Прямая на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2) \in L \Rightarrow \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

3. Уравнения семейства прямых, проходящих через заданную точку $M_0(x_0, y_0) \in L \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0)$

4. Угол между прямыми $\left.\begin{array}{l} L_1 : y = k_1 x + b_1 \\ L_2 : y = k_2 x + b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$

5. Параллельность и перпендикулярность прямых

$$\left.\begin{array}{l} L_1 : y = k_1 x + b_1 \\ L_2 : y = k_2 x + b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 : y = k_1 x + b_1 \\ L_2 : y = k_2 x + b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

6. Расстояние от точки до прямой на плоскости $d = \dfrac{\left|Ax_k + By_k + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Решение задач

1. Построить прямые: а) 5x–3y+15=0; б) 4x–y=0.

2. Точка движется прямолинейно и в некоторые моменты времени имеет координаты $M_1(-6;1)$, $M_2(-4;3)$. Лежат ли точки A(1;8), B(3;9) на ее траектории?

3. Найти углы и площадь треугольника, стороны которого заданы уравнениями: 5x–2y–11=0; x+2y+5=0; x–2y+1=0.

4. Найти проекцию M точки P(–8;12) на прямую, проходящую через точки A(2; –3) и B(–5;1).

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 3x – y +5=0 и 2x+3y+1=0 и параллельной прямой 7x – 3y+5=0.

6. Даны вершины треугольника A(12;–4), B(0;5) и C(–12; –11). Найти: а) длины сторон; б) уравнения сторон; в) уравнение высоты BD; г) уравнение медианы AM;

Уравнение плоскости в пространстве

Определение. **Плоскостью** называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению: ***Ax+By+Cz+D=0***, где ***A, B, C*** – координаты вектора $\overrightarrow{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ - вектор **нормали** к плоскости.

1. Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

$$\left.\begin{matrix} M_0 \in G \\ \overrightarrow{N} \perp G \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} M_1(x_0, y_0, z_0), \\ \overrightarrow{N} = (A, B, C), \\ +M(x, y, z) \end{matrix}\right\} \Rightarrow G: A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$$

2. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости ***Ax+By+Cz+D=0*** равно: $d = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. $M_1, M_2, M_3 \in G \Rightarrow \left.\begin{matrix} M_1\left(x_1, y_1, z_1\right), \\ M_2\left(x_2, y_2, z_2\right), \\ M_3\left(x_3, y_3, z_3\right) \\ +M\left(x, y, z\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow G: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	4. Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости. $\left.\begin{matrix} M_1, M_2 \in G \\ \vec{a} \parallel G \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} M_1(x_1, y_1, z_1), \\ M_2(x_2, y_2, z_2), \\ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \\ +M(x, y, z) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow G: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$
5. Уравнение плоскости по точке и двум векторам, коллинеарным плоскости. $\left.\begin{matrix} M_1 \in G \\ \vec{a} \parallel G \\ \vec{b} \parallel G \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} M_1(x_1, y_1, z_1), \\ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \\ +M(x, y, z) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow G: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$	6. Уравнение плоскости в отрезках. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,$ где числа ***a, b, c*** являются точками пересечения плоскости соответственно с осями ***x, y, z***.

Решение задач

1. Построить плоскости, заданные уравнениями: а) 5x + 2y + 3z – 15=0; б) 3x – z=0. Найти угол между плоскостями.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1(3; 0; 4) и M_2(5; 2; 6) и перпендикулярной к плоскости 2x+4y+6z–7=0.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: M_1(1;2;0), M_2(2; 1; 1), M_3(3; 0; 1).

4. Написать уравнение плоскости: а) параллельной плоскости XOY и проходящей через точку M(3; –5;4);
б) проходящей через ось OZ и точку N(2; –3; –2);
в) параллельной оси OY и проходящей через точки Q(1;3;4) и P(2;5; –6).

5. Найти расстояние между параллельными плоскостями G_1: 2x – y + z – 1=0,
G_2: –4x + 2y – 2z – 1=0.

6. Установить, что три плоскости 2x – 4y + 5z – 21 = 0; x – 3z + 18 = 0;
6x + y + z –30=0 имеют общую точку, и вычислить ее координаты.

Прямая и плоскость в пространстве

1. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{S}(m,n,p),\\ M_0(x_0,y_0,z_0)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{S}(m,n,p),\\ M_0(x_0,y_0,z_0),\\ +M(x,y,z)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}-\textit{каноническое уравнение прямой}\\ \begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt-\textit{параметрическое уравнение прямой}\\ z=z_0+pt\end{cases}\end{array}\right.$$

2. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

$$\left.\begin{array}{l}M_1(x_1,y_1,z_1)\\ M_2(x_2,y_2,z_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{S},\\ M_1=M_0,\\ +M(x,y,z)\end{array}\right\}\Rightarrow(1)$$

3. Общие уравнения прямой в пространстве.

$$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1;C_1),\\ \overrightarrow{N_2}(A_2;B_2;C_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ A_1&B_1&C_1\\ A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}=...=\vec{i}m+\vec{j}n+\vec{k}p.$$

$$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{array}\right\}-\textit{частное решение}\Rightarrow M_0(x_0,y_0,z_0)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{S}(m,n,p),\\ M_0(x_0,y_0,z_0)\end{array}\right\}\Rightarrow...$$

4. Угол между плоскостями.

$$\left.\begin{array}{l}G_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\Rightarrow\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1;C_1)\\ G_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\Rightarrow\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2;C_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\operatorname{Cos}\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}=\pm\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$$

$$\left.\begin{array}{l}G_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\Rightarrow\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1;C_1)\\ G_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\Rightarrow\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2;C_2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1;C_1)\parallel\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2;C_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=0\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\Leftrightarrow G_1\parallel G_2$$

$$\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1;C_1)\perp\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2;C_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0\Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0\Leftrightarrow G_1\perp G_2$$

5. Угол между прямыми в пространстве.

$$\left.\begin{array}{l}L_1\Rightarrow\overrightarrow{S_1}(m_1;n_1;p_1)\\ L_2\Rightarrow\overrightarrow{S_2}(m_2;n_2;p_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\operatorname{Cos}\varphi=\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|}=\pm\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}};$$

$$\left.\begin{array}{l}L_1\Rightarrow\overrightarrow{S_1}(m_1;n_1;p_1)\\ L_2\Rightarrow\overrightarrow{S_2}(m_2;n_2;p_2)\end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{S_1}(m_1;n_1;p_1)\parallel\overrightarrow{S_2}(m_2;n_2;p_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}=0\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\Leftrightarrow L_1\parallel L_2$$

$$\overrightarrow{S_1}(m_1;n_1;p_1)\perp\overrightarrow{S_2}(m_2;n_2;p_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}=0\Leftrightarrow m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0\Leftrightarrow L_1\perp L_2$$

6. Угол между прямой и плоскостью.

$$\left.\begin{array}{l}L\Rightarrow\vec{S}(m;n;p)\\ G:Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow\vec{N}(A;B;C)\end{array}\right\}\Rightarrow\operatorname{Sin}\varphi=\frac{\left|\vec{S}\cdot\vec{N}\right|}{\left|\vec{S}\right|\left|N\right|}=\pm\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$

$$\left.\begin{array}{l} L \Rightarrow \vec{S}(m;n;p) \\ G: Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \overrightarrow{N}(A;B;C) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$L \parallel G \Leftrightarrow \vec{S} \perp \overrightarrow{N} \Leftrightarrow A\cdot m + B\cdot n + C\cdot p = 0$$

$$L \perp G \Leftrightarrow \vec{S} \parallel \overrightarrow{N} \Leftrightarrow \vec{S} \times \overrightarrow{N} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{P}$$

7. Точка пересечения прямой и плоскости

$$\left.\begin{array}{l} G: Ax+By+Cz+D=0 \\ L: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x_0+mt) + B(y_0+nt) + C(z_0+pt) + D = 0 \Rightarrow t = f \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mf \\ y = y_0 + nf \\ z = z_0 + pf \end{cases}$$

Решение задач

1. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через т.***M_1(–1;2;3), M_2(3;2;–5)***.

2. Найти угол между прямыми L_1: $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$ и L_2: $\begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases}$

3. Написать канонические и параметрические уравнения прямой L: $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$.

4. Найти точку пересечения прямой L: $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости G: ***3x–y+2z–5=0***.

5. Найти проекцию точки ***A(1; –3;2)*** на плоскость ***6x+3y–z–41= 0***.

6. Найти угол между прямой ***L: y=3x–1, 2z=–3x+2*** и плоскостью ***2x+y+z–4=0***.

7. При каких A и ℓ прямая L: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{\ell} = \frac{z+5}{1}$ перпендикулярна плоскости G: ***Ax+y-5z+3=0***.

8. При каком A прямая L: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{7}{1}$ параллельна плоскости G: ***Ax+3y–5z+1= 0***.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку ***M_1(4;–3;1)*** и параллельно прямым L_1: $\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-3}$ и L_2: $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$.

Кривые второго порядка

Кривая второго порядка может быть задана уравнением $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

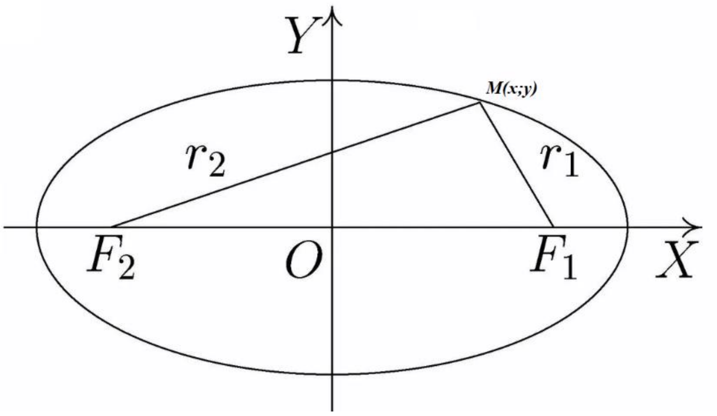
Окружность.

В окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ центр имеет координаты **(*a; b*)** и радиус ***R***.

Эллипс.

Определение. **Эллипсом** называется линия, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Определение. **Фокусами** называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. F_1 = (c; 0); F_2(-c; 0); c – половина расстояния между фокусами; a – большая полуось; b – малая полуось.

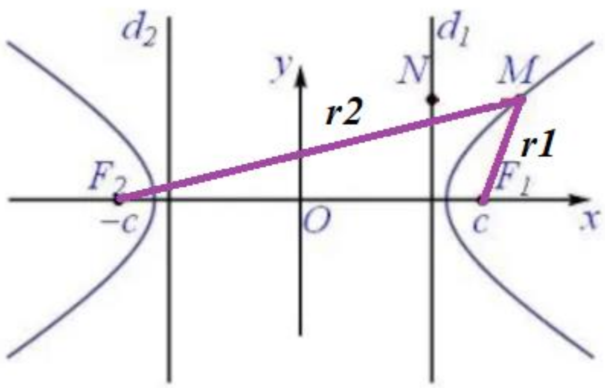
Теорема. *Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:* $a^2=b^2+c^2$.

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**: $e = c/a$, $c<a \Rightarrow 0<e<1$.

Определение. Величина $k = b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1-k=(a-b)/a$ называется **сжатием** эллипса $k^2=1-e^2$.

Гипербола.

Определение. **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

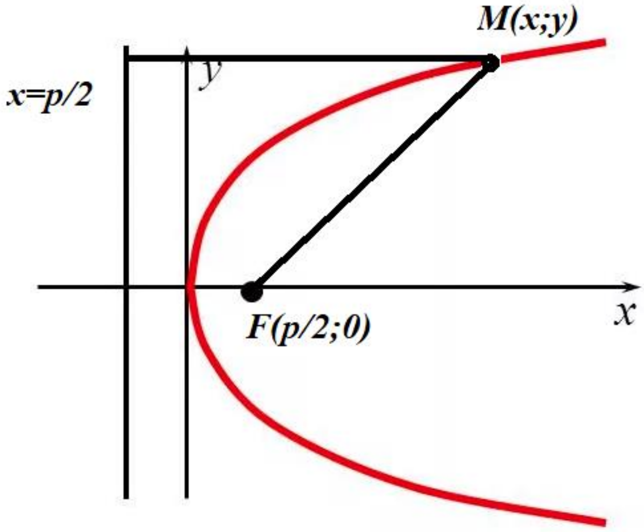
Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат. Ось 2a называется действительной осью гиперболы. Ось 2b называется мнимой осью гиперболы. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Определение. Отношение $e=\frac{c}{a}>1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

Теорема. *Фокусное расстояние и полуоси гиперболы связаны соотношением:* $c^2–a^2=b^2$**.**
Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии а/е от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $x = \pm\frac{a}{e}$.

Парабола.

Определение. **Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.
Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина ***p*** (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.
$y^2=2px$ – каноническое уравнение параболы. Уравнение директрисы: $x=-p/2$.

Решение задач

1. Построить кривые: а) $9x^2+25y^2=225$; б) $4x^2–5y^2=20$; в) $16x^2–9y^2=–144$. Найти их полуоси, координаты фокусов, эксцентриситеты, асимптоты (для гиперболы).

2. Построить параболы. Найти параметр p, координаты фокуса: а) $y^2=–4x$; б) $x^2=y/2$.

3) Найти центр и радиус окружности: $x^2+y^2–4x+6y-3=0$.

4) Привести уравнения к каноническому виду и построить кривые:

а) $5x^2+9y^2–30x+18y+9=0$; б) $2x^2 –12x+y+13=0$; в) $5x^2–4y^2+30x+8y+21=0$;

г) $2y^2–x–12y+14=0$.