

I. Вычисление $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

1. Подставить в функцию $f(x)$ вместо x значение a .

Помнить, если A – число (*const*), тогда:

1.	$\left\{ \frac{A}{0} \right\} = \infty;$	3.	$\left\{ \frac{0}{A} \right\} = 0;$
2.	$\left\{ \frac{A}{\infty} \right\} = 0;$	4.	$\left\{ \frac{\infty}{A} \right\} = \infty;$

2. Определить тип неопределенности: $\left\{ \frac{0}{0} \right\}; \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}; \{1^\infty\}; \{\infty - \infty\}; \{0^0\}$

3. Свести к основным типам неопределенности: $\left\{ \frac{0}{0} \right\}; \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}; \{1^\infty\};$

3.1 $\left\{ \frac{0}{0} \right\};$	3.1.1	При наличии тригонометрии свести к первому замечательному пределу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx)}{x} = m$
	3.1.2	При наличии корней свести к формулам сокращенного умножения (если корни второй степени, умножить на сопряженный множитель)
	3.1.3	Если предыдущие 2 пункта не подходят, найти корни числитель и знаменателя, после чего разложить на множители и сократить.
3.2 $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\};$	Вынести за скобку старшую степень: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} \Rightarrow$	
3.3 $\{1^\infty\};$	Свести ко второму замечательному пределу $\lim_{x \rightarrow a} u^v = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow a} e^{(u-1)v}$	
	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$
	Приложения второго замечательного предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1, a \in (0;1) \cup (1;+\infty); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1;$	

Решение задач

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x + 4}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 3x - 14}{3x - 6}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{1 - 2x - 3x^3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{x+4}$
---	--	--	--	--	--

Найти пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x + 6}{x^2 - x + 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 7}{x + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$
6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$
7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x - 4}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m, n – целые числа).
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right)$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{2x^2 - x + 2}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 7x + 5}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m, n – целые числа).
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 1})$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x^2}$
23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{5x}$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} x}$
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x + \operatorname{arctg} x}$
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+x^2)}{x+x^3}$
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x+x^2}$
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 3x}$
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x \sin^2 x}$
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
38. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$
39. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x^2)}{\pi^2 - x^2}$
40. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$
41. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$
42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$
43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}$
44. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{3x+1}{x}}$
45. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)^x$
46. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x-3} \right)^{x^2}$
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^{x-1}$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x} \right)^{x+2}$
49. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$
50. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x}$
51. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{4}{x}}$
52. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x+1}$
53. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+3x}$
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\frac{x+1}{x+2}}$
55. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$
57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x}$
58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$
59. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$
61. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[n]{1+bx} - 1}$

II. Производная и ее приложения

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует. Определение производной (1), уравнение касательной (2), уравнение нормали (3):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1), \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2), \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (3).$$

Таблица производных. Производная сложной функции.

1. Правила дифференцирования

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 2) $(uv)' = u'v + v'u$; 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$; 4) $(Cu)' = Cu', C - const$;

2. Производные степенных функций

1) $(C)' = 0; C - const$; 2) $(x)' = 1$; 3) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
 $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3. Производные тригонометрических функций

5) $(\sin x)' = \cos x$; 6) $(\cos x)' = -\sin x$; 7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
 $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$; $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$; $(\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; $(\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;

4. Производные показательных и логарифмических функций

9) $(e^x)' = e^x$; 10) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; 11) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 12) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$;
 $(e^u)' = u' \cdot e^u$; $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5. Производные обратных тригонометрических функций

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 15) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 16) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
 $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\operatorname{arctgu})' = \frac{u'}{1+u^2}$; $(\operatorname{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2}$;

6. Производная сложной функции: $g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

7. Производная функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta \Rightarrow y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'(t)}$$

8. Производная функции заданной неявно: $F(x, y) = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$

9. Производная показательно степенной функции: $y = u(x)^{v(x)}$

$$y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln(y) = \ln(u(x)^{v(x)}) = v(x) \cdot \ln(u(x)) \Rightarrow (\ln(y))' = (v(x) \cdot \ln(u(x)))'$$

$$\frac{y'}{y} = (v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot (\ln(u(x)))' = (v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{(u(x))'}{u(x)} \Rightarrow$$

$$y' = y \cdot \left((v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{(u(x))'}{u(x)} \right) = u(x)^{v(x)} \cdot \left((v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{(u(x))'}{u(x)} \right)$$

10. Производные и дифференциалы высших порядков:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'; d^{(n)}y = d(d^{(n-1)}y) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

11. Правило Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Задачи и упражнения

1. Используя определение, найти производную функций: 1) $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 2$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 1$; 3) $y = \sin 2x$ в произвольной точке x ; 4) $y = \ln 3x$ в точке $x_0 = 1$.

2. Найти производные функций:

1) $y = 3x^2 - 5x + 7$; 2) $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 0.5x + 4$; 3) $y = ax^2 + bx + c$; 4) $y = x^3 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$;

5) $y = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{x^2}$; 6) $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$, найти $f(1), f'(1), f'(4)$; 7) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2}$, найти $f(-1),$

$f'(-1), f'(2)$; 8) $y = (x^2 - 1)(2x + 1)$ 9) $y = (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)(\sqrt{x} + 1)$; 10) $y = \frac{x-1}{x+1}$; 11) $y = \frac{x^2+1}{x}$; 12) $y = \frac{x}{x^2-1}$;

13) $y = \frac{1}{x+2} + 3x^2$; 14) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; 15) $y = \sqrt{4-x^2}$; 16) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 17) $y = 2^x$; 18) $y = 3 \cdot 2^x - \frac{5}{2^x}$;

19) $y = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2}$; 20) $y = x \cdot e^x$; 21) $y = \frac{2^x}{x}$; 22) $y = \sin 2x + \cos 3x$; 23) $y = \sin^2 x - 5 \cos^2 x$;

24) $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$; 25) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$; 26) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 27) $y = x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$; 28) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

$$29) y = \sin\left(\frac{1}{x}\right); 30) y = \sin(\cos x); 31) y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}; 32) y = \sin(\cos x); 33) y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}; 34) y = x \arccos x;$$

$$35) y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x; 36) y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x; 37) y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}; 38) y = \ln 2x; 39) y = \ln^2 x;$$

$$40) y = x \ln x - x; 41) y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}; 42) y = \ln \sin x + \ln \cos x; 43) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}); 44) y = \sqrt{\ln x};$$

$$45) y = \ln \operatorname{tg} x; 46) y = 2^{\frac{\ln x}{x}}; 47) y = x^x; 48) y = x^{\ln x}; 49) y = (\ln x)^x; 50) y = \frac{(x-1)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x+2)^3};$$

$$51) y = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}; 52) y = \frac{1}{x} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right); 53) y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}; 54) y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x - x;$$

$$55) y = \arccos \sqrt{1-2x}; 56) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}; 57) y = \begin{cases} x = t \sin t, \\ y = t \cos t. \end{cases} 58) y = \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}; 59) y = \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases};$$

$$60) y = \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}; 61) y = \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}; 62) y^2 + 2xy + a^2 = 0; 63) \sqrt{x} + \sqrt{y} + a^2 = 0;$$

$$64) x^3 + y^3 - 3axy = 0; 65) e^x + e^y = e^{x+y}; 66) y = \sin(x+y); 67) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; 68) y^3 - 3y + 2x = 0;$$

$$69) y \ln y = x. 70) y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}}; 71) y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x};$$

3. Дана парабола $y=(x-1)^2$. 1) Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе, а) в точке (0,1); б) в точке (1,0); в) в точке (3,4); 2) написать уравнения касательной и нормали в указанных выше точках. 3) в какой точке касательная параллельна прямой $2x - y + 7 = 0$?

4. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$1) y = -x^2 + 3x - 2, x_0 = 3; 2) y = \frac{x+1}{2x-1}, x_0 = 1; 3) y = \frac{3x-1}{x^2+1}, x_0 = 2; 4) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}, x_0 = \sqrt{2}; 5) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = e^t \end{cases}, x_0 = 0; 6)$$

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}, x_0 = \sqrt{2}; 7) \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}, t = 1; 8) \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}, t = 1;$$

$$5. \text{Найти } dy, \text{ если: } 1) y = (1+x-x^2)^3; 2) y = 5^{\ln \sin x}; 3) y = (x^3+1)^{\operatorname{tg} 2x}; 4) y = \operatorname{arctg}^3 \frac{2x}{1-x^2}; 5) y = \frac{x}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$6. \text{Вычислить приближенно: } 1) \sqrt[3]{8,01}; 2) \cos 32^\circ; 3) \arcsin 0,48; 4) \operatorname{lg} 10,08.$$

7. Найти производные указанного порядка:

1) $y = xe^{-x^2}$, $y''=?$ 2) $y=x^6-4x^3+4$, $y^{iv}(1)=?$ 3) $y=e^{2x}\sin 3x$, $y'''(0)=?$ 4) $y = \ln^2 x$, $y'' = ?$

5) $y=e^{3x}$, $y^{(n)}=?$ 6) $y=\sin^2 x$, $y^{(n)}=?$

8. Найти y'_x , y''_{xx} для функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

9. Используя правило Лопиталья, вычислить пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3 - 4x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{1 - 5x - x^2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4})$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{1 - \cos 3x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin^2 x}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{e^{x^2} - 1}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{arctg} x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin 2x}{x - \operatorname{arctg} x}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$; 16) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln 4x}{\ln x}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\ln(1 + 2x)}$;

18) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{2+x}{x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$; 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$; 21) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$; 22) $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x$; 23) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$;

Схема общего исследования функции $y=f(x)$.

1. Область определения функции. Точки разрыва функции. Поведение функции на границах. Вертикальные асимптоты.

2. Четность (нечетность), периодичность функции.

3. Промежутки возрастания ($f'(x) \geq 0$) и убывания ($f'(x) \leq 0$), критические точки функции ($f'(x) = 0 \vee$ не существует) и их характер.

4. Промежутки вогнутости ($f''(x) \leq 0$) и выпуклости ($f''(x) \geq 0$), точки перегиба функции ($f''(x) = 0 \vee$ не существует).

5. Наклонные асимптоты функции (вертикальные, горизонтальные и наклонные). $y=kx+b$

– наклонная асимптота, $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$

6. Дополнительные точки графика функции.

7. Построение графика функции.

Исследовать функции и построить их график.

1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; 2) $y = x - \frac{1}{3}x^3$; 3) $y = x + \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; 5) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 6) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 7) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$; 8) $y = x + \operatorname{arctg} x$;