

1. Вычислите неопределенные интегралы, используя соответствующую подстановку.

1. а) $\int (15x - 8)^9 dx$, б) $\int \frac{e^x dx}{\sin^2(e^x + 2)}$, в) $\int \frac{\cos x dx}{25 \cos^2 x + 4}$;
2. а) $\int \sqrt[6]{12 - 10x} dx$, б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{(3 + 2 \cos x)^3}}$, в) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{49 - 16 \sin^2 x}}$;
3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(6x + 7)^2}}$, б) $\int \frac{3^x dx}{\cos^2(2 \cdot 3^x - 4)}$, в) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{25 + 4^x}}$;
4. а) $\int 6^{1-5x} dx$, б) $\int 7^{\cos x - 3} \sin x dx$, в) $\int \frac{3^x dx}{16 + 9^x}$;
5. а) $\int (5x - 7)^{11} dx$, б) $\int \frac{8^x dx}{\cos^2(3 - 8^x)}$, в) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{36x^{10} + 49}}$;
6. а) $\int \frac{dx}{\cos^2(15x + 9)}$, б) $\int e^x \cdot 6^{2-e^x} dx$, в) $\int \frac{x dx}{25 - 64x^4}$;
7. а) $\int \cos(8 - 3x) dx$, б) $\int 3^x \cdot \sqrt[4]{(15 + 2 \cdot 3^x)^3} dx$, в) $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{49 - 25^x}}$;
8. а) $\int \frac{dx}{\sin^2(7x + 6)}$, б) $\int \cos(15 - 2^x) \cdot 2^x dx$, в) $\int \frac{x^2 dx}{16x^6 + 9}$;
9. а) $\int \sin(5 - 4x) dx$, б) $\int \cos x \cdot 5^{10+2\sin x} dx$, в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9 - 25x^8}}$;
10. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{13 - 8x}}$, б) $\int \frac{\sin x dx}{3 + 2 \cos x}$, в) $\int \frac{x dx}{36x^4 - 25}$.

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{x}}; 12. \int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos^2 x) \cdot \sqrt[3]{\ln(1 + \cos^2 x)}};$$

2. Вычислите неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1. а) $\int x \operatorname{arctg} x dx$, б) $\int (x^2 - 4x + 3) \sin 2x dx$, в) $\int e^{-3x} \cos x dx$;
2. а) $\int x \sin 4x dx$, б) $\int (2x^2 + x - 2) \cos 2x dx$. 3. а) $\int \arcsin x dx$. 4. а) $\int x^6 \ln x dx$.
5. а) $\int x \cos 5x dx$. 6. а) $\int x e^{-2x} dx$. 7. а) $\int x \ln x dx$. 8. а) $\int \operatorname{arctg} x dx$.

3. Интегрирование рациональных функций

1. $\int \frac{x^3}{x+3} dx$. 2. $\int \frac{x^4}{x^2+4} dx$. 3. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$. 4. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$. 5. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$. 6. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx$.
7. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$. 8. $\int \frac{3x-2}{x^4-x^3} dx$. 9. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx$. 10. $\int \frac{dx}{x^3+8}$. 11. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$.
12. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx$. 13. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx$. 14. $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$.

4. Интегрирование тригонометрических функций.

1. $\int \cos^2(5x+1)dx$.
2. $\int (1-\sin 2x)^2 dx$.
3. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.
4. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.
5. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$
6. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.
7. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.
8. $\int \cos^5 x dx$.
9. $\int \sin^6 2x dx$.
10. $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x}$

5. Интегрирование иррациональных функций.

1. $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$.
2. $\int \frac{dx}{1+2\sqrt{x}}$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})}$.
4. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$.
5. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$.
6. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx$.
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+1}}$.
8. $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$.
9. $\int x^2 \sqrt{9-x^2} dx$.
10. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

1. Вычислите неопределенные интегралы, используя соответствующую подстановку.

$$10. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sqrt[6]{13-8x}}, \text{ б) } \int \frac{\sin x dx}{3+2\cos x}, \text{ в) } \int \frac{x dx}{36x^4-25}. 12. \int \frac{\sin 2x dx}{(1+\cos^2 x) \cdot \sqrt[3]{\ln(1+\cos^2 x)}};$$

2. Вычислите неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям.

$$1. \text{ а) } \int x \arctg x dx, \text{ б) } \int (x^2 - 4x + 3) \sin 2x dx, \text{ в) } \int e^{-3x} \cos x dx;$$

3. Интегрирование рациональных функций

$$1. \int \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 3} dx = ?$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 3} = \frac{x^3 + 3x + x^2 + 3 - 3x + 2}{x^2 + 3} = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3} + \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} + \frac{-3x + 2}{x^2 + 3} = \frac{x(x^2 + 3)}{x^2 + 3} + \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} + \frac{-3x + 2}{x^2 + 3} =$$

$$= x + 1 - \frac{3x}{x^2 + 3} + \frac{2}{x^2 + 3} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^2 + 3} dx = \int \left(x + 1 - \frac{3x}{x^2 + 3} + \frac{2}{x^2 + 3} \right) dx = x^2 + x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + c;$$

$$2. \int \frac{x^3 + 2x - 1}{(x-2)(x+1)^3} dx \Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 1}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

$$3. \int \frac{x+1}{x^2(x^2-2x+1)^3} dx \Rightarrow \frac{x+1}{x^2(x^2-2x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3}$$

$$4. \int \frac{x+1}{x^2(x^2+2x+2)} dx \Rightarrow \frac{x+1}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

4. Интегрирование тригонометрических функций.

$$1. \int \cos^5 x \cdot \sin x dx. \quad 2. \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}. \quad 3. \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin x dx. \quad 4. \int \sqrt{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx. \quad 5. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^6 x}. \quad 6. \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx.$$

$$7. \int \sin^2 3x dx. \quad 8. \int \cos^4 \frac{x}{2} dx. \quad 9. \int (tg^2 x - 3) dx = \left| \begin{array}{l} tg x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| \quad 10. \int tg^4 x dx = \left| \begin{array}{l} tg x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| \quad 11.$$

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \left| \begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

5. Интегрирование иррациональных функций.

$$1. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx. \quad 2. \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}. \quad 3. \int x\sqrt{3-x} dx. \quad 4. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}. \quad 5. \int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}. \quad 7. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad 8. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$