивающая:* развивать пространственные представления и умение использовать векторный аппарат;
- *воспитательная:* формировать настойчивость при решении многошаговых задач.

В результате занятия студент должен

знать: общее уравнение плоскости и смысл её коэффициентов, уравнение плоскости через точку с заданной нормалью и через три точки, формулу расстояния от точки до плоскости, канонические и параметрические уравнения прямой, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости;

уметь: составлять уравнения плоскости и прямой, находить углы и расстояния, определять точку пересечения прямой и плоскости.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 3, § 2, § 3, § 4, § 8, § 9, § 10), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какой вид имеет общее уравнение плоскости?
2. Каков геометрический смысл коэффициентов A , B , C ?
3. Сколько точек однозначно определяют плоскость?
4. Что называется направляющим вектором прямой в пространстве?
5. При каком условии прямая параллельна плоскости?

6. При каком условии прямая перпендикулярна плоскости?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$; вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ — нормальный вектор плоскости.

Плоскость через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ с нормалью $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Плоскость через три точки M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между плоскостями равен углу между их нормальями:

$$\cos \varphi = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Канонические уравнения прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (m; p; q)$, проходящей через M_0 :

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q};$$

параметрические уравнения: $x = x_0 + mt, y = y_0 + pt, z = z_0 + qt$.

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $(\vec{n}, \vec{s}) = 0$. **Условие перпендикулярности:** $\vec{n}$ и $\vec{s}$ коллинеарны.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Решение.

$$1 \cdot (x - 2) + 2(y + 1) - 2(z - 3) = 0 \Rightarrow x + 2y - 2z + 6 = 0.$$

Проверка: $2 - 2 - 6 + 6 = 0$ — точка M принадлежит плоскости.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

Решение. Точки лежат на осях координат, поэтому удобно воспользоваться уравнением в отрезках:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

Умножив на 6, получим общее уравнение: $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Пример 3. Найти расстояние от точки $M(1; 1; 1)$ до плоскости $2x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение.

$$d = \frac{|2 - 2 + 1 - 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{5}{3}.$$

Пример 4. Найти угол между плоскостями $x + y + z - 1 = 0$ и $x - y + z + 2 = 0$.

Решение. $\vec{n}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{n}_2 = (1; -1; 1)$;

$$\cos \varphi = \frac{|1 - 1 + 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5^\circ.$$

Пример 5. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1; -2; 3)$ и $B(3; 0; -1)$.

Решение. Направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (2; 2; -4)$; сократив на 2, возьмём $\vec{s} = (1; 1; -2)$:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{-2}.$$

Пример 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ с плоскостью $x + 2y - z + 4 = 0$.

Решение. Запишем параметрические уравнения прямой: $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3t$ и подставим в уравнение плоскости:

$$(1 + 2t) + 2(-1 - t) - 3t + 4 = 0 \Rightarrow 3 - 3t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

При $t = 1$ получаем $x = 3$, $y = -2$, $z = 3$.

Ответ: $(3; -2; 3)$.

Пример 7. Найти угол между прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (2; 1; 2)$ и плоскостью $2x - y + 2z - 5 = 0$.

Решение. $\vec{n} = (2; -1; 2)$, $|\vec{n}| = |\vec{s}| = 3$;

$$\sin \varphi = \frac{|4 - 1 + 4|}{3 \cdot 3} = \frac{7}{9}, \quad \varphi = \arcsin \frac{7}{9} \approx 51^\circ.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

9.1. Нормальный вектор плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(2; -3; 1)$	$(2; 3; 1)$	$(-3; 1; -5)$	$(2; -3; -5)$

9.2. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3; 0; -1)$, имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$3x - z - 1 = 0$	$3x - z + 1 = 0$	$3x - y + 2z = 0$	$3x - z - 5 = 0$

9.3. Расстояние от точки $M(1; 1; 1)$ до плоскости $2x - 2y + z - 6 = 0$ равно...

1)	2)	3)	4)
5	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$	3

9.4. Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
их нормальные векторы коллинеарны	их нормальные векторы перпендикулярны	скалярное произведение нормалей равно нулю	их свободные члены равны

9.5. Направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
$(1; -3; 0)$	$(2; -1; 4)$	$(-2; 1; -4)$	$(1; 3; 0)$

9.6. Прямая перпендикулярна плоскости тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$(\vec{n}, \vec{s}) = 0$	векторы $\vec{n}$ и $\vec{s}$ коллинеарны	$ \vec{n} = \vec{s} $	$[\vec{n}, \vec{s}] = \vec{0}$ и $(\vec{n}, \vec{s}) = 0$

9.7. Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда...

1)	2)	3)	4)
$(\vec{n}, \vec{s}) = 0$	$\vec{n} = \lambda \vec{s}$	$[\vec{n}, \vec{s}] = \vec{0}$	$D = 0$

9.8. Через начало координат проходит плоскость...

1)	2)	3)	4)
$x + y + z - 1 = 0$	$2x - y + 3z = 0$	$x + 2y + 4 = 0$	$z = 5$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

9.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; -1; 3)$.

9.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

9.11. Найти расстояние от точки $M(3; 1; -2)$ до плоскости $2x - y + 2z - 7 = 0$.

9.12. Найти угол между плоскостями $x + y + z - 1 = 0$ и $x - y + z + 2 = 0$.

9.13. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(4; 3; -1)$.

9.14. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ с плоскостью $x + 2y - z + 4 = 0$.

9.15. Найти угол между прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (2; 1; 2)$ и плоскостью $2x - y + 2z - 5 = 0$.

9.16. При каком значении A плоскость $Ax + 2y - z + 3 = 0$ параллельна прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (1; -1; 2)$?

9.17. Записать параметрические уравнения прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$.

9.18. Проверить, принадлежит ли точка $M(1; 2; -1)$ плоскости $3x - y + 2z + 1 = 0$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: освоен единый подход к задачам стереометрии — через нормальный и направляющий векторы.

Домашнее задание: сборник задач, часть 3, § 8 «Плоскость в пространстве», § 9 «Прямая в пространстве», § 10 «Взаимное расположение прямой и плоскости».

Ответы к занятию 9

Тестовые задания: 9.1 — 1; 9.2 — 1; 9.3 — 2; 9.4 — 1; 9.5 — 2; 9.6 — 2; 9.7 — 1; 9.8 — 2.

Классические задания.

9.9. $2x - y + 3z + 4 = 0$. **9.10.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1$, или $6x - 4y + 3z - 12 = 0$.

9.11. $d = \frac{|6-1-4-7|}{3} = 2$. **9.12.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi = \arccos\frac{1}{3} \approx 70,5^\circ$.

9.13. $\vec{s} = (1; 2; -2)$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$.

9.14. $(3; -2; 3)$. **9.15.** $\sin\varphi = \frac{7}{9}$, $\varphi \approx 51^\circ$. **9.16.** $A = 4$.

9.17. $x = 1 + 3t$, $y = -2 - t$, $z = 2t$. **9.18.** $3 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$ — точка принадлежит плоскости.

Занятие 10. Кривые и поверхности второго порядка

Раздел: аналитическая геометрия. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и систематизации знаний.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду выделением полных квадратов, находить их параметры (полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты, директрисы), распознавать поверхности второго порядка по каноническим уравнениям;
- *развивающая:* развивать умение классифицировать объекты по существенным признакам;
- *воспитательная:* воспитывать графическую культуру.

В результате занятия студент должен

знать: канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы и их геометрические характеристики; канонические уравнения основных поверхностей второго порядка;

уметь: выделять полные квадраты и приводить уравнение к каноническому виду, находить параметры кривой, строить эскиз кривой, определять вид поверхности по уравнению.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 3, § 5, § 6, § 11, § 12), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Какое уравнение задаёт окружность с центром в точке $C(x_0; y_0)$?
2. Как связаны полуоси эллипса и его фокусное расстояние?
3. Что называется эксцентриситетом? В каких пределах он изменяется для эллипса? для гиперболы?
4. Что такое асимптоты гиперболы?

5. Как расположена парабола, заданная уравнением $y^2 = 2px$ при $p > 0$?
6. Какие поверхности второго порядка вам известны?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Окружность: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > b > 0$; $c^2 = a^2 - b^2$; фокусы $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$; эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$; директрисы $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$; асимптоты

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Парабола: $y^2 = 2px$; фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$; директриса $x = -\frac{p}{2}$; $\varepsilon = 1$.

Приведение к каноническому виду выполняется выделением полных квадратов и переносом начала координат в центр кривой.

Поверхности второго порядка:

Уравнение	Поверхность
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	сфера
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	эллипсоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	однополостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	двуполостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$	конус второго порядка
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	эллиптический параболоид
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	гиперболический параболоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллиптический цилиндр

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 12 + 9 + 4, \quad (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Ответ: центр $C(3; -2)$, радиус $R = 5$.

Пример 2. Для эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и директрисы.

Решение. $a = 5, b = 3, c = \sqrt{25 - 9} = 4$;

$$F_1(-4; 0), \quad F_2(4; 0), \quad \varepsilon = \frac{4}{5} = 0,8, \quad x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{25}{4}.$$

Пример 3. Для гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты.

Решение. $a = 4, b = 3, c = \sqrt{16 + 9} = 5$;

$$F_1(-5; 0), \quad F_2(5; 0), \quad \varepsilon = \frac{5}{4} = 1,25, \quad y = \pm \frac{3}{4}x.$$

Пример 4. Для параболы $y^2 = 8x$ найти параметр, фокус и директрису.

Решение. $2p = 8$, значит, $p = 4$; фокус $F(2; 0)$, директриса $x = -2$. Парабола симметрична относительно оси Ox и открыта вправо.

Пример 5. Привести уравнение $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ к каноническому виду и определить вид кривой.

Решение. Сгруппируем и выделим полные квадраты:

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) - 11 = 9(x - 1)^2 - 9 + 4(y + 2)^2 - 16 - 11 = 0;$$

$$9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 36, \quad \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1.$$

Ответ: эллипс с центром $C(1; -2)$, полуосями 2 (вдоль оси Ox) и 3 (вдоль оси Oy); большая ось вертикальна, $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

Пример 6. Определить вид поверхностей: а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; в) $z = x^2 + y^2$; г) $x^2 + y^2 = 4$; д) $x^2 + y^2 = z^2$.

Решение. а) эллипсоид с полуосями 2, 3, 4; б) однополостный гиперболоид; в) эллиптический (в данном случае круговой) параболоид; г) круговой цилиндр радиуса 2 с образующими, параллельными оси Oz ; д) конус второго порядка с вершиной в начале координат.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

10.1. Уравнение окружности с центром $C(3; -2)$ и радиусом 5 имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$	$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$	$(x - 3)^2 - (y + 2)^2 = 25$

10.2. Эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ равен...

1)	2)	3)	4)
0,6	0,8	1,25	$\frac{3}{5}$

10.3. Асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ задаются уравнениями...

1)	2)	3)	4)
$y = \pm \frac{4}{3}x$	$y = \pm \frac{3}{4}x$	$y = \pm \frac{9}{16}x$	$y = \pm x$

10.4. Фокус параболы $y^2 = 8x$ имеет координаты...

1)	2)	3)	4)
(4; 0)	(2; 0)	(0; 2)	(-2; 0)

10.5. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
сферу радиуса 3	сферу радиуса 9	эллипсоид	круговой цилиндр

10.6. Уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
эллипсоид	однополостный гиперболоид	двуполостный гиперболоид	конус

10.7. Уравнение $z = x^2 + y^2$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
конус	гиперболический параболоид	эллиптический параболоид	однополостный гиперболоид

10.8. В пространстве уравнение $x^2 + y^2 = 4$ задаёт...

1)	2)	3)	4)
окружность	круговой цилиндр	сферу	конус

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

10.9. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

10.10. Составить уравнение окружности с центром $C(1; -2)$, проходящей через точку $A(4; 2)$.

10.11. Для эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти полуоси, фокусы и эксцентриситет.

10.12. Для гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты.

10.13. Для параболы $x^2 = -6y$ найти параметр, фокус и директрису.

10.14. Привести уравнение $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ к каноническому виду и определить вид кривой.

10.15. Привести уравнение $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ к каноническому виду и определить вид кривой.

10.16. Определить вид поверхности $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$.

10.17. Определить вид поверхности $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$.

10.18. Составить уравнение сферы с центром $C(1; -2; 3)$ радиуса 4.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: систематизированы канонические уравнения кривых и поверхностей второго порядка; отработан приём выделения полных квадратов.

Домашнее задание: сборник задач, часть 3, § 11 «Кривые второго порядка», § 12 «Поверхности второго порядка»; подготовиться к типовому варианту контрольной работы по аналитической геометрии.

Ответы к занятию 10

Тестовые задания: 10.1 — 1; 10.2 — 2; 10.3 — 2; 10.4 — 2; 10.5 — 1; 10.6 — 2; 10.7 — 3; 10.8 — 2.

Классические задания.

10.9. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; центр $C(-2; 3)$, $R = 4$.

10.10. $R = \sqrt{9 + 16} = 5$; $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

10.11. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$, $\varepsilon = 0,8$.

10.12. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$, $\varepsilon = 1,25$, асимптоты $y = \pm \frac{3}{4}x$.

10.13. $2p = 6$, $p = 3$; фокус $F(0; -1,5)$, директриса $y = 1,5$; ветви направлены вниз.

10.14. $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ — эллипс с центром $C(1; -2)$, $a = 3$, $b = 2$.

10.15. $\frac{(x+3)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$ — гипербола с центром $C(-3; 1)$, $a = 2$, $b = 1$.

10.16. Двуполостный гиперболоид. **10.17.** Гиперболический параболоид.

10.18. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Раздел 4. Предел функции

Занятие 11. Область определения функции. Предел функции. Раскрытие неопределённостей

Раздел: предел функции. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию первичных умений.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение находить область определения функции, вычислять пределы, раскрывать неопределённости вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty - \infty$ методами разложения на множители, деления на старшую степень и умножения на сопряжённое выражение;
- *развивающая:* развивать умение распознавать тип неопределённости и выбирать соответствующий приём;
- *воспитательная:* воспитывать внимательность при преобразованиях алгебраических выражений.

В результате занятия студент должен

знать: определение области определения функции и предела функции в точке и на бесконечности, основные теоремы о пределах, виды неопределённостей и приёмы их раскрытия;

уметь: находить область определения, вычислять пределы рациональных и иррациональных выражений, раскрывать неопределённости.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, § 1, § 2, § 11, § 12), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется областью определения функции?
2. Какие ограничения накладывают дробь, квадратный корень, логарифм?

3. Что означает запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
4. Чему равен предел суммы, произведения, частного?
5. Какие выражения называются неопределённостями?
6. Как раскрывается неопределённость $\frac{0}{0}$ для рациональной дроби?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Область определения. Ограничения: знаменатель дроби отличен от нуля; подкоренное выражение корня чётной степени неотрицательно; аргумент логарифма положителен.

Основные теоремы о пределах. Если пределы существуют, то

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g) = \lim_{x \rightarrow a} f \pm \lim_{x \rightarrow a} g, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g) = \lim_{x \rightarrow a} f \cdot \lim_{x \rightarrow a} g, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f}{\lim_{x \rightarrow a} g} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g \neq 0).$$

Неопределённости: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Приёмы раскрытия.

1. Неопределённость $\frac{0}{0}$ для рациональной дроби: разложить числитель и знаменатель на множители и сократить на $(x - a)$.
2. Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ для отношения многочленов: разделить числитель и знаменатель на старшую степень x . При этом

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

3. Иррациональности: умножить и разделить на сопряжённое выражение, используя формулу $(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v}) = u - v$.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 3}$.

Решение. Требуется одновременно: $x^2 - 4 \geq 0$ и $x - 3 \neq 0$. Первое условие даёт $x \leq -2$ или $x \geq 2$; второе исключает точку $x = 3$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; -2] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Подстановка даёт неопределённость $\frac{0}{0}$. Разложим на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4.$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}$.

Решение. Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{3}{5}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

Решение. Неопределённость $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}.$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

Решение. Неопределённость $\infty - \infty$. Умножаем и делим на сопряжённое:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} = \frac{3}{2}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

Решение. Используем формулы разности кубов и разности квадратов:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}.$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

11.1. Область определения функции $y = \frac{1}{x-5}$ имеет вид...

- | | | | |
|------------|---------|------------|---------------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| $x \neq 5$ | $x > 5$ | $x \geq 5$ | вся числовая прямая |

11.2. Область определения функции $y = \sqrt{x-2}$ имеет вид...

- | | | | |
|---------|------------|------------|------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| $x > 2$ | $x \geq 2$ | $x \leq 2$ | $x \neq 2$ |

11.3. Предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	2	4	∞

11.4. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	2	-3	∞

11.5. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^2+2}$ равен...

1)	2)	3)	4)
3	$\frac{1}{2}$	0	∞

11.6. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^2+x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	$\frac{1}{2}$	1	∞

11.7. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-3x}{x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
0	-3	3	∞

11.8. Предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{4}$	4	0	$\frac{1}{2}$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

11.9. Найти область определения функции $y = \frac{x+1}{x^2-9}$.

11.10. Найти область определения функции $y = \sqrt{9-x^2}$.

11.11. Найти область определения функции $y = \ln(x-4)$.

11.12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

11.13. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 2}{2x^3 + 5x^2}$.

11.14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{x^3 - 1}$.

11.15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$.

11.16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

11.17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$.

11.18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: освоена классификация неопределённостей и три базовых приёма их раскрытия.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, § 11 «Область определения и непрерывность функции», § 12 «Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей».

Ответы к занятию 11

Тестовые задания: 11.1 — 1; 11.2 — 2; 11.3 — 3; 11.4 — 2; 11.5 — 3; 11.6 — 4; 11.7 — 2; 11.8 — 1.

Классические задания.

11.9. $x \neq \pm 3$, то есть $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

11.10. $D(y) = [-3; 3]$. 11.11. $D(y) = (4; +\infty)$. 11.12. 6. 11.13. 2.

11.14. 0. 11.15. $\frac{2}{5}$. 11.16. $\frac{1}{4}$. 11.17. $\frac{5}{2}$. 11.18. $-\frac{1}{4}$.

Занятие 12. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые. Непрерывность функции

Раздел: предел функции. Продолжительность: 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию и совершенствованию умений.

Цели занятия:

- *обучающая*: сформировать умение применять первый и второй замечательные пределы и таблицу эквивалентных бесконечно малых, исследовать функцию на непрерывность и классифицировать точки разрыва;
- *развивающая*: развивать умение приводить выражение к «стандартному» виду замечательного предела;

- *воспитательная*: формировать аккуратность в работе с односторонними пределами.

В результате занятия студент должен

знать: формулировки первого и второго замечательных пределов, их следствия, таблицу эквивалентных бесконечно малых, определение непрерывности функции в точке, классификацию точек разрыва;

уметь: вычислять пределы с помощью замечательных пределов и эквивалентностей, находить точки разрыва и определять их тип.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, § 3, § 4, § 5, § 13), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Сформулируйте первый замечательный предел.
2. Сформулируйте второй замечательный предел. Чему приближённо равно число e ?
3. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?
4. Какая функция называется непрерывной в точке?
5. Какие бывают точки разрыва?
6. Чем разрыв первого рода отличается от разрыва второго рода?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{Следствия: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad e \approx 2,718.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

При вычислении предела произведения или частного бесконечно малые можно заменять эквивалентными.

Непрерывность. Функция f непрерывна в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Классификация точек разрыва.

- **Устранимый разрыв:** односторонние пределы конечны и равны между собой, но не равны значению функции (или функция в точке не определена).
- **Разрыв первого рода (скачок):** односторонние пределы конечны, но различны; величина скачка равна их разности.
- **Разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель так, чтобы получить стандартный вид:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

Решение. Используем эквивалентность $1 - \cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2} = 8x^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{x^2} = 8.$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$.

Решение. Заменяем эквивалентными: $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $\sin 5x \sim 5x$, поэтому предел равен $\frac{3}{5}$.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Решение. Приведём к виду второго замечательного предела, положив $\frac{3}{x} = \frac{1}{u}$, то есть $x = 3u$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{6u} = \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \right]^6 = e^6.$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$.

Решение. Выделим целую часть основания:

$$\frac{2x+3}{2x+1} = 1 + \frac{2}{2x+1}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(x \cdot \frac{2}{2x+1}\right) = e^1 = e,$$

поскольку $\ln\left(1 + \frac{2}{2x+1}\right) \sim \frac{2}{2x+1}$ и $\frac{2x}{2x+1} \rightarrow 1$.

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$.

Решение. $\ln(1+2x) \sim 2x$, $\arcsin 3x \sim 3x$, следовательно, предел равен $\frac{2}{3}$.

Пример 7. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Решение. Функция не определена в точке $x = 1$. Однако

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

— предел конечен и одинаков слева и справа. Значит, $x = 1$ — точка **устранимого разрыва**; доопределив функцию значением $f(1) = 2$, получим непрерывную функцию.

Пример 8. Найти точки разрыва функции $y = \frac{1}{x-2}$ и определить их тип.

Решение. В точке $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

Односторонние пределы бесконечны, следовательно, $x = 2$ — точка разрыва **второго рода**; прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Пример 9. Исследовать на непрерывность кусочно заданную функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 3x, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 3$. Пределы конечны, но различны, значит, $x = 1$ — точка разрыва **первого рода**, величина скачка равна $3 - 2 = 1$.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

12.1. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	7	$\frac{1}{7}$	0

12.2. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	1	15

12.3. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ равен...

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{2}$	1	2	4

12.4. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
e	e^3	$3e$	1

12.5. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$ равен...

1)	2)	3)	4)
e	e^2	$2e$	$\sqrt{e}$

12.6. При $x \rightarrow 0$ бесконечно малая $1 - \cos x$ эквивалентна...

1)	2)	3)	4)
x	x^2	$\frac{x^2}{2}$	$2x^2$

12.7. Точка $x = 2$ для функции $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ является точкой...

1)	2)	3)	4)
устраняемого разрыва	разрыва первого рода со скачком	разрыва второго рода	непрерывности

12.8. Точка $x = -3$ для функции $y = \frac{1}{x+3}$ является точкой...

1)	2)	3)	4)
устраняемого разрыва	разрыва первого рода	разрыва второго рода	непрерывности

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

12.9. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$.

12.10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{2x}$.

12.11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$.

12.12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$.

12.13. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x$.

12.14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$.

12.15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x}$.

12.16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$.

12.17. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ в точке $x = 3$; при наличии устраняемого разрыва доопределить функцию.

12.18. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x+1}{(x-2)(x+5)}$ и определить их тип.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработаны замечательные пределы и метод эквивалентных бесконечно малых; введена классификация точек разрыва.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, § 13 «Первый и второй замечательные пределы»; повторить таблицу производных.

Ответы к занятию 12

Тестовые задания: 12.1 — 2; 12.2 — 1; 12.3 — 3; 12.4 — 2; 12.5 — 2; 12.6 — 3; 12.7 — 1; 12.8 — 3.

Классические задания.

12.9. $\frac{5}{3}$. 12.10. 2. 12.11. 18. 12.12. $\frac{3}{5}$. 12.13. e^4 . 12.14. e^3 .

12.15. $\frac{2}{3}$. 12.16. $\frac{3}{2}$.

12.17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$ — устранимый разрыв; доопределяем $f(3) = 6$.

12.18. $x = 2$ и $x = -5$ — точки разрыва второго рода (односторонние пределы бесконечны); прямые $x = 2$ и $x = -5$ — вертикальные асимптоты.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной с приложениями

Занятие 13. Производная функции одной переменной. Правила и техника дифференцирования

Раздел: дифференциальное исчисление. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по формированию умений и навыков.

Цели занятия:

- *обучающая:* отработать технику дифференцирования: таблица производных, правила дифференцирования суммы, произведения и частного, производная сложной функции, дифференцирование неявно и параметрически заданных функций, логарифмическое дифференцирование, производные высших порядков;
- *развивающая:* развивать навык пошагового анализа структуры функции («что от чего зависит»);
- *воспитательная:* воспитывать аккуратность и системность в вычислениях.

В результате занятия студент должен

знать: определение производной, её механический и геометрический смысл, таблицу производных, правила дифференцирования, формулу производной сложной функции;

уметь: дифференцировать элементарные и сложные функции, находить производные неявных и параметрически заданных функций, применять логарифмическое дифференцирование, вычислять производные второго порядка.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, § 6, § 7, § 14), карточки с тестовыми заданиями, таблица производных.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Что называется производной функции в точке?
2. В чём состоит геометрический смысл производной?
3. Как дифференцируется произведение двух функций?
4. Как дифференцируется частное?
5. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
6. Что называется производной второго порядка?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Определение:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных:

$$(C)' = 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Правила дифференцирования:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (Cu)' = Cu', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производная сложной функции: если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то

$$y'_x = f'(u) \cdot u'_x.$$

Неявно заданная функция: уравнение $F(x, y) = 0$ дифференцируют по x , считая y функцией от x , затем выражают y' .

Параметрически заданная функция: если $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Логарифмическое дифференцирование применяется к функциям вида $y = u(x)^{v(x)}$: сначала логарифмируют равенство, затем дифференцируют.

Производные высших порядков: $y'' = (y')'$, $y''' = (y'')'$ и т. д.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Найти производную функции $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$.

Решение. Дифференцируем почленно: $y' = 12x^3 - 6x^2 + 5$.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2 \sin x$.

Решение. По правилу производной произведения:

$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \frac{2x-1}{x^2+3}$.

Решение. По правилу производной частного:

$$y' = \frac{2(x^2 + 3) - (2x - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6 - 4x^2 + 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(x^2 + 3)^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \ln \sin 3x$.

Решение. Это сложная функция трёх «слоёв»:

$$y' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3 \operatorname{ctg} 3x.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = e^{x^2} \operatorname{arctg} x$.

Решение.

$$y' = 2xe^{x^2} \operatorname{arctg} x + e^{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = e^{x^2} \left(2x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2} \right).$$

Пример 6. Найти y' для неявно заданной функции $x^2 + y^2 - 3xy = 0$.

Решение. Дифференцируем по x , помня, что $y = y(x)$:

$$2x + 2yy' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow y'(2y - 3x) = 3y - 2x \Rightarrow y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x}.$$

Пример 7. Найти y'_x , если $x = t^2$, $y = t^3$.

Решение. $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$, поэтому

$$y'_x = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$ методом логарифмического дифференцирования.

Решение. Логарифмируем: $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Дифференцируем обе части:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

Пример 9. Найти y'' , если $y = xe^{-x}$.

Решение. $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$;

$$y'' = -e^{-x}(1 - x) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(x - 2).$$

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

13.1. Производная функции $y = x^5$ равна...

1)	2)	3)	4)
$5x^4$	x^4	$5x^6$	$\frac{x^6}{6}$

13.2. Производная функции $y = \sin x$ равна...

1)	2)	3)	4)
$-\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{tg} x$

13.3. Производная функции $y = \ln x$ равна...

1)	2)	3)	4)
x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln x}$	e^x

13.4. Производная функции $y = e^{3x}$ равна...

1)	2)	3)	4)
e^{3x}	$3e^{3x}$	$3e^x$	$\frac{e^{3x}}{3}$

13.5. Производная функции $y = (2x + 1)^5$ равна...

1)	2)	3)	4)
$5(2x + 1)^4$	$10(2x + 1)^4$	$2(2x + 1)^4$	$10(2x + 1)^6$

13.6. Производная функции $y = x \cos x$ равна...

1)	2)	3)	4)
$-\sin x$	$\cos x - x \sin x$	$\cos x + x \sin x$	$-x \sin x$

13.7. Производная функции $y = \frac{x}{x+1}$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{(x + 1)^2}$	$\frac{-1}{(x + 1)^2}$	$\frac{2x + 1}{(x + 1)^2}$	1

13.8. Производная функции $y = \sqrt{x}$ равна...

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{x}}{2}$

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

13.9. Найти производную $y = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 9$.

13.10. Найти производную $y = x^3 \ln x$.

13.11. Найти производную $y = \frac{3x-2}{x+4}$.

13.12. Найти производную $y = \sin(5x - 1)$.

13.13. Найти производную $y = \ln(x^2 + 1)$.

13.14. Найти производную $y = e^{-2x} \cos 3x$.

13.15. Найти производную $y = \arctg x^2$.

13.16. Найти y' для неявно заданной функции $x^2 + y^2 = 25$.

13.17. Найти y'_x , если $x = \cos t$, $y = \sin t$.

13.18. Найти y'' , если $y = x^3 - 4x^2 + 5x$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: отработана вся техника дифференцирования, включая неявные и параметрические функции.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, § 14 «Дифференцирование функции одной переменной».

Ответы к занятию 13

Тестовые задания: 13.1 — 1; 13.2 — 2; 13.3 — 2; 13.4 — 2; 13.5 — 2; 13.6 — 2; 13.7 — 1; 13.8 — 1.

Классические задания.

13.9. $y' = 12x^2 - 10x + 2$. 13.10. $y' = 3x^2 \ln x + x^2$. 13.11. $y' = \frac{14}{(x+4)^2}$.

13.12. $y' = 5\cos(5x - 1)$. 13.13. $y' = \frac{2x}{x^2+1}$.

13.14. $y' = -e^{-2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$. 13.15. $y' = \frac{2x}{1+x^4}$.

13.16. $2x + 2yy' = 0$, откуда $y' = -\frac{x}{y}$. 13.17. $y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctgt}$.

13.18. $y' = 3x^2 - 8x + 5$, $y'' = 6x - 8$.

Занятие 14. Приложения производной: касательная, скорость, правило Лопиталя, монотонность и экстремумы

Раздел: дифференциальное исчисление. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по применению знаний.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение составлять уравнения касательной и нормали, решать задачи механики с помощью производной, применять правило Лопиталя, находить промежутки монотонности, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, решать простейшие задачи на оптимизацию;
- *развивающая:* развивать умение строить математическую модель прикладной задачи;
- *воспитательная:* показать практическую ценность дифференциального исчисления.

В результате занятия студент должен

знать: уравнения касательной и нормали, механический смысл первой и второй производных, правило Лопиталя, достаточные признаки монотонности и экстремума, алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений на отрезке;

уметь: применять производную к геометрическим, физическим и оптимизационным задачам.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, § 8, § 9, § 15, § 17), карточки с тестовыми заданиями.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции в точке?
2. Как связаны путь, скорость и ускорение с производными?
3. В каких случаях применимо правило Лопиталя?
4. Какая точка называется критической?
5. Сформулируйте достаточное условие экстремума по первой производной.

6. Как найти наибольшее значение непрерывной функции на отрезке?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Геометрический смысл производной: $k = y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Механический смысл: если $s = s(t)$ — закон движения, то скорость $v(t) = s'(t)$, ускорение $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Правило Лопиталя. Для неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел в правой части существует. Правило можно применять повторно.

Монотонность. Если $y' > 0$ на промежутке, функция возрастает; если $y' < 0$ — убывает.

Экстремумы. Критические точки — точки, в которых $y' = 0$ или y' не существует. Если при переходе через критическую точку y' меняет знак с «плюса» на «минус», это точка максимума; с «минуса» на «плюс» — точка минимума. Второй достаточный признак: если $y'(x_0) = 0$ и $y''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума; если $y''(x_0) > 0$ — точка минимума.

Наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a; b]$: вычислить значения функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и на его концах; выбрать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. $f(2) = 8 - 8 + 3 = 3$; $y' = 3x^2 - 4x$, $f'(2) = 12 - 8 = 4$.

Касательная: $y = 3 + 4(x - 2)$, то есть $y = 4x - 5$.

Нормаль: $y = 3 - \frac{1}{4}(x - 2)$, то есть $x + 4y - 14 = 0$.

Пример 2. Точка движется по закону $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ (путь в метрах, время в секундах). Найти скорость и ускорение в момент $t = 2$ с.

Решение. $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 2$, $a(t) = v'(t) = 6t - 6$;

$$v(2) = 12 - 12 + 2 = 2 \text{ м в секунду}, \quad a(2) = 6 \text{ м в секунду в квадрате}.$$

Пример 3. Вычислить по правилу Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Решение. Неопределённость $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Решение. Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Пример 5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Решение. $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$. Критические точки: $x = -1$, $x = 3$.

Знаки производной: при $x < -1$ имеем $y' > 0$; при $-1 < x < 3$ имеем $y' < 0$; при $x > 3$ имеем $y' > 0$.

Функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на $(-1; 3)$.

$$y_{\max} = y(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10, \quad y_{\min} = y(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22.$$

Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение. $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$; критические точки $x = -1$ и $x = 1$ принадлежат отрезку. Вычислим значения:

$$y(-2) = -2, \quad y(-1) = 2, \quad y(1) = -2, \quad y(3) = 18.$$

Ответ: наибольшее значение равно 18 (при $x = 3$), наименьшее равно -2 (при $x = -2$ и при $x = 1$).

Пример 7 (задача на оптимизацию). Из проволоки длиной 40 см согнуть прямоугольник наибольшей площади. Найти его стороны.

Решение. Пусть одна сторона равна x , тогда другая равна $20 - x$, где $0 < x < 20$. Площадь

$$S(x) = x(20 - x) = 20x - x^2, \quad S'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10.$$

При переходе через точку $x = 10$ производная меняет знак с «плюса» на «минус», значит, это точка максимума.

Ответ: квадрат со стороной 10 см, наибольшая площадь равна 100 квадратных сантиметров.

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

14.1. Геометрический смысл производной $f'(x_0)$ состоит в том, что она равна...

1)	2)	3)	4)
ординате касания	точки углового касательной	коэффициенту площади графика	под длине дуги

14.2. Уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$ имеет вид...

1)	2)	3)	4)
$y = 2x - 1$	$y = 2x + 1$	$y = x - 1$	$y = x^2 - 1$

14.3. Первая производная пути по времени есть...

1)	2)	3)	4)
ускорение	скорость	работа	импульс

14.4. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ равен...

1)	2)	3)	4)
1	2	0	∞

14.5. Если на некотором интервале $y' > 0$, то на этом интервале функция...

1)	2)	3)	4)
возрастает	убывает	постоянна	имеет экстремум

14.6. Точка x_0 называется критической точкой функции, если...

1)	2)	3)	4)
$y(x_0) = 0$	$y'(x_0) = 0$ или y' не существует	$y''(x_0) = 0$	$y(x_0) > 0$

14.7. Функция $y = x^3 - 3x$ имеет точку максимума при x , равном...

1)	2)	3)	4)
-1	0	1	3

14.8. Наибольшее значение функции $y = 4 - x^2$ на отрезке $[-1; 2]$ равно...

1)	2)	3)	4)
0	3	4	5

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

14.9. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 3x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

14.10. Составить уравнение нормали к той же кривой в той же точке.

14.11. Точка движется по закону $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t$. Найти скорость и ускорение в момент $t = 1$.

14.12. Вычислить по правилу Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

14.13. Вычислить по правилу Лопиталя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

14.14. Найти промежутки монотонности функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

14.15. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

14.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[-2; 3]$.

14.17. Число 20 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

14.18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: производная применена к четырём типам задач — геометрическим, физическим, к вычислению пределов и к поиску экстремумов.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, § 15 «Приложения производной», § 17 «Задачи на наибольшее и наименьшее значения».

Ответы к занятию 14

Тестовые задания: 14.1 — 2; 14.2 — 1; 14.3 — 2; 14.4 — 2; 14.5 — 1; 14.6 — 2; 14.7 — 1; 14.8 — 3.

Классические задания.

14.9. $f(2) = 0$, $f'(2) = 1$; касательная $y = x - 2$.

14.10. Нормаль $y = -(x - 2)$, то есть $x + y - 2 = 0$.

14.11. $v(t) = 6t^2 - 10t + 3$, $v(1) = -1$; $a(t) = 12t - 10$, $a(1) = 2$.

14.12. $\frac{1}{2}$. **14.13.** 0.

14.14. $y' = 3(x - 1)(x - 3)$; функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на $(1; 3)$.

14.15. $y_{\max} = y(1) = 4$, $y_{\min} = y(3) = 0$.

14.16. Наибольшее значение 18 при $x = 3$; наименьшее значение -2 при $x = -2$ и при $x = 1$.

14.17. Оба слагаемых равны 10, наибольшее произведение равно 100.

14.18. $\frac{1}{2}$.

Занятие 15. Полное исследование функции и построение графика. Наибольшее и наименьшее значения

Раздел: дифференциальное исчисление. **Продолжительность:** 90 минут.

Тип занятия: практическое занятие по обобщению и систематизации знаний.

Цели занятия:

- *обучающая:* сформировать умение проводить полное исследование функции по общей схеме (область определения, чётность, нули, асимптоты, монотонность и экстремумы, выпуклость и точки перегиба) и строить график; закрепить решение задач на наибольшее и наименьшее значения;
- *развивающая:* развивать умение объединять частные приёмы в единый алгоритм, графическую культуру;
- *воспитательная:* воспитывать самостоятельность и ответственность при выполнении итоговой работы.

В результате занятия студент должен

знать: общую схему исследования функции, определения вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот и формулы их нахождения, достаточные признаки выпуклости и точки перегиба;

уметь: находить асимптоты, исследовать функцию по полной схеме и строить эскиз графика, решать задачи на экстремум.

Оснащение: сборник задач по высшей математике (часть 4, § 10, § 16, § 17), карточки с тестовыми заданиями, миллиметровая бумага.

Структура занятия

Этап	Содержание этапа	Время
1	Организационный момент. Актуализация опорных знаний	5 мин
2	Опорный теоретический материал	10 мин
3	Разбор типовых задач у доски	30 мин
4	Тестовый контроль	15 мин
5	Самостоятельная работа	25 мин
6	Подведение итогов. Домашнее задание	5 мин

Этап 1. Организационный момент. Актуализация опорных знаний (5 мин)

1. Перечислите пункты общей схемы исследования функции.
2. Как найти вертикальные асимптоты?
3. По каким формулам находится наклонная асимптота?
4. Что показывает знак второй производной?

5. Какая точка называется точкой перегиба?
6. Чем отличается локальный максимум от наибольшего значения на отрезке?

Этап 2. Опорный теоретический материал (10 мин)

Общая схема исследования функции.

1. Область определения; точки разрыва.
2. Чётность, нечётность, периодичность.
3. Точки пересечения с осями координат.
4. Асимптоты.
5. Первая производная: промежутки монотонности, точки экстремума.
6. Вторая производная: промежутки выпуклости, точки перегиба.
7. Построение графика.

Асимптоты. Прямая $x = a$ — **вертикальная** асимптота, если хотя бы один из односторонних пределов в точке a бесконечен. Прямая $y = b$ — **горизонтальная** асимптота, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Прямая $y = kx + b$ — **наклонная** асимптота, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx),$$

если оба предела существуют и конечны.

Выпуклость и перегиб. Если $y'' > 0$ на промежутке, график выпуклый вниз (вогнутый); если $y'' < 0$ — выпуклый вверх. Точка, в которой $y'' = 0$ (или не существует) и при переходе через которую y'' меняет знак, называется точкой перегиба.

Этап 3. Разбор типовых задач у доски (30 мин)

Пример 1. Провести полное исследование функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ и построить её график.

Решение.

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$, разрывов нет.
2. Функция не является ни чётной, ни нечётной.
3. Пересечение с осью Oy : $y(0) = 4$. Нули функции: $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2 = 0$, откуда $x = -1$ и $x = 2$ (двукратный корень — график касается оси Ox).
4. Асимптот нет (многочлен).
5. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; критические точки $x = 0$ и $x = 2$. Функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, убывает на $(0; 2)$;

$$y_{\max} = y(0) = 4, \quad y_{\min} = y(2) = 0.$$

6. $y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$; при $x < 1$ график выпуклый вверх, при $x > 1$ — выпуклый вниз; точка перегиба $(1; 2)$.
7. По полученным данным строится график: кривая поднимается до максимума $(0; 4)$, опускается до минимума $(2; 0)$, затем неограниченно возрастает.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x-1}$ и построить её график.

Решение.

1. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. Общего вида (ни чётная, ни нечётная).
3. $y = 0$ только при $x = 0$; график проходит через начало координат.
4. Вертикальная асимптота $x = 1$, так как $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} y = \pm \infty$. Наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

следовательно, $y = x + 1$.

5. $y' = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; критические точки $x = 0$ и $x = 2$;

$$y_{\max} = y(0) = 0, \quad y_{\min} = y(2) = 4.$$

6. $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$: при $x > 1$ график выпуклый вниз, при $x < 1$ — выпуклый вверх; точек перегиба нет.
7. График состоит из двух ветвей, разделённых асимптотой $x = 1$ и приближающихся к прямой $y = x + 1$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{4}{x}$ на отрезке $[1; 4]$.

Решение. $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (значение $x = -2$ не принадлежит отрезку).

$$y(1) = 5, \quad y(2) = 4, \quad y(4) = 5.$$

Ответ: наименьшее значение равно 4 (при $x = 2$), наибольшее равно 5 (при $x = 1$ и при $x = 4$).

Этап 4. Тестовый контроль (15 мин)

15.1. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{1}{x-3}$ является прямая...

1)	2)	3)	4)
$x = 3$	$x = -3$	$y = 3$	$y = 0$

15.2. Горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{2x+1}{x-1}$ является прямая...

- | | | | |
|---------|---------|----------|---------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| $y = 1$ | $y = 2$ | $y = -1$ | $y = 0$ |

15.3. Наклонной асимптотой графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ является прямая...

- | | | | |
|---------|-------------|-------------|----------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| $y = x$ | $y = x + 1$ | $y = x - 1$ | $y = 2x$ |

15.4. Если на некотором промежутке $y'' > 0$, то график функции на этом промежутке...

- | | | | |
|----------------|---------------|---------------|-----------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| выпуклый вверх | выпуклый вниз | имеет перегиб | является прямой |

15.5. Точка перегиба графика функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ имеет абсциссу...

- | | | | |
|----|----|----|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 0 | 1 | 2 | 3 |

15.6. Функция $y = x^4 - 2x^2$ является...

- | | | | |
|--------|----------|---------------|-------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| чётной | нечётной | периодической | общего вида |

15.7. График функции $y = x^2 - 4$ пересекает ось Ox в точках...

- | | | | |
|-----------|----------------------|----------|---------------|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| $(0; -4)$ | $(2; 0)$ и $(-2; 0)$ | $(4; 0)$ | не пересекает |

15.8. Наибольшее значение функции $y = x + \frac{4}{x}$ на отрезке $[1; 4]$ равно...

- | | | | |
|----|----|----|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| 4 | 5 | 8 | 3 |

Этап 5. Самостоятельная работа. Классические задания (25 мин)

15.9. Провести полное исследование функции $y = x^3 - 3x$ и построить её график.

15.10. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{3x-1}{x+2}$.

15.11. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

15.12. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 6x^2$.

- 15.13.** Исследовать функцию $y = xe^{-x}$: найти экстремум, точку перегиба и асимптоту.
- 15.14.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 4]$.
- 15.15.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[1; 6]$.
- 15.16.** Сумма двух положительных чисел равна 30. Найти наибольшее значение их произведения.
- 15.17.** Периметр прямоугольника равен 24 см. Найти наибольшую возможную площадь прямоугольника.
- 15.18.** Исследовать на чётность функцию $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$.

Этап 6. Подведение итогов. Домашнее задание (5 мин)

Итог: сведены воедино все приёмы дифференциального исчисления; отработан алгоритм полного исследования функции.

Домашнее задание: сборник задач, часть 4, § 16 «Исследование функций и построение графиков»; подготовиться к типовому варианту контрольной работы по разделу «Пределы и производные функции одной переменной».

Ответы к занятию 15

Тестовые задания: 15.1 — 1; 15.2 — 2; 15.3 — 2; 15.4 — 2; 15.5 — 2; 15.6 — 1; 15.7 — 2; 15.8 — 2.

Классические задания.

15.9. $D(y) = \mathbb{R}$; функция нечётная; нули $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$; асимптот нет; $y' = 3(x^2 - 1)$, $y_{\max} = y(-1) = 2$, $y_{\min} = y(1) = -2$; возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 1)$; $y'' = 6x$, точка перегиба $(0; 0)$.

15.10. Вертикальная асимптота $x = -2$, горизонтальная асимптота $y = 3$.

15.11. Вертикальная асимптота $x = 0$, наклонная асимптота $y = x$.

15.12. $y'' = 12(x^2 - 1)$; график выпуклый вниз на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, выпуклый вверх на $(-1; 1)$; точки перегиба $(-1; -5)$ и $(1; -5)$.

15.13. $y' = e^{-x}(1 - x)$, $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e} \approx 0,37$; $y'' = e^{-x}(x - 2)$, точка перегиба $(2; \frac{2}{e^2})$; горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

15.14. Критические точки $x = 0$ и $x = 2$; $y(-1) = -4$, $y(0) = 0$, $y(2) = -4$, $y(4) = 16$. Наибольшее значение 16, наименьшее -4 .

15.15. Критическая точка $x = 3$; $y(1) = 10$, $y(3) = 6$, $y(6) = 7,5$. Наибольшее значение 10, наименьшее 6.

15.16. Оба числа равны 15, наибольшее произведение равно 225.

15.17. Квадрат со стороной 6 см, наибольшая площадь равна 36 квадратных сантиметров.

15.18. Функция нечётная, так как $y(-x) = \frac{-x^3+x}{x^2+1} = -y(x)$.