Векторная алгебра

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала. $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

Длина вектора в координатах (ДПСК) определяется как расстояние между точками начала и конца вектора.

$$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi;$

Свойства скалярного произведения векторов

$$1)\ \vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2;\quad 2)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{a} \perp \vec{b};\\ \vec{a} = \vec{0};\\ \vec{b} = \vec{0};\end{array}\right.\ 3)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a};\quad 4)\ \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c};\ 5)\ \left(m\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right);$$

$$6)\ \vec{a}(x_a, y_a, z_a);\quad \vec{b}(x_b, y_b, z_b) \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a}; \vec{b}\right) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b;$$

$$7)\ \cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}};$$

8) Вычисление работы E силы $\vec{F}$ на пути $\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ E=$\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$;

9) Вычисление проекции вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ $\Rightarrow Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|};$

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением векторов и называется вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi,$ *где φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,* $\sin\varphi \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi;$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b};$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - *правая тройка векторов*;

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ – *обозначение*

Свойства векторного произведения векторов

$$1)\ \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a};\ 2)\ \vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{a} \parallel \vec{b},\\ \vec{a} = \vec{0},\\ \vec{b} = \vec{0}.\end{array}\right.\ 3)\ \left(m\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(m\cdot\vec{b}\right) = m\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right);\ 4)\ \vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c};$$

$$5)\ \vec{a}\{x_a; y_a; z_a\} \text{ и } \vec{b}\{x_b; y_b; z_b\} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix};$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения является площадь параллелограмма, построенного на векторах

Смешанное произведение векторов

Определение. **Смешанным произведением** векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор равный векторному произведению $\vec{b}$ на $\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ – *обозначение.*

Свойства смешанного произведения векторов

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{один из векторов равен нулю;}\\ \text{два вектора коллинеарны;}\\ \text{вектора компланарны.}\end{array}\right.$ 2) $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$; 3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$; 4) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

5) $\left(\alpha\vec{a_1}+\beta\vec{a_2}\right)\vec{b}\vec{c}=\alpha\vec{a_1}\vec{b}\vec{c}+\beta\vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$; 6) $V_{пар}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$; $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$;

7) *Координатная форма* $\left.\begin{array}{l}\vec{a}\{x_a;y_a;z_a\},\\ \vec{b}\{x_b;y_b;z_b\},\\ \vec{c}\{x_c;y_c;z_c\}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}$

Решение задач

Векторы и действия над ними

1. Зная одну из вершин ΔABC -т. $A(2;-5;3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB}=\{4;1;2\}$; $\overline{BC}=\{3;-2;5\}$, найти остальные вершины и сторону $\overline{CA}$.

2. В точке $A(2;1;-1)$ приложена сила $|\overline{R}|=7$. Зная две координаты этой силы $X=2$; $Y=-3$, определить направление и конец вектора, изображающего силу.

3. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину D.

4. Даны вектора $\bar{a}=\{1;-2;3\}$; $\bar{b}=\{0;1;2\}$; $\bar{c}=\{3;0;-1\}$. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\bar{d}=\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}$.

Базис

1. Образуют ли следующие векторы базис пространства $\Re_3$: а) $\bar{x}_1=(3,0,2)$, $\bar{x}_2=(7,0,9)$, $\bar{x}_3=(4,1,2)$; б) $\bar{x}_1=(1,1,0)$, $\bar{x}_2=(3,0,1)$, $\bar{x}_3=(5,2,1)$?

2. Показать, что векторы $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ образуют базис и найти координаты $\bar{x}$ в этом базисе: $\overline{e_1}=(1,1,1)$, $\overline{e_2}=(1,1,2)$, $\overline{e_3}=(1,2,3)$, $\bar{x}=(6,9,14)$.

Скалярное произведение векторов

1. Известно, что $|\bar{a}|=3; |\bar{b}|=4; (\bar{a},\bar{b})=2\pi/3$. Найти а) $(3\bar{a}-2\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$; б) $(\bar{a}+\bar{b})^2$.

2. Известно, что $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=1$, $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$. Найти $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$.

3. Известно, что $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=2, \widehat{(\bar{a},\bar{b})}=\frac{\pi}{3}$. Найти $|\bar{a}-2\bar{b}|$.

4. Дано: $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=5, \widehat{(\bar{a},\bar{b})}=\frac{2\pi}{3}$. Найти α при котором вектор $\bar{p}=\alpha\bar{a}+17\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{q}=3\bar{a}-\bar{b}$.

5. Дано: $\bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = |\bar{n}| = 1, (\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = 120^0$. Найти $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{m}})$.

6. Доказать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ $(\bar{a} \perp \bar{b})$, определяется формулой $\cos\varphi = \pm \dfrac{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}$.

7. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}, \bar{b}$, чтобы вектор $\bar{a} + \bar{b}$ был перпендикулярен $\bar{a} - \bar{b}$?

8. К вершине правильного тетраэдра с ребром **a** приложены три силы, направленные вдоль его ребер. Определить величину равнодействующей.

9. Даны векторы $\bar{a} = \{5;0;4\}; \bar{b} = \{0;-1;2\}; \bar{c} = \{3;1;4\}$. Найти $(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} - 2\bar{a})$.

10. Даны точки A(–1;3;–7); B(2;–1;5); C(0;1;–5).Вычислить $(2\overline{AB} - \overline{CB})(2\overline{BC} + \overline{BA})$.

11. Вычислить какую работу производит сила $\bar{F} = \{6;-2;1\}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A(3;4;–2) в B(4;–2;–3) ?

12. Даны три силы $\bar{P} = \{3; -4; 2\}$; $\bar{Q} = \{2; 3; -5\}$; $\bar{R} = \{-3; -2; 4\}$ приложенные к одной точке. Вычислить какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения перемещается, двигаясь прямолинейно, из положения
$M_1(5; 3; -7)$ в положение $M_2(4;-1;-4)$.

13. Даны вершины треугольника A(–1;–2; 4); B(–4;–2; 0); C(3;–2; 1). Найти внутренний угол при вершине B.

14. Даны вершины треугольника A(3; 2; –3); B(5;1;–1); C(1;–2; 1). Определить внешний угол при вершине A.

15. Даны векторы $\bar{a} = \{2;-3;4\}; \bar{b} = \{4;0;5\}; \bar{c} = \{3;1;1\}$. Найти $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}$, если $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b}$.

16. Даны точки M(–5; 7;–6), N(7;–9; 9). Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = \{1;-3;1\}$ на ось вектора $\overline{MN}$.

17. Определить, при каком значении α перпендикулярны векторы $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d}$, если $\bar{a} = \alpha\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}; \bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}; \bar{d} = \bar{i} - 3\bar{k}$.

18. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = \{2;1;-1\}$ и удовлетворяющий условию $\bar{x} \cdot \bar{a} = 3$.

19. Сила $\bar{R} = \{1; -8; -7\}$ разложена по трем направлениям, одно из которых задано вектором $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Найти составляющую $\bar{F}$ силы $\bar{R}$ в направлении $\bar{a}$.

Векторное произведение векторов

1. Даны: $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Найти $[(3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (\bar{a} - 3\bar{b})]^2$.

2. Даны: $|\bar{a}| = 10, |\bar{b}| = 2, \bar{a} \cdot \bar{b} = 12$, Вычислить $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют угол 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}+2\bar{b}$, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5$.

4. При каком значении коэффициента α векторы $\bar{p}=\alpha\bar{a}+5\bar{b}$ и $\bar{q}=3\bar{a}-\bar{b}$ окажутся коллинеарными, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны.

5. Найти координаты векторного произведения $\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)\times\left(\bar{a}-2\bar{b}\right)$, если $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j};\ \bar{b}=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k};\ \bar{c}=\bar{j}+2\bar{k}.$

6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\{0;-1;1\}$; $\bar{b}=\{1;1;1\}$.

7. Даны точки A(2;–1; 2); B(1; 2; –1); C(3; 2; 1). Найти координаты векторного произведения $\left(\overline{BC}-2\overline{CA}\right)\times\overline{CB}$.

8. Найти площадь и высоту BD треугольника ABC с вершинами A(1;-2,8); B(0;0;4); C(6;2;0).

9. Сила $\bar{F}=\{2;-4;5\}$ приложена к точке A(4;–2; 3). Определить момент этой силы относительно точки C(3; 2;–1).

10. Даны три силы $\overline{F_1}=\{2;-1;-3\}$; $\overline{F_2}=\{3;2;-1\}$; $\overline{F_3}=\{-4;1;3\}$ приложенные к точке A(–1;4;–2). Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки B(2;3;–1).

11. Найти координаты вектора $\bar{x}$, перпендикулярного к векторам $\bar{a}=\{2;-3;1\}$; $\bar{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяющего условию: $\bar{x}\cdot\left(\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k}\right)=10$.

Смешанное произведение векторов

1. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к векторам $\bar{a},\bar{b}$, угол между $\bar{a},\bar{b}$ равен 30^0, $|\bar{a}|=6, |\bar{b}|=|\bar{c}|=3$. Вычислить $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

2. Показать, что $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\left(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}\right)\left(\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c}\right)=3\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c};\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\left(\bar{c}+\bar{a}\right)=2\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$

3. Установить образуют ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ $\bar{c}$ базис в пространстве $\Re_3$, если $\bar{a}=\{3;-2;1\}$, $\bar{b}=\{2;1;2\}$, $\bar{c}=\{3;-1;2\}$.

4. Показать, что векторы $\bar{a}=-\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}-3\bar{j}-4\bar{k}, \bar{c}=-3\bar{i}+12\bar{j}+6\bar{k}$ компланарны. Разложить $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

5. Показать, что точки A(2;–1;–1); B(1; 2; 1); C(2; 3; 0); D(1; 6; 2) лежат в одной плоскости.

6. При каком λ векторы $\bar{a}=\{\lambda;3;1\}$; $\bar{b}=\{5;-1;2\}$; $\bar{c}=\{-1;5;4\}$ будут компланарны ?

7. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}, \bar{b}=-3\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=2\bar{j}+5\bar{k}$.

8. Вычислить объем и высоту треугольной пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если A(1; 1; 1); B(2; 0; 2); C(2; 2; 2); D(3; 4; –3).