

Содержание

Практикум по высшей математике.....	1
Занятие 1. Двойной интеграл в декартовых координатах.....	3
Занятие 2. Двойной интеграл в полярных координатах. Замена переменных	7
Занятие 3. Приложения двойного интеграла.....	10
Занятие 4. Тройной интеграл и его приложения.....	14
Занятие 5. Криволинейный интеграл второго рода: вычисление	18
Занятие 6. Формула Грина. Независимость от пути интегрирования	22
Занятие 7. Скалярное поле: градиент и производная по направлению	26
Занятие 8. Векторное поле: дивергенция, ротор и поток.....	29
Занятие 9. Циркуляция. Формула Стокса. Классификация полей	32
Занятие 10. Числовые ряды. Признаки сходимости	36
Занятие 11. Степенные ряды. Ряды Тейлора и их приложения	39
Занятие 12. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения.....	43
Занятие 13. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные испытания.....	46
Занятие 14. Случайные величины и их числовые характеристики.....	50
Занятие 15. Элементы математической статистики	54

Практикум по высшей математике

Кратные интегралы · криволинейные интегралы · теория поля · ряды · теория вероятностей и математическая статистика

Практикум содержит пятнадцать практических занятий продолжительностью 90 минут каждое. Материал занятий подобран на основе сборника задач по высшей математике и сохраняет принятую в нём систему обозначений.

Каждое занятие построено по единой схеме: цель занятия и хронометраж, краткий справочный материал, разбор типовых задач с решениями, задачи для аудиторной работы, тестовые задания с выбором ответа, домашнее задание. Ответы ко всем заданиям помещены в конце соответствующего занятия. Каждое занятие начинается с новой страницы.

Распределение учебного времени

Занятия 1–4 Кратные интегралы и их приложения

Занятия 5–6	Криволинейный интеграл второго рода и его приложения
Занятия 7–9	Теория поля и её приложения
Занятия 10–11	Числовые и функциональные ряды и их приложения
Занятия 12–13	Теория вероятностей
Занятие 14	Случайные величины и их числовые характеристики
Занятие 15	Элементы математической статистики

Типовой хронометраж занятия: организационная часть и проверка домашнего задания — 10 мин; повторение теоретического материала — 10 мин; разбор типовых задач у доски — 25 мин; самостоятельная работа с задачами занятия — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; подведение итогов и выдача домашнего задания — 5 мин.

Основные обозначения: D — плоская область; V — пространственная область; L — линия (контур); σ — поверхность; $\rho(x, y)$, $\gamma(x, y, z)$ — плотность; $\vec{F}$ — векторное поле; $\text{grad } u$, $\text{div } \vec{F}$, $\text{rot } \vec{F}$ — градиент, дивергенция и ротор; $M(X)$, $D(X)$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Занятие 1. Двойной интеграл в декартовых координатах

Цель занятия: научиться сводить двойной интеграл к повторному, расставлять пределы интегрирования по области и изменять порядок интегрирования.

Хронометраж: проверка готовности группы — 5 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 35 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Пусть область D правильна в направлении оси Oy , то есть задана неравенствами $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$. Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Если область правильна в направлении оси Ox , то есть $c \leq y \leq d$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Для прямоугольника $D = [a; b] \times [c; d]$ и функции $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ повторный интеграл распадается на произведение:

$$\iint_D \varphi(x)\psi(y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx \cdot \int_c^d \psi(y) dy.$$

Основные свойства: линейность, аддитивность по области, а также равенство $\iint_D dx dy = S_D$, где S_D — площадь области D .

Изменение порядка интегрирования выполняется в три шага: по заданным пределам строится чертёж области; область переописывается неравенствами относительно другой переменной; записывается новый повторный интеграл.

Разбор типовых задач

Пример 1. Вычислить $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где $D = [0; 1] \times [0; 2]$.

Решение. Внутреннее интегрирование ведём по y при постоянном x :

$$\int_0^2 (x + 2y) dy = (xy + y^2)|_0^2 = 2x + 4.$$

Далее $\int_0^1 (2x + 4) dx = (x^2 + 4x)|_0^1 = 5$. Ответ: 5.

Пример 2. Вычислить $\iint_D x y \, dx \, dy$, где D ограничена линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение. Кривые пересекаются в точках $(0; 0)$ и $(1; 1)$, причём при $0 \leq x \leq 1$ выполнено $x^2 \leq \sqrt{x}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_D x y \, dx \, dy &= \int_0^1 x \, dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy = \int_0^1 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy$.

Решение. Область задана условиями $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq x$. Она заключена между параболой и прямой, причём $0 \leq y \leq 1$. Из $y = x^2$ получаем $x = \sqrt{y}$, из $y = x$ получаем $x = y$, и при $0 \leq y \leq 1$ справедливо $y \leq \sqrt{y}$. Следовательно,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx.$$

Задачи для аудиторной работы

- 1.1. Вычислить $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$, где $D = [0; 2] \times [0; 1]$.
- 1.2. Вычислить $\iint_D x y^2 \, dx \, dy$, где $D = [0; 1] \times [0; 3]$.
- 1.3. Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, где $D = [0; 1] \times [0; 2]$.
- 1.4. Вычислить $\iint_D (x - y) \, dx \, dy$, где D — треугольник, ограниченный линиями $y = 0$, $y = x$, $x = 2$.
- 1.5. Вычислить $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$, где D ограничена линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.
- 1.6. Вычислить $\iint_D y \, dx \, dy$, где D ограничена линиями $y = 0$, $y = \sin x$ при $0 \leq x \leq \pi$.
- 1.7. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy$.
- 1.8. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

T1.1. Двойной интеграл $\iint_D dx \, dy$ численно равен...

- | | | | |
|------------------------------------|---------------------------|---------|-----------------------------|
| 1. длине
границы
области D | 2. площади
области D | 3. нулю | 4. периметру
области D |
|------------------------------------|---------------------------|---------|-----------------------------|

Т1.2. Значение интеграла $\int_0^1 dx \int_0^2 xy dy$ равно...

- | | | | |
|------|------|------------------|------|
| 1. 1 | 2. 2 | 3. $\frac{1}{2}$ | 4. 4 |
|------|------|------------------|------|

Т1.3. При изменении порядка интегрирования интеграл $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy$ примет вид...

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\int_0^1 dy \int_0^y f dx$ | 2. $\int_0^1 dy \int_y^1 f dx$ |
| 3. $\int_0^1 dy \int_0^1 f dx$ | 4. $\int_0^1 dy \int_1^y f dx$ |

Т1.4. Значение интеграла $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ по квадрату $D = [0; 1] \times [0; 1]$ равно...

- | | | | |
|------------------|------------------|------|------------------|
| 1. $\frac{1}{3}$ | 2. $\frac{2}{3}$ | 3. 1 | 4. $\frac{4}{3}$ |
|------------------|------------------|------|------------------|

Т1.5. Область D называется правильной в направлении оси Oy , если...

- | | |
|--|--|
| 1. она ограничена | 2. любая прямая, параллельная оси Oy и проходящая внутри D , пересекает границу не более чем в двух точках |
| 3. она симметрична относительно оси Oy | 4. она выпукла относительно оси Ox |

Домашнее задание

Д1.1. Вычислить $\iint_D (2x + 3y) dx dy$, где $D = [0; 1] \times [0; 2]$.

Д1.2. Вычислить $\iint_D xy dx dy$, где D ограничена линиями $y = x$ и $y = x^2$.

Д1.3. Вычислить $\iint_D (x - 2y) dx dy$, где D — треугольник, ограниченный линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Д1.4. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_0^1 dx \int_{x^3}^x f(x, y) dy$.

Д1.5. Вычислить $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, где $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответы к занятию 1

Аудиторная работа. 1.1 — 3; 1.2 — $\frac{9}{2}$; 1.3 — $\frac{10}{3}$; 1.4 — $\frac{4}{3}$; 1.5 — $\frac{52}{15}$; 1.6 — $\frac{\pi}{4}$; 1.7 — $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$; 1.8 — $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$.

Тестовые задания. Т1.1 — 2; Т1.2 — 1; Т1.3 — 1; Т1.4 — 2; Т1.5 — 2.

Домашнее задание. Д1.1 — 8; Д1.2 — $\frac{1}{24}$; Д1.3 — $-\frac{1}{6}$; Д1.4 — $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$; Д1.5 — 2.

Занятие 2. Двойной интеграл в полярных координатах. Замена переменных

Цель занятия: освоить переход к полярным и обобщённым полярным координатам, научиться вычислять якобиан замены переменных и подбирать замену по виду области.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

При замене переменных $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv, \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Полярные координаты: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, причём $J = r$ и

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

При этом $x^2 + y^2 = r^2$. Круг $x^2 + y^2 \leq R^2$ переходит в прямоугольник $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$; кольцо $R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$ — в прямоугольник $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $R_1 \leq r \leq R_2$.

Обобщённые полярные координаты: $x = a r \cos \varphi$, $y = b r \sin \varphi$, якобиан $J = ab r$; эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ переходит в прямоугольник $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$.

Площадь в полярных координатах: если область ограничена кривой $r = r(\varphi)$ при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Разбор типовых задач

Пример 1. Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

Решение. Переходим к полярным координатам:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 = 8\pi.$$

Пример 2. Вычислить $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq R^2$.

Решение. В полярных координатах подынтегральная функция принимает вид e^{-r^2} , поэтому

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. По формуле площади в полярных координатах

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} (2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Задачи для аудиторной работы

- 2.1. Вычислить $\iint_D dx dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq 9$.
- 2.2. Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
- 2.3. Вычислить $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq 4$.
- 2.4. Вычислить $\iint_D y dx dy$, где D — верхний полукруг $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$.
- 2.5. Вычислить $\iint_D x y dx dy$, где D — четверть круга $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.
- 2.6. Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$.
- 2.7. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r = 2\cos\varphi$.
- 2.8. Вычислить $\iint_D dx dy$, где $D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

T2.1. Якобиан перехода к полярным координатам равен...

- | | | | | | | | |
|----|---|----|-----|----|-------|----|---------------|
| 1. | 1 | 2. | r | 3. | r^2 | 4. | $\frac{1}{r}$ |
|----|---|----|-----|----|-------|----|---------------|

T2.2. В полярных координатах кольцо $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ описывается неравенствами...

- | | | | |
|----|---|----|---|
| 1. | $1 \leq r \leq 4, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ | 2. | $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ |
| 3. | $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi$ | 4. | $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ |

T2.3. Значение интеграла $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ по кругу $x^2 + y^2 \leq 1$ равно...

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. π 4. 2π

T2.4. Площадь фигуры, ограниченной кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле...

1. $\int_{\alpha}^{\beta} r \, d\varphi$ 2. $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi$
 3. $\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi$ 4. $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r \, d\varphi$

T2.5. Якобиан обобщённых полярных координат $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ равен...

1. ab 2. r 3. $ab r$ 4. $ab r^2$

Домашнее задание

Д2.1. Вычислить $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

Д2.2. Вычислить $\iint_D dx \, dy$, где $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Д2.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

Д2.4. Вычислить $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$, где $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

Д2.5. Вычислить $\iint_D dx \, dy$, где $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

Ответы к занятию 2

Аудиторная работа. 2.1 — 9π ; 2.2 — $\frac{15\pi}{2}$; 2.3 — $\frac{16\pi}{3}$; 2.4 — $\frac{2a^3}{3}$; 2.5 — $\frac{1}{8}$; 2.6 — 4π ; 2.7 — π ; 2.8 — 6π .

Тестовые задания. T2.1 — 2; T2.2 — 2; T2.3 — 2; T2.4 — 2; T2.5 — 3.

Домашнее задание. Д2.1 — $\frac{2\pi}{3}$; Д2.2 — 8π ; Д2.3 — 6π ; Д2.4 — $\pi(1 - e^{-1})$; Д2.5 — 6π .

Занятие 3. Приложения двойного интеграла

Цель занятия: научиться применять двойной интеграл к вычислению площадей плоских фигур, объёмов тел, площадей поверхностей, а также массы, статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции плоской пластины.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Площадь плоской фигуры: $S = \iint_D dx dy$.

Объём цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$, снизу — областью D плоскости Oxy :

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Площадь поверхности $z = f(x, y)$, проектирующей в область D :

$$S_\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Масса пластины с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$: $m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$.

Статические моменты относительно осей координат:

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x \rho(x, y) dx dy.$$

Координаты центра тяжести: $x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}$.

Моменты инерции:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \rho dx dy, & I_y &= \iint_D x^2 \rho dx dy, & I_o &= I_x + I_y \\ & & & & &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho dx dy. \end{aligned}$$

Разбор типовых задач

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Решение. Точки пересечения: $x^2 = 2 - x^2$, откуда $x = \pm 1$. Тогда

$$S = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} dy = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left(2x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

Пример 2. Найти массу пластины D : $x^2 + y^2 \leq 1$ с плотностью $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Переходим к полярным координатам:

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 3. Найти площадь части параболоида $z = x^2 + y^2$, отсечённой плоскостью $z = 1$.

Решение. Здесь $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, проекция — круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Тогда

$$S_\sigma = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{12} \Big|_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}.$$

Задачи для аудиторной работы

- 3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2$.
- 3.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.
- 3.3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2 - y^2$ и $z = 0$.
- 3.4. Найти объём тела, ограниченного поверхностью $z = xy$, плоскостью $z = 0$ и квадратом $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
- 3.5. Найти массу пластины $D = [0; 1] \times [0; 1]$ с плотностью $\rho(x, y) = x + y$.
- 3.6. Найти момент инерции I_x однородной прямоугольной пластины $D = [0; a] \times [0; b]$ при $\rho = 1$.
- 3.7. Найти координаты центра тяжести однородного треугольника, ограниченного линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.
- 3.8. Найти площадь части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной над кругом $x^2 + y^2 \leq 4$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т3.1. Объём цилиндрического тела с верхним основанием $z = f(x, y) \geq 0$ вычисляется по формуле...

- | | | | |
|----|---------------------|----|--------------------------|
| 1. | $\iint_D dx dy$ | 2. | $\iint_D f dx dy$ |
| 3. | $\iint_D f^2 dx dy$ | 4. | $\iint_D \sqrt{f} dx dy$ |

Т3.2. Масса пластины с плотностью $\rho(x, y)$ равна...

- | | | | |
|----|------------------------|----|------------------------|
| 1. | $\iint_D \rho dx dy$ | 2. | $\iint_D x \rho dx dy$ |
| 3. | $\iint_D \rho^2 dx dy$ | 4. | $\iint_D dx dy$ |

Т3.3. Ордината центра тяжести пластины вычисляется по формуле...

- | | | | | | | | |
|----|-----------------------|----|-----------------------|----|---------------|----|-----------------------|
| 1. | $y_c = \frac{M_y}{m}$ | 2. | $y_c = \frac{M_x}{m}$ | 3. | $y_c = M_x m$ | 4. | $y_c = \frac{m}{M_x}$ |
|----|-----------------------|----|-----------------------|----|---------------|----|-----------------------|

Т3.4. Момент инерции пластины относительно начала координат равен...

- | | | | | | | | |
|----|-------------|----|-----------|----|-------------|----|-------------------|
| 1. | $I_x - I_y$ | 2. | $I_x I_y$ | 3. | $I_x + I_y$ | 4. | $\frac{I_x}{I_y}$ |
|----|-------------|----|-----------|----|-------------|----|-------------------|

Т3.5. Площадь поверхности $z = f(x, y)$ над областью D равна...

- | | | | |
|----|-------------------------------------|----|--|
| 1. | $\iint_D f dx dy$ | 2. | $\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$ |
| 3. | $\iint_D (1 + z_x^2 + z_y^2) dx dy$ | 4. | $\iint_D \sqrt{z_x^2 + z_y^2} dx dy$ |

Домашнее задание

Д3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

Д3.2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 0$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Д3.3. Найти массу круглой пластины $x^2 + y^2 \leq 4$ с плотностью $\rho = x^2 + y^2$.

Д3.4. Найти момент инерции I_O однородного круга $x^2 + y^2 \leq a^2$ при $\rho = 1$.

Д3.5. Найти ординату центра тяжести однородного полукруга $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$.

Ответы к занятию 3

Аудиторная работа. 3.1 — $\frac{1}{6}$; 3.2 — $\frac{1}{3}$; 3.3 — 8π ; 3.4 — $\frac{1}{4}$; 3.5 — 1; 3.6 — $\frac{ab^3}{3}$; 3.7 — $x_c = y_c = \frac{1}{3}$; 3.8 — $4\pi\sqrt{2}$.

Тестовые задания. ТЗ.1 — 2; ТЗ.2 — 1; ТЗ.3 — 2; ТЗ.4 — 3; ТЗ.5 — 2.

Домашнее задание. ДЗ.1 — $\frac{32}{3}$; ДЗ.2 — $\frac{\pi}{2}$; ДЗ.3 — 8π ; ДЗ.4 — $\frac{\pi a^4}{2}$; ДЗ.5 — $y_c = \frac{4a}{3\pi}$.

Занятие 4. Тройной интеграл и его приложения

Цель занятия: научиться сводить тройной интеграл к повторному, вычислять его в цилиндрической и сферической системах координат и применять к нахождению объёмов, массы, координат центра тяжести и моментов инерции тел.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Если область V задана условиями $(x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, то

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Цилиндрические координаты: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$, якобиан $J = r$. Применяются, когда область ограничена цилиндрическими или коническими поверхностями.

Сферические координаты: $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$, якобиан $J = \rho^2 \sin \theta$, причём $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$. Применяются, когда область ограничена сферами и конусами с вершиной в начале координат.

Приложения тройного интеграла. Объём тела и масса тела с плотностью $\gamma(x, y, z)$:

$$V = \iiint_V dV, \quad m = \iiint_V \gamma dV.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей и координаты центра тяжести:

$$M_{xy} = \iiint_V z \gamma dV, \quad M_{xz} = \iiint_V y \gamma dV, \quad M_{yz} = \iiint_V x \gamma dV; \quad x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma dV, \quad I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma dV, \quad I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma dV, \quad I_o = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma dV.$$

Разбор типовых задач

Пример 1. Вычислить $\iiint_V z \, dV$, где V — цилиндр $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$.

Решение. В цилиндрических координатах

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \, dr \int_0^2 z \, dz = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2\pi.$$

Пример 2. Вычислить $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$, где V — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Решение. В сферических координатах подынтегральная функция равна ρ^2 , поэтому

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^R \rho^2 \cdot \rho^2 \, d\rho = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

Пример 3. Найти координату z_c центра тяжести однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, при $\gamma = 1$.

Решение. Масса равна половине объёма шара: $m = \frac{2\pi R^3}{3}$. Статический момент

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^R \rho^3 \, d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

$$\text{Отсюда } z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi R^4}{4} \cdot \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3R}{8}.$$

Задачи для аудиторной работы

4.1. Вычислить $\iiint_V x \, dV$, где $V = [0; 1] \times [0; 2] \times [0; 3]$.

4.2. Вычислить $\iiint_V x \, dV$, где V — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

4.3. Вычислить объём цилиндра $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 5$.

4.4. Вычислить $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dV$, где V — цилиндр $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$.

4.5. Вычислить объём шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

4.6. Вычислить объём тела, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 1$.

4.7. Вычислить объём тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$.

4.8. Найти массу куба $[0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$ с плотностью $\gamma = x + y + z$.

4.9. Найти координаты центра тяжести однородного тетраэдра $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$.

4.10. Найти момент инерции I_z однородного цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h$, при $\gamma = 1$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т4.1. Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен...

1. 1 2. r 3. r^2 4. $r \sin \theta$

Т4.2. Якобиан перехода к сферическим координатам равен...

1. ρ^2 2. $\rho \sin \theta$ 3. $\rho^2 \sin \theta$ 4. $\rho^2 \cos \theta$

Т4.3. Интеграл $\iiint_V dV$ численно равен...

1. площади поверхности тела 2. объёму тела V 3. массе тела 4. нулю

Т4.4. Объём шара радиуса R равен...

1. $4\pi R^2$ 2. $\frac{4\pi R^3}{3}$ 3. $\frac{\pi R^3}{3}$ 4. $2\pi R^3$

Т4.5. Масса тела с плотностью $\gamma(x, y, z)$ равна...

1. $\iiint_V dV$ 2. $\iiint_V \gamma dV$ 3. $\iiint_V \gamma^2 dV$ 4. $\iiint_V z \gamma dV$

Т4.6. Момент инерции тела относительно оси Oz равен...

1. $\iiint_V z^2 \gamma dV$ 2. $\iiint_V (x^2 + y^2) \gamma dV$ 3. $\iiint_V (y^2 + z^2) \gamma dV$ 4. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma dV$

Домашнее задание

Д4.1. Вычислить $\iiint_V (x + y) dV$, где $V = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 2]$.

Д4.2. Вычислить объём тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 \leq 9$ и плоскостями $z = 0, z = 2$.

Д4.3. Вычислить $\iiint_V z dV$, где V — цилиндр $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3$.

Д4.4. Вычислить объём тетраэдра $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 2$.

Д4.5. Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ с плотностью $\gamma = x^2 + y^2 + z^2$.

Д4.6. Найти момент инерции I_z однородного цилиндра $x^2 + y^2 \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$, при $\gamma = 1$.

Ответы к занятию 4

Аудиторная работа. 4.1 — 3; 4.2 — $\frac{1}{24}$; 4.3 — 20π ; 4.4 — π ; 4.5 — 36π ; 4.6 — $\frac{\pi}{3}$; 4.7 — 8π ; 4.8 — $\frac{3}{2}$; 4.9 — $x_c = y_c = z_c = \frac{1}{4}$; 4.10 — $\frac{\pi R^4 h}{2}$.

Тестовые задания. Т4.1 — 2; Т4.2 — 3; Т4.3 — 2; Т4.4 — 2; Т4.5 — 2; Т4.6 — 2.

Домашнее задание. Д4.1 — 2; Д4.2 — 18π ; Д4.3 — 18π ; Д4.4 — $\frac{4}{3}$; Д4.5 — $\frac{4\pi}{5}$; Д4.6 — 6π .

Занятие 5. Криволинейный интеграл второго рода: вычисление

Цель занятия: научиться вычислять криволинейный интеграл второго рода по явно заданной кривой, по параметрически заданной кривой и по ломаной, а также применять его к вычислению работы силы.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Криволинейный интеграл второго рода (интеграл по координатам) обозначается

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Вычисление по параметрически заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, t изменяется от α до β :

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Вычисление по кривой $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx.$$

Свойства. При изменении направления обхода интеграл меняет знак:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = - \int_{BA} P dx + Q dy.$$

Интеграл аддитивен по кривой: если L разбита на части L_1 и L_2 , то интеграл по L равен сумме интегралов по частям. Для замкнутого контура применяется обозначение $\oint_L$; положительным считается обход против часовой стрелки.

Механический смысл. Работа переменной силы $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ вдоль пути L равна

$$A = \int_L P dx + Q dy.$$

В пространственном случае $A = \int_L P dx + Q dy + R dz$.

Разбор типовых задач

Пример 1. Вычислить $\int_L (x + y) dx + (x - y) dy$, где L — отрезок от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.

Решение. Возьмём параметризацию $x = t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$; тогда $dx = dt$, $dy = dt$ и

$$\int_0^1 [(t + t) + (t - t)] dt = \int_0^1 2t dt = 1.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L y dx$, где L — дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0; 0)$ до точки $(1; 1)$.

Решение. Здесь $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Пример 3. Вычислить $\oint_L y dx - x dy$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$, обходимой против часовой стрелки.

Решение. Положим $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тогда $dx = -R \sin t dt$, $dy = R \cos t dt$ и

$$\oint_L y dx - x dy = \int_0^{2\pi} (-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t) dt = -R^2 \int_0^{2\pi} dt = -2\pi R^2.$$

Задачи для аудиторной работы

5.1. Вычислить $\int_L x dx + y dy$, где L — отрезок от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 2)$.

5.2. Вычислить $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, где L — отрезок от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 3)$.

5.3. Вычислить $\int_L x dy$, где L — дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0; 0)$ до точки $(1; 1)$.

5.4. Вычислить $\oint_L -y dx + x dy$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$ (обход против часовой стрелки).

5.5. Вычислить $\int_L (x + y) dx + (x - y) dy$ по ломаной $O(0; 0) \rightarrow A(1; 0) \rightarrow B(1; 1)$.

5.6. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вдоль отрезка от точки $A(1; 0)$ до точки $B(0; 1)$.

5.7. Вычислить $\int_L y dx + x dy$, где L — любая кривая, соединяющая точки $(0; 0)$ и $(2; 3)$.

5.8. Вычислить $\int_L x dx + y dy + z dz$, где L — отрезок от точки $O(0; 0; 0)$ до точки $A(1; 1; 1)$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

T5.1. При изменении направления обхода кривой криволинейный интеграл второго рода...

1. не изменяется
2. меняет знак
3. обращается в нуль
4. удваивается

T5.2. Работа силы $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ вдоль пути L выражается интегралом...

1. $\int_L P dx + Q dy$
2. $\int_L \sqrt{P^2 + Q^2} dl$
3. $\int_L (P + Q) dl$
4. $\int_L P Q dx$

T5.3. Значение интеграла $\int_L y dx$ по отрезку от точки $(0; 0)$ до точки $(1; 1)$ равно...

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. 0

T5.4. Если кривая L задана параметрически, то dx заменяется на...

1. $x(t) dt$
2. $x'(t) dt$
3. $\frac{dt}{x'(t)}$
4. $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$

T5.5. Значение интеграла $\oint_L -y dx + x dy$ по замкнутому контуру, ограничивающему область площади S (обход против часовой стрелки), равно...

1. S
2. $2S$
3. $\frac{S}{2}$
4. 0

Домашнее задание

Д5.1. Вычислить $\int_L y dx - x dy$, где L — отрезок от точки $O(0; 0)$ до точки $A(2; 1)$.

Д5.2. Вычислить $\int_L x^2 dx + y^2 dy$ по дуге параболы $y = x^2$ от точки $(0; 0)$ до точки $(1; 1)$.

Д5.3. Вычислить $\oint_L y dx + x dy$ по окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Д5.4. Найти работу силы $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ вдоль отрезка от точки $O(0; 0)$ до точки $A(3; 4)$.

Д5.5. Вычислить $\int_L (x - y) dx + (x + y) dy$ по ломаной $O(0; 0) \rightarrow A(2; 0) \rightarrow B(2; 2)$.

Ответы к занятию 5

Аудиторная работа. 5.1 — $\frac{5}{2}$; 5.2 — 3; 5.3 — $\frac{2}{3}$; 5.4 — 2π ; 5.5 — 1; 5.6 — -1 ; 5.7 — 6; 5.8 — $\frac{3}{2}$.

Тестовые задания. Т5.1 — 2; Т5.2 — 1; Т5.3 — 2; Т5.4 — 2; Т5.5 — 2.

Домашнее задание. Д5.1 — 0; Д5.2 — $\frac{2}{3}$; Д5.3 — 0; Д5.4 — $\frac{25}{2}$; Д5.5 — 8.

Занятие 6. Формула Грина. Независимость от пути интегрирования

Цель занятия: научиться применять формулу Грина к вычислению интегралов по замкнутому контуру и площадям плоских фигур, проверять условие независимости интеграла от пути и восстанавливать потенциал.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Формула Грина. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в замкнутой области D , ограниченной контуром L , то

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где обход контура L совершается против часовой стрелки.

Вычисление площади с помощью формулы Грина:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

Условие независимости от пути. Криволинейный интеграл $\int_L P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования в односвязной области тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При выполнении этого условия подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, называемой потенциалом:

$$du = P dx + Q dy, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q,$$

и справедлива формула Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A).$$

В частности, по любому замкнутому контуру такой интеграл равен нулю.

Разбор типовых задач

Пример 1. Вычислить $\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (обход против часовой стрелки).

Решение. Здесь $P = x - y$, $Q = x + y$, поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$. По формуле Грина

$$\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy = \iint_D 2 dx dy = 2\pi R^2.$$

Пример 2. Проверить, что интеграл $\int_L (2xy + y^2) dx + (x^2 + 2xy) dy$ не зависит от пути, и найти его значение от точки $A(0; 0)$ до точки $B(1; 2)$.

Решение. Имеем $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2y$ — условие выполнено. Ищем потенциал:

$$u = \int (2xy + y^2) dx = x^2 y + xy^2 + \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2xy + \varphi'(y) = x^2 + 2xy,$$

откуда $\varphi'(y) = 0$ и $u = x^2 y + xy^2$. Следовательно, интеграл равен $u(1; 2) - u(0; 0) = 2 + 4 = 6$.

Пример 3. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с помощью формулы Грина.

Решение. Положим $x = acost$, $y = bsint$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

Задачи для аудиторной работы

6.1. С помощью формулы Грина вычислить $\oint_L -y dx + x dy$ по окружности $x^2 + y^2 = 4$.

6.2. С помощью формулы Грина вычислить $\oint_L y^2 dx + x^2 dy$ по контуру квадрата $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

6.3. С помощью формулы Грина вычислить $\oint_L (x^2 y) dx + (xy^2) dy$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$.

6.4. Проверить независимость от пути и вычислить $\int_{AB} y dx + x dy$, где $A(0; 0)$, $B(3; 4)$.

6.5. Найти потенциал поля $\vec{F} = (3x^2 + y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j}$.

6.6. Вычислить $\int_{AB} (2x + y) dx + (x + 2y) dy$, где $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, предварительно проверив условие независимости от пути.

6.7. С помощью формулы Грина найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6.8. Вычислить $\oint_L (x + y) dx - (x - y) dy$ по контуру треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ (обход против часовой стрелки).

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т6.1. Формула Грина связывает...

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. двойной и тройной интегралы | 2. криволинейный интеграл по замкнутому контуру и двойной интеграл по области |
| 3. поверхностный и тройной интегралы | 4. определённый и несобственный интегралы |

Т6.2. Криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, если...

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ | 2. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ |
| 3. $P = Q$ | 4. $P + Q = 0$ |

Т6.3. Площадь области, ограниченной контуром L , равна...

- | | |
|-------------------|--------------------------------------|
| 1. $\oint_L x dy$ | 2. $\frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$ |
| 3. $\oint_L y dx$ | 4. $\frac{1}{2} \oint_L x dx + y dy$ |

Т6.4. Если подынтегральное выражение является полным дифференциалом, то интеграл по любому замкнутому контуру равен...

- | | | | |
|--------------------|---------|------------|------------------|
| 1. площади области | 2. нулю | 3. единице | 4. длине контура |
|--------------------|---------|------------|------------------|

Т6.5. Значение интеграла $\oint_L -y dx + x dy$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$ равно...

- | | | | |
|------|----------|-----------|-----------|
| 1. 0 | 2. π | 3. 2π | 4. 4π |
|------|----------|-----------|-----------|

Домашнее задание

Д6.1. С помощью формулы Грина вычислить $\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy$ по окружности $x^2 + y^2 = 9$.

Д6.2. С помощью формулы Грина вычислить $\oint_L x y dx + x^2 dy$ по контуру квадрата $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

Д6.3. Найти потенциал поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 + 3y^2)\vec{j}$.

Д6.4. Вычислить $\int_{AB} 2xy dx + x^2 dy$, где $A(0; 0)$, $B(2; 3)$.

Д6.5. С помощью формулы Грина найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x = 3\cos t, y = 2\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Ответы к занятию 6

Аудиторная работа. 6.1 — 8π ; 6.2 — 0; 6.3 — 0; 6.4 — 12; 6.5 — $u = x^3 + xy + y^2 + C$; 6.6 — 3; 6.7 — $\frac{3\pi a^2}{8}$; 6.8 — -1.

Тестовые задания. Т6.1 — 2; Т6.2 — 2; Т6.3 — 2; Т6.4 — 2; Т6.5 — 3.

Домашнее задание. Д6.1 — 18π ; Д6.2 — 4; Д6.3 — $u = x^2y + y^3 + C$; Д6.4 — 12; Д6.5 — 6π .

Занятие 7. Скалярное поле: градиент и производная по направлению

Цель занятия: научиться находить поверхности и линии уровня скалярного поля, вычислять градиент и производную по направлению, определять направление и величину наибольшей скорости изменения поля.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Скалярное поле задаётся функцией $u = u(x, y, z)$. **Поверхностью уровня** называется множество точек, в которых $u(x, y, z) = C$; в плоском случае $u(x, y) = C$ определяет **линию уровня**.

Градиент скалярного поля:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Производная по направлению вектора $\vec{l}$ с единичным вектором $\vec{e} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma = \text{grad } u \cdot \vec{e}.$$

Свойства градиента:

- градиент направлен в сторону наибольшего возрастания поля;
- наибольшая скорость изменения поля в точке равна $|\text{grad } u|$;
- градиент перпендикулярен поверхности (линии) уровня, проходящей через данную точку;
- $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, если направление $\vec{l}$ касается поверхности уровня.

Правила: $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$, $\text{grad}(Cu) = C \text{grad } u$, $\text{grad}(uv) = u \text{grad } v + v \text{grad } u$.

Разбор типовых задач

Пример 1. Найти $\text{grad } u$ и $|\text{grad } u|$ для поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(1; 2; 2)$.

Решение. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$, поэтому

$$\text{grad } u|_M = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}, \quad |\text{grad } u| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6.$$

Пример 2. Найти производную поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(1; 2; 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение. Так как $|\vec{l}| = 3$, то $\vec{e} = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ и

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 6.$$

Полученное значение совпало с $|\text{grad } u|$, поскольку направление $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента.

Пример 3. Найти линии уровня поля $u = x^2 + y^2$ и угол между градиентом в точке $M(1; 1)$ и осью Ox .

Решение. Линии уровня $x^2 + y^2 = C$ — концентрические окружности с центром в начале координат. Далее $\text{grad } u|_M = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, поэтому

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Задачи для аудиторной работы

7.1. Найти $\text{grad } u$ для поля $u = 3x^2y - z^3$ в точке $M(1; 2; 1)$.

7.2. Найти $|\text{grad } u|$ для поля $u = xyz$ в точке $M(1; 2; 3)$.

7.3. Найти производную поля $u = x^2 - y^2$ в точке $M(1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

7.4. Найти производную поля $u = x + y + z$ в точке $M(0; 0; 0)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

7.5. Найти наибольшую скорость изменения поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ в точке $M(1; 1; 1)$.

7.6. Найти поверхности уровня поля $u = x^2 + y^2 - z$.

7.7. Найти угол между градиентами полей $u = x^2 + y^2$ и $v = x + y$ в точке $M(1; 1)$.

7.8. В каком направлении из точки $M(1; 0)$ поле $u = x^2 + y^2$ не изменяется?

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т7.1. Градиент скалярного поля есть...

- | | | | |
|-----------|-----------|------------|-----------------------|
| 1. скаляр | 2. вектор | 3. матрица | 4. число, равное нулю |
|-----------|-----------|------------|-----------------------|

Т7.2. Наибольшая скорость изменения поля в точке равна...

- | | | | |
|----|---------------------------------|----|--------------------|
| 1. | $\text{grad } u$ | 2. | $ \text{grad } u $ |
| 3. | $\frac{\partial u}{\partial x}$ | 4. | нулю |

Т7.3. Градиент направлен...

1. по касательной к поверхности
2. по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания поля
3. по нормали в сторону убывания поля
4. произвольно

Т7.4. Производная поля $u = x + 2y$ в точке $M(0; 0)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i}$ равна...

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

Т7.5. Линиями уровня поля $u = x^2 + y^2$ являются...

1. прямые
2. параболы
3. окружности с центром в начале координат
4. гиперболы

Домашнее задание

Д7.1. Найти $\text{grad } u$ для поля $u = x^2y + yz^2$ в точке $M(1; 1; 2)$.

Д7.2. Найти производную поля $u = xy + z$ в точке $M(1; 1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Д7.3. Найти наибольшую скорость изменения поля $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(1; 2; 2)$.

Д7.4. Найти линии уровня поля $u = \frac{y}{x}$ при $x \neq 0$.

Д7.5. Найти производную поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(1; 1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$.

Ответы к занятию 7

Аудиторная работа. 7.1 — $12\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$; 7.2 — 7; 7.3 — $-\frac{2}{5}$; 7.4 — $\sqrt{3}$; 7.5 — $2\sqrt{14}$; 7.6 — параболоиды вращения $z = x^2 + y^2 - C$; 7.7 — 0; 7.8 — по направлению оси Oz , то есть по касательной к окружности уровня.

Тестовые задания. Т7.1 — 2; Т7.2 — 2; Т7.3 — 2; Т7.4 — 2; Т7.5 — 3.

Домашнее задание. Д7.1 — $2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$; Д7.2 — $\frac{5}{3}$; Д7.3 — 1; Д7.4 — прямые $y = Cx$ (без точки $x = 0$); Д7.5 — 0.

Занятие 8. Векторное поле: дивергенция, ротор и поток

Цель занятия: научиться вычислять дивергенцию и ротор векторного поля, находить поток векторного поля через замкнутую поверхность непосредственно и по формуле Остроградского — Гаусса.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Векторное поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Дивергенция:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротор:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Поток векторного поля через поверхность σ с единичным вектором нормали $\vec{n}$:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Формула Остроградского — Гаусса. Для замкнутой поверхности σ , ограничивающей тело V , при внешней нормали

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

Физический смысл: $\operatorname{div} \vec{F}$ характеризует мощность источников поля в точке. Если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ во всех точках, поле называется **соленоидальным** и поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Разбор типовых задач

Пример 1. Найти $\operatorname{div} \vec{F}$ и $\operatorname{rot} \vec{F}$ для поля $\vec{F} = xz\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$.

Решение. Дивергенция: $\operatorname{div} \vec{F} = z + 2y + y = z + 3y$. Ротор:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial(yz)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(xz)}{\partial z} - \frac{\partial(yz)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} \right) \vec{k} = z\vec{i} + x\vec{j}.$$

$$3. \oint_L P \, dx + Q \, dy$$

$$= \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy$$

$$4. \iint_D f \, dx \, dy = \iint_{D'} f |J| \, du \, dv$$

Т8.4. Поле называется соленоидальным, если...

$$1. \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$$

$$2. \quad \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

$$3. \quad \vec{F} = \operatorname{grad} u$$

$$4. \quad |\vec{F}| = \operatorname{const}$$

Т8.5. Поток поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через сферу радиуса R равен...

$$1. \quad 4\pi R^2$$

$$2. \quad 4\pi R^3$$

$$3. \quad \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$4. \quad 0$$

Домашнее задание

Д8.1. Найти $\operatorname{div} \vec{F}$ для поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ в точке $M(1; 1; 1)$.

Д8.2. Найти $\operatorname{rot} \vec{F}$ для поля $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Д8.3. Найти поток поля $\vec{F} = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} + 3z\vec{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Д8.4. Найти поток поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через границу куба $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$.

Д8.5. Проверить, является ли соленоидальным поле $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ответы к занятию 8

Аудиторная работа. 8.1 — 4; 8.2 — $-2\vec{k}$; 8.3 — $\vec{0}$; 8.4 — 8π ; 8.5 — 2π ; 8.6 — 24π ; 8.7 — да, $\operatorname{div} \vec{F} = 0$; 8.8 — $\frac{4\pi}{5}$.

Тестовые задания. Т8.1 — 2; Т8.2 — 2; Т8.3 — 1; Т8.4 — 2; Т8.5 — 2.

Домашнее задание. Д8.1 — 3; Д8.2 — $\vec{0}$; Д8.3 — 96π ; Д8.4 — 24; Д8.5 — нет, $\operatorname{div} \vec{F} = 1 \neq 0$.

Занятие 9. Циркуляция. Формула Стокса. Классификация полей

Цель занятия: научиться вычислять циркуляцию векторного поля непосредственно и по формуле Стокса, распознавать потенциальные и соленоидальные поля, находить потенциал пространственного поля.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Циркуляция векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L :

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

Формула Стокса. Если σ — поверхность, натянутая на контур L , а направление обхода контура согласовано с выбором нормали $\vec{n}$, то

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Формула Грина является частным случаем формулы Стокса для плоского поля.

Классификация полей.

- Поле **потенциально** (безвихревое), если $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$. Тогда существует функция u , для которой $\vec{F} = \operatorname{grad} u$, циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, а криволинейный интеграл не зависит от пути и равен $u(B) - u(A)$.
- Поле **соленоидально** (трубчатое), если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.
- Поле **гармоническое**, если оно одновременно потенциально и соленоидально; его потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Полезные тождества: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \vec{0}$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

Разбор типовых задач

Пример 1. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ (обход против часовой стрелки).

Решение. Непосредственно: при $x = R \cos t$, $y = R \sin t$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) dt = 2\pi R^2.$$

По формуле Стокса: $\text{rot } \vec{F} = 2\vec{k}$, нормаль $\vec{n} = \vec{k}$, поэтому $\Gamma = 2 \cdot \pi R^2 = 2\pi R^2$ — результаты совпали.

Пример 2. Установить, является ли поле $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ потенциальным, и найти его потенциал.

Решение. Вычисляем ротор:

$$\text{rot } \vec{F} = (x - x)\vec{i} + (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = \vec{0},$$

значит поле потенциально. Из условия $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$ получаем $u = xyz + \varphi(y, z)$; сравнение с $\frac{\partial u}{\partial y} = xz$ и $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$ даёт $\varphi = \text{const}$. Итак, $u = xyz + C$.

Пример 3. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ по контуру треугольника, вырезанного плоскостью $x + y + z = 1$ из первого октанта, при нормали, образующей острые углы с осями координат.

Решение. Находим $\text{rot } \vec{F} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Единичная нормаль плоскости $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, поэтому $\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}$. Площадь треугольника с вершинами $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно,

$$\Gamma = -\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Задачи для аудиторной работы

- 9.1. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$.
- 9.2. Найти $\text{rot } \vec{F}$ для поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$ и вычислить циркуляцию этого поля по контуру квадрата $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
- 9.3. Проверить потенциальность поля $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ и найти его потенциал.
- 9.4. Проверить потенциальность поля $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ и найти его потенциал.
- 9.5. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ по любому замкнутому контуру.
- 9.6. Установить, является ли поле $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным, гармоническим.
- 9.7. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ (нормаль направлена вдоль оси Oz).
- 9.8. Вычислить $\text{div}(\text{rot } \vec{F})$ для поля $\vec{F} = xz\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т9.1. Формула Стокса связывает...

- | | |
|---|---|
| 1. поток через замкнутую поверхность и тройной интеграл | 2. циркуляцию по контуру и поток ротора через поверхность |
| 3. двойной и повторный интегралы | 4. градиент и дивергенцию |

Т9.2. Поле потенциально тогда и только тогда, когда...

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ | 2. $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ |
| 3. $ \vec{F} = \text{const}$ | 4. $\vec{F} = \vec{0}$ |

Т9.3. Циркуляция потенциального поля по замкнутому контуру равна...

- | | | | |
|------------------|------------------------|---------|----------------|
| 1. длине контура | 2. площади поверхности | 3. нулю | 4. потоку поля |
|------------------|------------------------|---------|----------------|

Т9.4. Выражение $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$ равно...

- | | | | |
|--------------|----------------------------|---------------------------------|--------|
| 1. $\vec{0}$ | 2. $\operatorname{grad} u$ | 3. $\operatorname{div} \vec{F}$ | 4. u |
|--------------|----------------------------|---------------------------------|--------|

Т9.5. Циркуляция поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности радиуса R с центром в начале координат равна...

- | | | | |
|------|--------------|---------------|-------------|
| 1. 0 | 2. πR^2 | 3. $2\pi R^2$ | 4. $2\pi R$ |
|------|--------------|---------------|-------------|

Домашнее задание

Д9.1. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

Д9.2. Проверить потенциальность поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j} + \vec{k}$ и найти его потенциал.

Д9.3. Найти $\operatorname{rot} \vec{F}$ для поля $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$.

Д9.4. Установить, является ли поле $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ соленоидальным и потенциальным.

Д9.5. С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию поля $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ по окружности $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ (нормаль направлена вдоль оси Oz).

Ответы к занятию 9

Аудиторная работа. 9.1 — 18π ; 9.2 — $\operatorname{rot} \vec{F} = (2x - 2y)\vec{k}$, циркуляция равна 0; 9.3 — потенциально, $u = x^2 + y^2 + z^2 + C$; 9.4 — потенциально, $u = xy + z + C$; 9.5 — 0, так как поле потенциально ($u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$); 9.6 — соленоидально и потенциально, следовательно гармонично; 9.7 — 2π ; 9.8 — 0.

Тестовые задания. Т9.1 — 2; Т9.2 — 2; Т9.3 — 3; Т9.4 — 1; Т9.5 — 3.

Домашнее задание. Д9.1 — 8π ; Д9.2 — потенциально, $u = x^2y + z + C$; Д9.3 — $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; Д9.4 — соленоидально ($\operatorname{div} \vec{F} = 0$), но не потенциально ($\operatorname{rot} \vec{F} = -2\vec{k}$); Д9.5 — -2π .

Занятие 10. Числовые ряды. Признаки сходимости

Цель занятия: научиться исследовать сходимость числовых рядов с помощью необходимого признака, признаков сравнения, Даламбера, Коши и интегрального признака, а также исследовать знакочередующиеся ряды на абсолютную и условную сходимость.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Необходимый признак сходимости: если ряд сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Если предел отличен от нуля или не существует, ряд расходится.

Эталонные ряды. Геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$. Обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Признак Даламбера: если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ расходится, при $l = 1$ вопрос остаётся открытым.

Радикальный признак Коши: если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ расходится.

Интегральный признак Коши: если $f(x)$ положительна, непрерывна и убывает при $x \geq 1$ и $f(n) = a_n$, то ряд и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Признак Лейбница: знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ с $a_n > 0$ сходится, если a_n монотонно убывает и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Если при этом сходится ряд из модулей, сходимость называется **абсолютной**, иначе — **условной**.

Разбор типовых задач

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Разложим общий член: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Тогда

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

Ряд сходится, его сумма равна 1.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение. По признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ монотонно убывает и стремится к нулю, поэтому по признаку Лейбница ряд сходится. Ряд из модулей — гармонический, он расходится. Значит, сходимость условная.

Задачи для аудиторной работы

10.1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

10.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

10.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

10.4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

10.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

10.6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

10.7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

10.8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т10.1. Необходимый признак сходимости ряда состоит в том, что...

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

3. $a_n > 0$

4. $S_n > 0$

Т10.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при...

1. $p \leq 1$

2. $p > 1$

3. $p > 0$

4. любом p

Т10.3. Геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при...

1. $q > 1$

2. $|q| < 1$

3. $q < 0$

4. любом q

Т10.4. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ равна...

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. 2 4. ряд
расходится

T10.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \dots$

1. сходится абсолютно 2. сходится условно 3. расходится 4. сходится к нулю

Домашнее задание

Д10.1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Д10.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Д10.3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Д10.4. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Д10.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Ответы к занятию 10

Аудиторная работа. **10.1** — сходится (сравнение с $\sum \frac{1}{n^2}$); **10.2** — расходится, так как $a_n \rightarrow 1 \neq 0$; **10.3** — сходится (признак Даламбера, $l = 0$); **10.4** — сходится (признак Коши, $l = \frac{1}{2}$); **10.5** — сходится (интегральный признак); **10.6** — сходится абсолютно; **10.7** — сходится условно; **10.8** — $\frac{1}{2}$.

Тестовые задания. **T10.1** — 1; **T10.2** — 2; **T10.3** — 2; **T10.4** — 2; **T10.5** — 2.

Домашнее задание. **Д10.1** — расходится ($p = \frac{1}{2} \leq 1$); **Д10.2** — сходится (признак Даламбера, $l = 0$); **Д10.3** — сходится абсолютно; **Д10.4** — $\frac{2}{3}$; **Д10.5** — сходится (признак Даламбера, $l = \frac{1}{2}$).

Занятие 11. Степенные ряды. Ряды Тейлора и их приложения

Цель занятия: научиться находить область сходимости степенного ряда, раскладывать функции в ряд Маклорена и применять ряды к приближённым вычислениям значений функций и определённых интегралов.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ имеет радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ряд сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$; на концах интервала сходимость исследуется отдельно.

Ряд Тейлора: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$; при $x_0 = 0$ он называется рядом Маклорена.

Основные разложения:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, & \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, & \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty); \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1), & \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

Приложения. Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри интервала сходимости. Для знакочередующегося ряда погрешность приближения суммы частичной суммой не превосходит модуля первого отброшенного члена.

Разбор типовых задач

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Радиус сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд — расходится; при $x = -1$ получаем знакочередующийся ряд — сходится по признаку Лейбница. Область сходимости: $-1 \leq x < 1$.

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{2x}$.

Решение. Подставляя $2x$ в разложение экспоненты, получаем

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}, \quad |x| < \infty.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Поскольку $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$, почленное интегрирование даёт

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \dots = 1 - 0,0556 + 0,0017 - \dots \approx 0,946.$$

Первый отброшенный член меньше 0,001, поэтому требуемая точность достигнута.

Задачи для аудиторной работы

11.1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

11.2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

11.3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

11.4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n^2}$.

11.5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos 3x$.

11.6. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{1+x}$ и указать область сходимости.

11.7. Вычислить $e^{0,1}$ с точностью до 0,001.

11.8. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

T11.1. Радиус сходимости степенного ряда вычисляется по формуле...

1. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

2. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

3. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

4. $R = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

T11.2. Область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ есть...

1. $|x| < 1$ 2. $x = 0$ 3. вся числовая ось 4. $|x| \leq 1$

T11.3. Разложение функции e^x в ряд Маклорена имеет вид...

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
 3. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

T11.4. Внутри интервала сходимости степенной ряд можно...

1. только дифференцировать 2. только интегрировать
 3. почленно дифференцировать и интегрировать 4. ни дифференцировать, ни интегрировать

T11.5. Погрешность приближения суммы знакопеременующегося ряда частичной суммой не превосходит...

1. суммы всех отброшенных членов 2. модуля первого отброшенного члена 3. первого члена ряда 4. единицы

Домашнее задание

Д11.1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$.

Д11.2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$.

Д11.3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin 2x$.

Д11.4. Вычислить $\sqrt[3]{e}$ с точностью до 0,001, используя разложение e^x .

Д11.5. Вычислить $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Ответы к занятию 11

Аудиторная работа. 11.1 — вся числовая ось; 11.2 — только $x = 0$; 11.3 — $-1 \leq x \leq 1$; 11.4 — $-1 \leq x \leq 5$; 11.5 — $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$; 11.6 — $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $|x| < 1$; 11.7 — 1,105; 11.8 — 0,747.

Тестовые задания. T11.1 — 1; T11.2 — 3; T11.3 — 1; T11.4 — 3; T11.5 — 2.

Домашнее задание. Д11.1 — $-2 \leq x < 2$; Д11.2 — $-2 \leq x < 0$; Д11.3 — $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; Д11.4 — 1,396; Д11.5 — 0,493.

Занятие 12. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения

Цель занятия: научиться подсчитывать число исходов средствами комбинаторики, вычислять вероятности по классической схеме и применять теоремы сложения и умножения, в том числе к событиям «хотя бы один».

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Классическое определение вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$, где n — число всех равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A . Всегда $0 \leq P(A) \leq 1$; для достоверного события $P = 1$, для невозможного $P = 0$. Для противоположного события $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Комбинаторика. Число перестановок, размещений и сочетаний:

$$P_n = n!, \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Размещения применяются, когда важен порядок элементов, сочетания — когда порядок безразличен.

Теорема сложения. Для несовместных событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$; в общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема умножения. Для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B)$; в общем случае $P(AB) = P(A)P(B | A)$, где $P(B | A)$ — условная вероятность.

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий:

$$P = 1 - q_1 q_2 \dots q_n, \quad q_i = 1 - p_i.$$

Разбор типовых задач

Пример 1. В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Найти вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым.

Решение. $P = \frac{6}{10} = 0,6$.

Пример 2. В партии из 12 деталей 4 бракованные. Наудачу берут три детали. Найти вероятность того, что все три детали годные.

Решение. Порядок выбора безразличен, поэтому используем сочетания:

$$P = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55} \approx 0,255.$$

Пример 3. Два стрелка независимо стреляют по мишени; вероятности попадания равны 0,7 и 0,6. Найти вероятность хотя бы одного попадания.

Решение. $P = 1 - 0,3 \cdot 0,4 = 1 - 0,12 = 0,88$.

Задачи для аудиторной работы

12.1. В урне 5 белых и 3 чёрных шара. Найти вероятность того, что наудачу вынутый шар белый.

12.2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна семи.

12.3. Из 10 деталей, среди которых 3 бракованные, наудачу берут две. Найти вероятность того, что обе детали годные.

12.4. Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из группы в 10 человек?

12.5. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторения цифр?

12.6. Два стрелка стреляют по мишени независимо; вероятности попадания равны 0,7 и 0,8. Найти вероятность хотя бы одного попадания.

12.7. В ящике 4 белых и 6 чёрных шаров. Последовательно без возвращения вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

12.8. Известно, что $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, $P(AB) = 0,3$. Найти $P(A + B)$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т12.1. Вероятность достоверного события равна...

1. 0 2. 0,5 3. 1 4. любому числу

Т12.2. Для несовместных событий справедливо равенство...

1. $P(A + B) = P(A)P(B)$ 2. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ 3. $P(AB) = P(A)$ 4. $P(A + B) = 1$

Т12.3. Для независимых событий справедливо равенство...

1. $P(AB) = P(A)P(B)$ 2. $P(AB) = 0$ 3. $P(AB) = P(A) + P(B)$ 4. $P(AB) = 1$

Т12.4. Число сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле...

1. $\frac{n!}{(n-k)!}$ 2. $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 3. $n!$ 4. $\frac{k!}{n!}$

T12.5. При одном бросании игральной кости вероятность выпадения чётного числа очков равна...

- | | | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|
| 1. | $\frac{1}{6}$ | 2. | $\frac{1}{3}$ | 3. | $\frac{1}{2}$ | 4. | $\frac{2}{3}$ |
|----|---------------|----|---------------|----|---------------|----|---------------|

Домашнее задание

Д12.1. В урне 4 белых и 6 чёрных шаров. Найти вероятность того, что наудачу вынутый шар чёрный.

Д12.2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков равна восьми.

Д12.3. Сколькими способами можно выбрать двух старост из шести кандидатов?

Д12.4. Два прибора работают независимо; вероятности безотказной работы равны 0,6 и 0,7. Найти вероятность безотказной работы хотя бы одного прибора.

Д12.5. Из 12 деталей, среди которых 4 бракованные, наудачу берут две. Найти вероятность того, что обе детали бракованные.

Ответы к занятию 12

Аудиторная работа. 12.1 — 0,625; 12.2 — $\frac{1}{6}$; 12.3 — $\frac{7}{15}$; 12.4 — $C_{10}^3 = 120$; 12.5 — $A_5^3 = 60$; 12.6 — 0,94; 12.7 — $\frac{2}{15}$; 12.8 — 0,8.

Тестовые задания. T12.1 — 3; T12.2 — 2; T12.3 — 1; T12.4 — 2; T12.5 — 3.

Домашнее задание. Д12.1 — 0,6; Д12.2 — $\frac{5}{36}$; Д12.3 — $C_6^2 = 15$; Д12.4 — 0,88; Д12.5 — $\frac{1}{11}$.

Занятие 13. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные испытания

Цель занятия: научиться применять формулу полной вероятности и формулу Байеса, вычислять вероятности в схеме Бернулли, находить наиболее вероятное число появлений события и пользоваться теоремами Лапласа при большом числе испытаний.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Формула полной вероятности. Если события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу гипотез, то

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i).$$

Формула Байеса (переоценка вероятностей гипотез после наступления события A):

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(A)}.$$

Формула Бернулли. Вероятность ровно k появлений события в n независимых испытаниях с постоянной вероятностью p :

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Наиболее вероятное число появлений события определяется из неравенств $np - q \leq k_0 \leq np + p$.

Локальная теорема Лапласа (при большом n):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Интегральная теорема Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}},$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Разбор типовых задач

Пример 1. На заводе первый цех выпускает 60 % продукции с браком 2 %, второй — 40 % продукции с браком 5 %. Найти вероятность того, что наудачу взятое

изделие бракованное, и вероятность того, что бракованное изделие изготовлено первым цехом.

Решение. По формуле полной вероятности

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,012 + 0,02 = 0,032.$$

По формуле Байеса $P(H_1 | A) = \frac{0,012}{0,032} = 0,375$.

Пример 2. Стрелок делает 5 выстрелов, вероятность попадания при каждом равна 0,8. Найти вероятность ровно четырёх попаданий.

Решение. По формуле Бернулли

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 5 \cdot 0,4096 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

Пример 3. Монету бросают 400 раз. Найти вероятность того, что число выпадений герба заключено между 190 и 210.

Решение. Здесь $np = 200$, $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 10$, поэтому $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и по интегральной теореме Лапласа

$$P \approx \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826.$$

Задачи для аудиторной работы

13.1. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй — 2 белых и 3 чёрных. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Найти вероятность того, что он белый.

13.2. Условие задачи **13.1**. Вынутый шар оказался белым. Найти вероятность того, что он вынут из первой урны.

13.3. Первый автомат даёт 70 % деталей с браком 1 %, второй — 30 % деталей с браком 4 %. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь бракованная.

13.4. Условие задачи **13.3**. Деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена вторым автоматом.

13.5. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 3 раза.

13.6. Стрелок делает 4 выстрела с вероятностью попадания 0,9 при каждом. Найти вероятность хотя бы одного промаха.

13.7. Производится 10 независимых выстрелов с вероятностью попадания 0,6. Найти наименьшее число попаданий.

13.8. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится от 75 до 85 раз.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т13.1. Формула полной вероятности имеет вид...

- | | | | | | | | |
|----|--------------------------------|----|----------------------|----|---------------------------|----|----------------------|
| 1. | $P(A) = \sum P(H_i)P(A H_i)$ | 2. | $P(A) = \sum P(H_i)$ | 3. | $P(A) = \prod P(A H_i)$ | 4. | $P(A) = \frac{m}{n}$ |
|----|--------------------------------|----|----------------------|----|---------------------------|----|----------------------|

Т13.2. Формула Байеса служит для...

- | | | | | | | | |
|----|------------------------------|----|---|----|-------------------------|----|---|
| 1. | подсчёта
числа
исходов | 2. | переоценки
вероятностей
гипотез
после
испытания | 3. | вычисления
дисперсии | 4. | нахождения
наивероятнейшего
числа |
|----|------------------------------|----|---|----|-------------------------|----|---|

Т13.3. Формула Бернулли имеет вид...

- | | | | | | | | |
|----|------------------------------|----|------------------------|----|----------------------|----|------------------------|
| 1. | $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ | 2. | $P_n(k) = p^k q^{n-k}$ | 3. | $P_n(k) = C_n^k p q$ | 4. | $P_n(k) = \frac{k}{n}$ |
|----|------------------------------|----|------------------------|----|----------------------|----|------------------------|

Т13.4. Формула Бернулли применима, если испытания...

- | | | | | | | | |
|----|----------|----|---|----|------------------------------|----|-------------|
| 1. | зависимы | 2. | независимы и
вероятность
события в
каждом
постоянна | 3. | образуют
полную
группу | 4. | несовместны |
|----|----------|----|---|----|------------------------------|----|-------------|

Т13.5. Интегральная теорема Лапласа даёт приближение для...

- | | | | | | | | |
|----|---------------------------------------|----|---|----|-----------------------------|----|-------------------------|
| 1. | вероятности
ровно k
появлений | 2. | вероятности
числа
появлений в
заданных
границах | 3. | математического
ожидания | 4. | условной
вероятности |
|----|---------------------------------------|----|---|----|-----------------------------|----|-------------------------|

Домашнее задание

Д13.1. В первой урне 4 белых и 1 чёрный шар, во второй — 2 белых и 3 чёрных. Из наудачу выбранной урны вынимают шар. Найти вероятность того, что он белый.

Д13.2. Условие задачи **Д13.1.** Вынутый шар оказался белым. Найти вероятность того, что он вынут из второй урны.

Д13.3. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 2 раза.

Д13.4. Производится 8 независимых выстрелов с вероятностью попадания 0,5. Найти наивероятнейшее число попаданий.

Д13.5. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что событие появится от 180 до 220 раз.

Ответы к занятию 13

Аудиторная работа. 13.1 — 0,5; 13.2 — 0,6; 13.3 — 0,019; 13.4 — $\approx 0,632$; 13.5 — 0,3125; 13.6 — 0,3439; 13.7 — $k_0 = 6$; 13.8 — $2\Phi(1,25) = 0,7888$.

Тестовые задания. Т13.1 — 1; Т13.2 — 2; Т13.3 — 1; Т13.4 — 2; Т13.5 — 2.

Домашнее задание. Д13.1 — 0,6; Д13.2 — $\frac{1}{3} \approx 0,333$; Д13.3 — 0,3125; Д13.4 — $k_0 = 4$; Д13.5 — $2\Phi(2) = 0,9544$.

Занятие 14. Случайные величины и их числовые характеристики

Цель занятия: научиться составлять закон распределения дискретной случайной величины и вычислять её числовые характеристики, работать с функцией распределения и плотностью распределения непрерывной случайной величины, применять равномерное, показательное и нормальное распределения.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Дискретная случайная величина задаётся законом распределения — таблицей значений x_i и вероятностей p_i , причём $\sum_i p_i = 1$. Числовые характеристики:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i, \quad D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Свойства: $M(C) = C$, $M(CX) = C M(X)$, $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, $D(C) = 0$, $D(CX) = C^2 D(X)$.

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ определена для любой случайной величины; она неубывающая, $0 \leq F(x) \leq 1$, причём $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Непрерывная случайная величина задаётся плотностью $f(x)$, для которой $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. При этом

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \\ D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2.$$

Равномерное распределение на отрезке $[a; b]$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ внутри отрезка и $f(x) = 0$ вне его, при этом

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$; тогда

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0), \quad M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальное распределение с параметрами a и σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Правило трёх сигм: практически все значения нормальной величины лежат в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Разбор типовых задач

Пример 1. Дискретная случайная величина задана законом распределения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ с вероятностями 0,2; 0,5; 0,3. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение.

$$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 = 2,1; \quad M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,3 = 4,9;$$

$$D(X) = 4,9 - 2,1^2 = 0,49, \quad \sigma(X) = 0,7.$$

Пример 2. Непрерывная случайная величина задана плотностью $f(x) = 2x$ при $0 \leq x \leq 1$ и $f(x) = 0$ вне этого отрезка. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение.

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}, \quad M(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2}, \quad D(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Пример 3. Случайная величина распределена нормально с параметрами $a = 10$, $\sigma = 2$. Найти $P(8 < X < 14)$.

Решение.

$$P(8 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{2}\right) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185.$$

Задачи для аудиторной работы

14.1. Дискретная случайная величина принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 0,3; 0,4; 0,3. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

14.2. Случайная величина принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями 0,3; 0,4; p_3 . Найти p_3 .

14.3. Случайная величина X — число выпадений герба при двух бросаниях монеты. Составить закон распределения и найти $M(X)$ и $D(X)$.

14.4. Найти постоянную c , при которой функция $f(x) = cx^2$ на отрезке $[0; 1]$ (и $f(x) = 0$ вне его) является плотностью распределения.

14.5. Для плотности $f(x) = \frac{1}{2}$ при $0 \leq x \leq 2$ найти $M(X)$ и $D(X)$.

14.6. Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[2; 8]$. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(3 < X < 5)$.

14.7. Случайная величина распределена нормально с параметрами $a = 20$, $\sigma = 5$. Найти $P(15 < X < 25)$.

14.8. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0,5$. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $P(X > 2)$.

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

Т14.1. Сумма вероятностей всех значений дискретной случайной величины равна...

1. 0 2. 0,5 3. 1 4. числу значений

Т14.2. Дисперсия случайной величины вычисляется по формуле...

1. $M(X^2) - [M(X)]^2$ 2. $M(X) - M(X^2)$
3. $[M(X)]^2$ 4. $\sqrt{M(X)}$

Т14.3. Для плотности распределения справедливо равенство...

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
3. $f(x) \leq 0$ 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \infty$

Т14.4. Дисперсия постоянной величины равна...

1. самой постоянной 2. квадрату постоянной 3. нулю 4. единице

Т14.5. Математическое ожидание величины, распределённой равномерно на отрезке $[a; b]$, равно...

1. $\frac{a+b}{2}$ 2. $\frac{(b-a)^2}{12}$
3. $\frac{1}{b-a}$ 4. $b-a$

Домашнее задание

Д14.1. Дискретная случайная величина принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 0,1; 0,6; 0,3. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Д14.2. Для плотности $f(x) = 3x^2$ при $0 \leq x \leq 1$ найти $M(X)$.

Д14.3. Случайная величина распределена нормально с параметрами $a = 20$, $\sigma = 5$. Найти $P(10 < X < 25)$.

Д14.4. Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[0; 6]$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Д14.5. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти $M(X)$ и $P(X < 1)$.

Ответы к занятию 14

Аудиторная работа. **14.1** — $M(X) = 1$, $D(X) = 0,6$; **14.2** — $p_3 = 0,3$; **14.3** — значения 0, 1, 2 с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25, $M(X) = 1$, $D(X) = 0,5$; **14.4** — $c = 3$; **14.5** — $M(X) = 1$, $D(X) = \frac{1}{3}$; **14.6** — $M(X) = 5$, $D(X) = 3$, $P(3 < X < 5) = \frac{1}{3}$; **14.7** — 0,6826; **14.8** — $M(X) = 2$, $D(X) = 4$, $P(X > 2) = e^{-1} \approx 0,368$.

Тестовые задания. **Т14.1** — 3; **Т14.2** — 1; **Т14.3** — 2; **Т14.4** — 3; **Т14.5** — 1.

Домашнее задание. **Д14.1** — $M(X) = 1,2$, $D(X) = 0,36$, $\sigma(X) = 0,6$; **Д14.2** — $\frac{3}{4}$; **Д14.3** — 0,8185; **Д14.4** — $M(X) = 3$, $D(X) = 3$; **Д14.5** — $M(X) = 0,5$, $P(X < 1) = 1 - e^{-2} \approx 0,865$.

Занятие 15. Элементы математической статистики

Цель занятия: научиться строить вариационный ряд и гистограмму частот, вычислять выборочные характеристики, находить точечные оценки параметров генеральной совокупности и доверительный интервал для математического ожидания.

Хронометраж: проверка домашнего задания — 10 мин; теоретическое повторение — 10 мин; разбор типовых задач — 25 мин; самостоятельная работа — 30 мин; тестовый контроль — 10 мин; итоги занятия — 5 мин.

Справочный материал

Генеральная совокупность и выборка. Из генеральной совокупности извлекается выборка объёма n . Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, числа их появлений n_i — частотами, причём $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Относительные частоты

$$w_i = \frac{n_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Расположенные в порядке возрастания варианты вместе с частотами образуют **вариационный ряд**. Графически ряд изображают полигоном частот (для дискретного ряда) и гистограммой частот (для интервального ряда); высота столбца гистограммы равна плотности частоты $\frac{n_i}{h}$, где h — длина частичного интервала.

Выборочные характеристики. Для выборки объёма n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i, \quad D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2,$$
$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Точечные оценки. Оценка называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру. Выборочное среднее $\bar{x}$ — несмещённая оценка математического ожидания (генеральной средней), исправленная дисперсия s^2 — несмещённая оценка генеральной дисперсии; выборочная дисперсия D_B смещена.

Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределённого признака при известном σ :

$$\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где t определяется из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$; при $\gamma = 0,95$ имеем $t = 1,96$, при $\gamma = 0,99$ имеем $t = 2,58$. Если σ неизвестно, вместо него берут s , а значение t_γ

находят по таблице распределения Стьюдента. Из формулы точности δ получается необходимый объём выборки

$$n \geq \left(\frac{t\sigma}{\delta} \right)^2.$$

Разбор типовых задач

Пример 1. Дана выборка: 2; 4; 4; 6; 9. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и исправленную дисперсию.

Решение.

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 4 + 6 + 9}{5} = 5, \quad D_B = \frac{9 + 1 + 1 + 1 + 16}{5} = 5,6, \quad s^2 = \frac{5}{4} \cdot 5,6 = 7.$$

Пример 2. Дискретный вариационный ряд задан вариантами $x_i = 1; 2; 3; 4$ с частотами $n_i = 5; 10; 3; 2$. Найти $\bar{x}$ и D_B .

Решение. Объём выборки $n = 20$, поэтому

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{20} = 2,1, \quad \overline{x^2} = \frac{5 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 16}{20} = 5,2,$$

$$D_B = 5,2 - 2,1^2 = 0,79.$$

Пример 3. По выборке объёма $n = 100$ получено $\bar{x} = 15$; известно, что $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал для математического ожидания при надёжности $\gamma = 0,95$.

Решение. При $\gamma = 0,95$ имеем $t = 1,96$, поэтому

$$\delta = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392, \quad 14,608 < a < 15,392.$$

Задачи для аудиторной работы

15.1. Для выборки 1; 2; 2; 4; 6 найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и исправленную дисперсию.

15.2. Вариационный ряд задан вариантами $x_i = 2; 4; 6$ с частотами $n_i = 3; 5; 2$. Найти $\bar{x}$ и D_B .

15.3. Частоты вариант равны $n_1 = 4$, $n_2 = 10$, $n_3 = 6$. Найти объём выборки и относительные частоты.

15.4. Объём выборки $n = 50$, причём $\sum_i n_i x_i = 300$. Найти выборочное среднее.

15.5. По выборке объёма $n = 25$ получена выборочная дисперсия $D_B = 4,8$. Найти исправленную дисперсию s^2 .

15.6. По выборке объёма $n = 100$ получено $\bar{x} = 20$; известно $\sigma = 5$. Найти доверительный интервал для математического ожидания при надёжности $\gamma = 0,95$.

15.7. По выборке объёма $n = 64$ получено $\bar{x} = 10$; известно $\sigma = 4$. Найти доверительный интервал для математического ожидания при надёжности $\gamma = 0,95$.

15.8. Каким должен быть объём выборки, чтобы при $\sigma = 5$ и надёжности $\gamma = 0,95$ точность оценки математического ожидания была равна $\delta = 1\%$?

Тестовые задания

В каждом задании выберите единственный верный ответ.

T15.1. Выборочное среднее вычисляется по формуле...

- | | | | |
|----|------------------------------|----|---------------------|
| 1. | $\frac{1}{n} \sum_i n_i x_i$ | 2. | $\sum_i n_i x_i$ |
| 3. | $\frac{1}{n-1} \sum_i x_i$ | 4. | $\frac{n}{n-1} D_B$ |

T15.2. Несмещённой оценкой генеральной дисперсии является...

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1. выборочная дисперсия D_B | 2. исправленная выборочная дисперсия s^2 |
| 3. выборочное среднее | 4. размах выборки |

T15.3. Сумма относительных частот вариационного ряда равна...

- | | | | |
|------|-------------------|------|------------------|
| 1. 0 | 2. объёму выборки | 3. 1 | 4. числу вариант |
|------|-------------------|------|------------------|

T15.4. При увеличении надёжности γ доверительный интервал...

- | | | | |
|-------------|----------------|------------------|-----------------------|
| 1. сужается | 2. расширяется | 3. не изменяется | 4. обращается в точку |
|-------------|----------------|------------------|-----------------------|

T15.5. Исправленная дисперсия связана с выборочной соотношением...

- | | | | |
|----|---------------------------|----|---------------------------|
| 1. | $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$ | 2. | $s^2 = \frac{n-1}{n} D_B$ |
| 3. | $s^2 = n D_B$ | 4. | $s^2 = D_B$ |

Домашнее задание

D15.1. Для выборки 2; 3; 3; 5; 7 найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и исправленную дисперсию.

D15.2. Вариационный ряд задан вариантами $x_i = 1; 3; 5$ с частотами $n_i = 2; 5; 3$. Найти $\bar{x}$ и D_B .

D15.3. По выборке объёма $n = 10$ получена выборочная дисперсия $D_B = 3,6$. Найти исправленную дисперсию.

Д15.4. По выборке объёма $n = 25$ получено $\bar{x} = 12$; известно $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для математического ожидания при надёжности $\gamma = 0,95$.

Д15.5. Каким должен быть объём выборки, чтобы при $\sigma = 4$ и надёжности $\gamma = 0,95$ точность оценки была равна $\delta = 0,8$?

Ответы к занятию 15

Аудиторная работа. 15.1 — $\bar{x} = 3$, $D_{\text{в}} = 3,2$, $s^2 = 4$; 15.2 — $\bar{x} = 3,8$, $D_{\text{в}} = 1,96$; 15.3 — $n = 20$, относительные частоты 0,2; 0,5; 0,3; 15.4 — $\bar{x} = 6$; 15.5 — $s^2 = 5$; 15.6 — (19,02; 20,98); 15.7 — (9,02; 10,98); 15.8 — $n \geq 96,04$, то есть $n = 97$.

Тестовые задания. Т15.1 — 1; Т15.2 — 2; Т15.3 — 3; Т15.4 — 2; Т15.5 — 1.

Домашнее задание. Д15.1 — $\bar{x} = 4$, $D_{\text{в}} = 3,2$, $s^2 = 4$; Д15.2 — $\bar{x} = 3,2$, $D_{\text{в}} = 1,96$; Д15.3 — $s^2 = 4$; Д15.4 — (10,824; 13,176); Д15.5 — $n \geq 96,04$, то есть $n = 97$.