

Математический анализ.

I. Вычисление $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

1. Подставить в функцию $f(x)$ вместо x значение a .

Помнить, если A – число (const), тогда:

1.	$\left\{ \frac{A}{0} \right\} = \infty;$	3.	$\left\{ \frac{0}{A} \right\} = 0;$
2.	$\left\{ \frac{A}{\infty} \right\} = 0;$	4.	$\left\{ \frac{\infty}{A} \right\} = \infty;$

2. Определить тип неопределенности: $\left\{ \frac{0}{0} \right\}; \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}; \{1^\infty\}; \{\infty - \infty\}; \{0^0\}$

3. Свести к основным типам неопределенности: $\left\{ \frac{0}{0} \right\}; \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}; \{1^\infty\};$

3.1 $\left\{ \frac{0}{0} \right\};$	3.1.1	При наличии тригонометрии свести к первому замечательному пределу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx)}{x} = m$	
	3.1.2	При наличии корней свести к формулам сокращенного умножения (если корни второй степени, умножить на сопряженный множитель)	
	3.1.3	Если предыдущие 2 пункта не подходят, найти корни числитель и знаменателя, после чего разложить на множители и сократить.	
3.2 $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\};$	Вынести за скобку старшую степень		
3.3 $\{1^\infty\};$	Свести ко второму замечательному пределу $\lim_{x \rightarrow a} u^v = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow a} e^{(u-1)v}$		
	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$	
	Приложения второго замечательного предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1, a \in (0;1) \cup (1; +\infty); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1;$		

Решение задач

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x + 4}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 3x - 14}{3x - 6}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{1 - 2x - 3x^3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{x+4}$
---	--	--	--	--	--

Найти пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x + 6}{x^2 - x + 3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 7}{x + 1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x - 4}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m, n – целые числа).
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{1}{1 - x} \right)$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{2x^2 - x + 2}$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 7x + 5}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m, n – целые числа).
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$.
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$.
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$.
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 1})$.
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x^2}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$.
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{5x}$.
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} x}$.
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x + \operatorname{arctg} x}$.
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + x^2)}{x + x^3}$.
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x + x^2}$.
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$.
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 3x}$.
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x \sin^2 x}$.
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.
38. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$.
39. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x^2)}{\pi^2 - x^2}$.
40. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.
41. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$.
42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$.
43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}$.
44. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{3x+1}{x}}$.
45. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)^x$.
46. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x-3} \right)^{x^2}$.
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^{x-1}$.
48. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x} \right)^{x+2}$.
49. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$.
50. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x}$.
51. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{4}{x}}$.
52. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x+1}$.
53. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+3x}$.
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\frac{x+1}{x+2}}$.
55. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$.
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$.
57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x}$.
58. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} \cdot x$.
59. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$.
61. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$.
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - 1}{\sqrt[n]{1+bx} - 1}$.

II. Производная и ее приложения

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) - \text{уравнение касательной}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) - \text{уравнение нормали}$$

Таблица производных. Производная сложной функции.

1. Правила дифференцирования

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 2) (uv)' = u'v + v'u; \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}; \quad 4) (Cu)' = Cu', C - const;$$

2. Производные степенных функций

$$1) (C)' = 0; C - const; \quad 2) (x)' = 1; \quad 3) (x^n)' = nx^{n-1}; \quad 4) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

3. Производные тригонометрических функций

$$5) (\sin x)' = \cos x; \quad 6) (\cos x)' = -\sin x; \quad 7) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 8) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u; \quad (\cos u)' = -u' \cdot \sin u; \quad (\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \quad (\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

4. Производные показательных и логарифмических функций

$$9) (e^x)' = e^x; \quad 10) (a^x)' = a^x \cdot \ln a; \quad 11) (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad 12) (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(e^u)' = u' \cdot e^u; \quad (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}; \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a};$$

5. Производные обратных тригонометрических функций

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad 16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$
$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\operatorname{arctgu})' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad (\operatorname{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2};$$

6. Производная сложной функции

$$g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

7. Производная функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta \Rightarrow y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{(\psi'_x)'_t}{\varphi'(t)}$$

8. Производная функции заданной неявно

$F(x,y)=0$, производную функции $y(x)$ можно найти путем дифференцирования обеих частей уравнения по переменной x , учитывая тот факт, что y есть функция от x .

9. Производная показательной степенной функции: $y = u(x)^{v(x)}$

$$y' = (u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x) - \text{формула}$$

$$y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln(y) = \ln(u(x)^{v(x)}) = v(x) \cdot \ln(u(x)) \Rightarrow (\ln(y))' = (v(x) \cdot \ln(u(x)))'$$

$$\frac{y'}{y} = (v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot (\ln(u(x)))' = (v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{(u(x))'}{u(x)}$$

$$y' = y \cdot \left((v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{(u(x))'}{u(x)} \right) = u(x)^{v(x)} \cdot \left((v(x))' \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{(u(x))'}{u(x)} \right)$$

10. Производные и дифференциалы высших порядков

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

11. Правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Задачи и упражнения

1. Используя определение, найти производную функций: 1) $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 2$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 1$; 3) $y = \sin 2x$ в произвольной точке x ; 4) $y = \ln 3x$ в точке $x_0 = 1$.

2. Найти производные функций:

1) $y = 3x^2 - 5x + 7$; 2) $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 0.5x + 4$; 3) $y = ax^2 + bx + c$; 4) $y = x^3 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$;

- 5) $y = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{x^2}$; 6) $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$, найти $f(1), f'(1), f'(4)$; 7) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2}$, найти $f(-1), f'(-1), f'(2)$; 8) $y = (x^2 - 1)(2x + 1)$ 9) $y = (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)(\sqrt{x} + 1)$; 10) $y = \frac{x-1}{x+1}$; 11) $y = \frac{x^2+1}{x}$; 12) $y = \frac{x}{x^2-1}$; 13) $y = \frac{1}{x+2} + 3x^2$; 14) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
- 15) $y = \sqrt{4-x^2}$; 16) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 17) $y = 2^x$; 18) $y = 3 \cdot 2^x - \frac{5}{2^x}$; 19) $y = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2}$; 20) $y = x \cdot e^x$;
- 21) $y = \frac{2^x}{x}$; 22) $y = \sin 2x + \cos 3x$; 23) $y = \sin^2 x - 5 \cos^2 x$; 24) $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$; 25) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
- 26) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 27) $y = x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$; 28) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; 29) $y = \sin(\frac{1}{x})$; 30) $y = \sin(\cos x)$; 31) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$;
- 32) $y = \sin(\cos x)$; 33) $y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$; 34) $y = x \arccos x$; 35) $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$; 36) $y = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsin} x$;
- 37) $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; 38) $y = \ln 2x$; 39) $y = \ln^2 x$; 40) $y = x \ln x - x$; 41) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$;
- 42) $y = \ln \sin x + \ln \cos x$; 43) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 44) $y = \sqrt{\ln x}$; 45) $y = \ln \operatorname{tg} x$; 46) $y = 2^{\frac{\ln x}{x}}$; 47) $y = x^x$;
- 48) $y = x^{\ln x}$; 49) $y = (\ln x)^x$; 50) $y = \frac{(x-1)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x+2)^3}$; 51) $y = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; 52) $y = \frac{1}{x} (\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2})$;
- 53) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$; 54) $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x - x$; 55) $y = \arccos \sqrt{1-2x}$; 56) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$; 57) $y = \begin{cases} x = t \sin t, \\ y = t \cos t. \end{cases}$
- 58) $y = \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$; 59) $y = \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$; 60) $y = \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$; 61) $y = \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$; 62) $y^2 + 2xy + a^2 = 0$; 63) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + a^2 = 0$; 64) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; 65) $e^x + e^y = e^{x+y}$; 66) $y = \sin(x+y)$; 67) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; 68) $y^3 - 3y + 2x = 0$; 69) $y \ln y = x$. 70) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}}$; 71) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x}$;

3. Дана парабола $y = (x-1)^2$. 1) Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе, а) в точке (0,1); б) в точке (1,0); в) в точке (3,4); 2) написать уравнения касательной и нормали в указанных выше точках. 3) в какой точке касательная параллельна прямой

$$2x - y + 7 = 0?$$

4. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

1) $y = -x^2 + 3x - 2$, $x_0 = 3$; 2) $y = \frac{x+1}{2x-1}$, $x_0 = 1$; 3) $y = \frac{3x-1}{x^2+1}$, $x_0 = 2$; 4) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, $x_0 = \sqrt{2}$; 5) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = e^t \end{cases}$, $x_0 = 0$; 6)

$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$, $x_0 = \sqrt{2}$; 7) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$, $t = 1$; 8) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$, $t = 1$;

5. Найти dy , если:

1) $y = (1+x-x^2)^3$; 2) $y = 5^{\ln \sin x}$; 3) $y = (x^3+1)^{\lg 2x}$; 4) $y = \arctg^3 \frac{2x}{1-x^2}$; 5) $y = \frac{x}{\sqrt{\cos x}}$.

6. Вычислить приближенно:

1) $\sqrt[3]{8,01}$; 2) $\cos 32^\circ$; 3) $\arcsin 0,48$ 4) $\lg 10,08$.

7. Найти производные указанного порядка:

1) $y = xe^{-x^2}$, $y'' = ?$ 2) $y = x^6 - 4x^3 + 4$, $y^{iv}(1) = ?$ 3) $y = e^{2x} \sin 3x$, $y'''(0) = ?$ 4) $y = \ln^2 x$, $y'' = ?$

5) $y = e^{3x}$, $y^{(n)} = ?$ 6) $y = \sin^2 x$, $y^{(n)} = ?$

8. Найти y'_x , y''_{xx} для функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

9. Используя правило Лопиталья, вычислить пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{3-4x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{1-5x-x^2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tg 3x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{1 - \cos 3x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin^2 x}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{e^{x^2} - 1}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\arctg x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin 2x}{x - \arctg x}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$; 16) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln 4x}{\ln x}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$;

18) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{2+x}{x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$; 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tg x)}$; 21) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$; 22) $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x$; 23) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tg \frac{\pi x}{2}}$;

24) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$; 25) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tg x)^{2x-\pi}$.

Схема общего исследования функции $y=f(x)$.

1. Область определения функции. Точки разрыва функции. Поведение функции на границах. Вертикальные асимптоты.
2. Четность (нечетность), периодичность функции.
3. Промежутки возрастания ($f'(x) \geq 0$) и убывания ($f'(x) \leq 0$), критические точки функции ($f'(x) = 0 \vee$ не существует) и их характер.
4. Промежутки вогнутости ($f''(x) \leq 0$) и выпуклости ($f''(x) \geq 0$), точки перегиба функции ($f''(x) = 0 \vee$ не существует).
5. Наклонные асимптоты функции (вертикальные, горизонтальные и наклонные). $y=kx+b$ – наклонная асимптота, $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$
6. Дополнительные точки графика функции.
7. Построение графика функции.

Исследовать функции и построить их график.

1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; 2) $y = x - \frac{1}{3}x^3$; 3) $y = x + \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;
5) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 6) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 7) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$; 8) $y = x + \operatorname{arctg} x$;