

Предел функции. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной

Обзорная лекция для студентов заочной формы обучения (4 академических часа)

Как пользоваться конспектом

Лекция носит прикладной характер: даны определения, основные формулировки, таблицы и подробно разобранные примеры. Доказательства теорем не приводятся. После каждого раздела рекомендуется самостоятельно повторить разобранные примеры, закрыв решение, а затем решить аналогичные задачи из контрольной работы.

План лекции

№	Раздел	Время
1	Предел функции. Раскрытие неопределённостей. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые	55 мин
2	Производная: определение, смысл, правила и таблица производных. Дифференциал. Правило Лопиталя. Исследование функций	65 мин
3	Неопределённый интеграл: таблица и методы интегрирования. Определённый интеграл, формула Ньютона — Лейбница, вычисление площадей и объёмов	60 мин
	Итого	180 мин

Часть 1. Предел функции

1.1. Определение предела

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что при всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Проще говоря: значения $f(x)$ сколь угодно близко подходят к числу A , когда x приближается к a (при этом само значение $f(a)$ может и не существовать).

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $M > 0$ такое, что при $|x| > M$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Односторонние пределы. Если x приближается к a только слева ($x < a$), то говорят о *левом пределе* $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$; если только справа ($x > a$) — о *правом пределе* $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$. Предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда оба односторонних предела существуют и равны.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha(x) \neq 0$), то $\frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая, и наоборот.

1.2. Основные теоремы о пределах. Непрерывность

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \cdot A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения. Поэтому **первое действие при вычислении предела** —

подставить предельное значение $x = a$ в функцию. Если получилось число — это и есть ответ.

Пример 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1) = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 1 = 3.$

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3+1}{3-2} = 4.$

При подстановке полезно помнить следующие «правила действий» с нулём и бесконечностью (c — число, $c \neq 0$):

Выражение	$\frac{c}{\infty}$	$\frac{c}{0}$	$\frac{\infty}{c}$	$c \cdot \infty$	$\infty + \infty$	$\infty \cdot \infty$
Результат	0	∞	∞	∞	∞	∞

1.3. Неопределённости

Если после подстановки получается одно из выражений

$$\left[\frac{0}{0} \right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right], \quad [0 \cdot \infty], \quad [\infty - \infty], \quad [1^\infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0],$$

то говорят, что имеет место *неопределённость*: результат заранее не известен и зависит от вида функций. Вычисление предела в этом случае называют **раскрытием неопределённости**. Для этого выражение предварительно преобразуют (сокращают, делят на старшую степень, домножают на сопряжённое и т. д.).

1.4. Неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ при $x \rightarrow \infty$

Правило. Числитель и знаменатель делят на x в старшей степени, встречающейся в дроби. Затем используют то, что $\frac{c}{x^k} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ ($k > 0$).

Для отношения многочленов $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (степени n и m) при $x \rightarrow \infty$ результат такой:

- если $n = m$, предел равен отношению коэффициентов при старших степенях;
- если $n < m$, предел равен 0;
- если $n > m$, предел равен ∞ .

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x - 7}.$

Решение. Имеем неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Делим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{3}{5}.$$

Пример 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^3+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$ (степень числителя меньше степени знаменателя).

Пример 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{2x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$ (степень числителя больше).

1.5. Неопределённость $\left[\frac{0}{0} \right]$ при $x \rightarrow a$

Правило 1 (дробно-рациональные функции). Числитель и знаменатель раскладывают на множители и сокращают на множитель $(x - a)$, который и обращает их в нуль.

Напомним разложение квадратного трёхчлена: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; а также $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

Решение. Подстановка даёт $\left[\frac{0}{0} \right]$. Раскладываем на множители: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Пример 7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$

Правило 2 (выражения с корнями). Числитель и знаменатель домножают на выражение, сопряжённое к содержащему корень, и используют формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Пример 8. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Решение. Неопределённость $\left[\frac{0}{0} \right]$. Домножаем на сопряжённое $\sqrt{x+4} + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Пример 9. Найти $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{x-5} = \sqrt{9}+3=6.$$

1.6. Неопределённость $[\infty - \infty]$

Разность приводят к дроби (общий знаменатель или домножение на сопряжённое), после чего получается неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример 10. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5x}-x)$.

Решение. Домножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+5x}-x)(\sqrt{x^2+5x}+x)}{\sqrt{x^2+5x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}.$$

Делим числитель и знаменатель на x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

1.7. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Важно: под знаком синуса и в знаменателе должно стоять *одно и то же* бесконечно малое выражение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$.

Пример 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{3} \right) = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$

Пример 12. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$

Решение. Используем формулу $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4 = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8.$$

Пример 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3x}{2x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$

1.8. Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

где $e \approx 2,718$ — основание натуральных логарифмов. Этот предел служит для раскрытия неопределённости $[1^\infty]$.

Следствия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Удобная формула. Если $u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$, то

$$\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim(u(x)-1) \cdot v(x)}.$$

Пример 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^6 = e^6.$

Пример 15. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x.$

Решение. Основание стремится к 1, показатель — к ∞ : неопределённость $[1^\infty]$. По удобной формуле:

$$u - 1 = \frac{x+2}{x-1} - 1 = \frac{3}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-1} \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-1} = 3.$$

Ответ: e^3 .

Пример 16. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (-4x) \cdot \frac{1}{x}} = e^{-4}.$

1.9. Эквивалентные бесконечно малые

Определение. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ (при $x \rightarrow a$) называются *эквивалентными*, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если каждую из них (или одну) заменить эквивалентной. Заменять можно только *множители*, но не *слагаемые*.

Таблица эквивалентных бесконечно малых (при $\alpha = \alpha(x) \rightarrow 0$):

$\sin \alpha \sim \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$	$\arcsin \alpha \sim \alpha$	$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$
$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$	$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$	$e^\alpha - 1 \sim \alpha$	$a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$

$(1 + \alpha)^m - 1 \sim m\alpha$	$\sqrt{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}$	$\log_a(1 + \alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}$	
-----------------------------------	---	--	--

Пример 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}.$

Пример 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\arctg 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$

Пример 19. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \operatorname{tg} x}.$

Решение. $1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2, \operatorname{tg} x \sim x:$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x \cdot x} = 2.$$

Часть 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

2.1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Дадим аргументу *приращение* Δx ; функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначения: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Нахождение производной называется *дифференцированием*. Функция, имеющая производную в точке, называется *дифференцируемой* в этой точке; дифференцируемая функция непрерывна.

Пример 20. Найти по определению производную функции $y = x^2$.

Решение. $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Геометрический смысл. Производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона касательной к оси Ox .

Уравнение касательной и нормали к графику $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Физический (механический) смысл. Если $s(t)$ — закон движения точки, то $v(t) = s'(t)$ — мгновенная скорость, $a(t) = v'(t) = s''(t)$ — ускорение. В общем случае производная — это *скорость изменения* величины.

Пример 21. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 2$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $f(3) = 9 - 9 + 2 = 2$; $f'(x) = 2x - 3$, $f'(3) = 3$. Уравнение касательной: $y = 2 + 3(x - 3)$, т. е. $y = 3x - 7$.

2.2. Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции, C — постоянная. Тогда

$$(C)' = 0, \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (C u)' = C u',$$

$$(u v)' = u' v + u v', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}.$$

Производная сложной функции. Если $y = f(u)$, где $u = u(x)$, то

$$y'_x = f'(u) \cdot u'(x),$$

то есть производная «внешней» функции умножается на производную «внутренней».

2.3. Таблица производных

В правом столбце $u = u(x)$ — функция от x (правило для сложной функции).

№	Простой аргумент	Сложный аргумент $u = u(x)$
1	$(C)' = 0$	—
2	$(x^n)' = n x^{n-1}$	$(u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$
3	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
4	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
5	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
6	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
7	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
8	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
9	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

№	Простой аргумент	Сложный аргумент $u = u(x)$
14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
16	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

2.4. Примеры вычисления производных

Пример 22. $y = 4x^3 - 5\sqrt{x} + \frac{2}{x} - 7$.

$$y' = 12x^2 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}.$$

Пример 23 (производная произведения). $y = x^2 \ln x$.

$$y' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

Пример 24 (производная частного). $y = \frac{x^2+1}{x-3}$.

$$y' = \frac{2x(x-3) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2}.$$

Пример 25 (сложная функция). $y = \sin^3 2x$. Здесь «внешняя» функция — куб, затем синус, затем $2x$:

$$y' = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x \cos 2x.$$

Пример 26. $y = e^{x^2-3x}$: $y' = e^{x^2-3x} \cdot (2x-3)$.

Пример 27. $y = \ln(x^2+5)$: $y' = \frac{2x}{x^2+5}$.

Пример 28. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$:

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Логарифмическое дифференцирование применяют к функциям вида $y = u(x)^{v(x)}$: сначала логарифмируют, затем дифференцируют.

Пример 29. $y = x^x$ ($x > 0$). Логарифмируем: $\ln y = x \ln x$. Дифференцируем обе части, помня, что y — функция от x :

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = x^x (\ln x + 1).$$

Неявная функция. Если зависимость задана уравнением $F(x, y) = 0$, его дифференцируют по x , считая $y = y(x)$, и выражают y' .

Пример 30. $x^2 + y^2 = 25$: $2x + 2y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$.

Параметрически заданная функция. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 31. $x = t^2$, $y = t^3$: $y'_x = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$.

2.5. Дифференциал. Производные высших порядков

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная (линейная) часть её приращения:

$$dy = f'(x) dx, \quad dx = \Delta x.$$

Приближённые вычисления. При малых Δx приращение функции приближённо равно дифференциалу: $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Пример 32. Вычислить приближённо $\sqrt{4,02}$.

Решение. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,02$; $f(4) = 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\sqrt{4,02} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 = 2,005.$$

Производные высших порядков. Производная от производной называется второй производной: $y'' = (y')'$. Аналогично $y''' = (y'')'$, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Пример 33. $y = x^3 - 2x^2 + e^{2x}$: $y' = 3x^2 - 4x + 2e^{2x}$, $y'' = 6x - 4 + 4e^{2x}$.

2.6. Правило Лопиталья

Теорема (правило Лопиталья). Если при $x \rightarrow a$ (или $x \rightarrow \infty$) имеет место неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и существует предел отношения производных, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Обратите внимание: дифференцируются числитель и знаменатель **по отдельности** (а не дробь целиком). Правило можно применять повторно. Неопределённости $[0 \cdot \infty]$ и $[\infty - \infty]$ сначала преобразуют к виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

Пример 35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$

Пример 36. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$

Пример 37. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

Пример 38 (неопределённость $[0 \cdot \infty]$). Найти $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.

Решение. Запишем произведение в виде дроби:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0.$$

2.7. Исследование функций с помощью производной

Монотонность. Если $f'(x) > 0$ на интервале, то функция на нём *возрастает*; если $f'(x) < 0$ — *убывает*.

Экстремумы. Точка x_0 называется точкой *максимума* (*минимума*), если в некоторой её окрестности $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$) при $x \neq x_0$.

- *Необходимое условие экстремума:* в точке экстремума $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Такие точки называются *критическими*.
- *Достаточное условие:* если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «-», то это точка максимума; с «-» на «+» — точка минимума. Если знак не меняется — экстремума нет.

Выпуклость и точки перегиба. Если $f''(x) > 0$ на интервале, то график *выпуклый вниз* (вогнутый, «чашка»); если $f''(x) < 0$ — *выпуклый вверх* («шапочка»). Точка, при переходе через которую $f''(x)$ меняет знак, называется *точкой перегиба*.

Асимптоты графика.

- *Вертикальная асимптота $x = a$:* если $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$ (обычно a — точка разрыва, например нуль знаменателя).
- *Наклонная асимптота $y = kx + b$,* где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

При $k = 0$ получаем *горизонтальную* асимптоту $y = b$.

Общая схема исследования функции и построения графика:

1. Область определения; чётность (нечётность); точки пересечения с осями.
2. Точки разрыва и вертикальные асимптоты; наклонные (горизонтальные) асимптоты.
3. Первая производная: критические точки, интервалы монотонности, экстремумы.
4. Вторая производная: интервалы выпуклости, точки перегиба.
5. Построение графика.

Пример 39. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x-1}$ и построить её график.

Решение.

1. Область определения: $x \neq 1$. Функция не является ни чётной, ни нечётной. График проходит через начало координат: $y(0) = 0$.

2. При $x \rightarrow 1 - 0$ имеем $y \rightarrow -\infty$, при $x \rightarrow 1 + 0$ имеем $y \rightarrow +\infty$; значит, $x = 1$ — вертикальная асимптота. Наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Асимптота $y = x + 1$. Удобно заметить, что $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

3. Первая производная:

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Критические точки: $x = 0$, $x = 2$ (точка $x = 1$ не входит в область определения).

4. Вторая производная: $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$. Она не обращается в нуль; $y'' < 0$ при $x < 1$, $y'' > 0$ при $x > 1$. Точек перегиба нет.

Сведём результаты в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	—	не сущ.	—	0	+
y''	—	—	—	не сущ.	+	+	+
y	↗	max, $y = 0$	↘	разрыв	↘	min, $y = 4$	↗
выпуклость	вверх	вверх	вверх	—	вниз	вниз	вниз

Здесь ↗ — функция возрастает, ↘ — убывает; «выпуклость вверх» — график в виде «шапочки», «вниз» — в виде «чашки».

5. График построен на рис. 1.

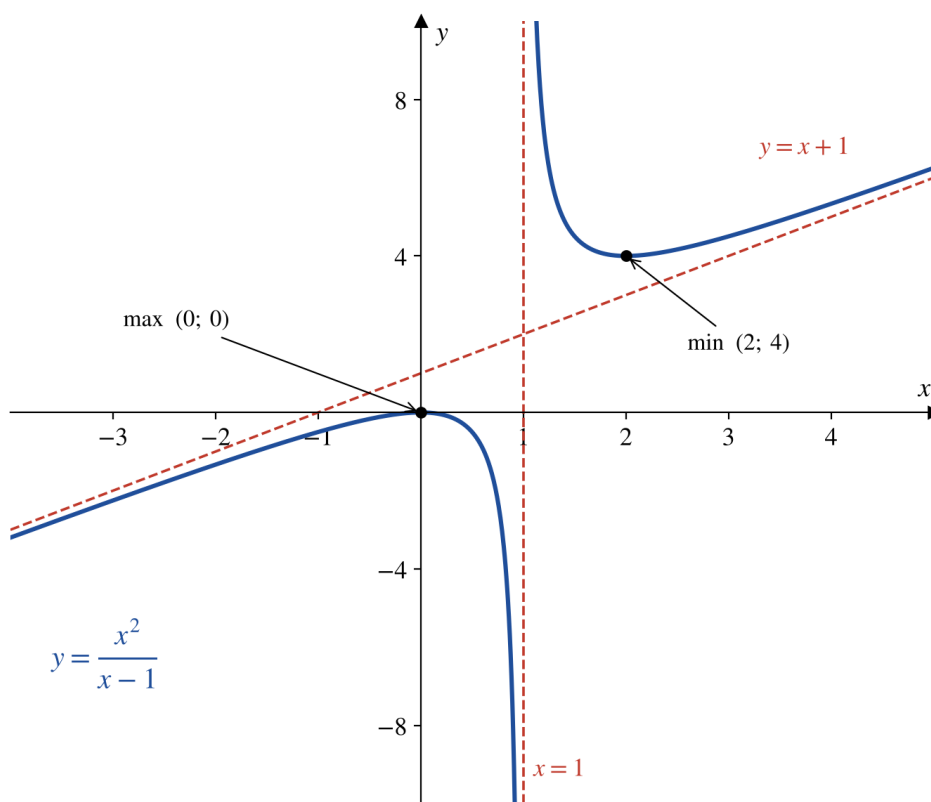


Рис. 1. График функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ и его асимптоты

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a; b]$. Алгоритм: найти критические точки, лежащие внутри отрезка; вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка; из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 40. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, откуда $x = \pm 1$; отрезку принадлежит $x = 1$. Вычисляем: $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$.

Ответ: наибольшее значение 3 (при $x = 2$), наименьшее -1 (при $x = 1$).

Часть 3. Интегральное исчисление функции одной переменной

3.1. Первообразная и неопределённый интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале, если $F'(x) = f(x)$ во всех точках этого интервала.

Если $F(x)$ — первообразная, то и $F(x) + C$ — первообразная при любой постоянной C ; других первообразных нет.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Здесь $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x) dx$ — подынтегральное выражение, C — произвольная постоянная. Интегрирование — действие, обратное дифференцированию.

Проверка. Результат интегрирования всегда можно проверить дифференцированием: $(F(x) + C)'$ должно совпасть с $f(x)$.

Свойства неопределённого интеграла:

$$(\int f(x) dx)' = f(x), \quad \int dF(x) = F(x) + C,$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \quad \int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Полезное правило. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

3.2. Таблица основных интегралов

№	Интеграл	№	Интеграл
1	$\int dx = x + C$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	11	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	12	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	13	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

№	Интеграл	№	Интеграл
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
6	$\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + a^2} \right + C$
8	$\int \cos x dx = \sin x + C$	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Все формулы таблицы остаются верными, если вместо x подставить любую дифференцируемую функцию $u = u(x)$, а вместо dx — её дифференциал du (инвариантность формул интегрирования).

3.3. Непосредственное интегрирование

Подынтегральную функцию с помощью алгебраических преобразований приводят к сумме табличных.

Пример 41.

$$\int \left(3x^2 - \frac{4}{x} + 2\sqrt{x} - 5 \right) dx = x^3 - 4\ln|x| + \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 5x + C.$$

Здесь использовано: $\int 2\sqrt{x} dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C.$

Пример 42. Раскрываем квадрат и делим почленно:

$$\int \frac{(x+1)^2}{x} dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C.$$

Пример 43 (линейная замена).

$$\int \cos(3x+1) dx = \frac{1}{3} \sin(3x+1) + C, \quad \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

3.4. Метод замены переменной (подведение под знак дифференциала)

Формула замены переменной. Если $t = \varphi(x)$, то $dt = \varphi'(x) dx$ и

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

После интегрирования необходимо вернуться к переменной x .

Полезные соотношения для подведения под знак дифференциала:

$dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$	$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$
$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$	$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 d(\sqrt{x})$
$\cos x dx = d(\sin x)$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$e^x dx = d(e^x)$	$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$

Важный частный случай: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$

Пример 44. Найти $\int x e^{x^2} dx.$

Решение. Замена $t = x^2$, $dt = 2x dx$, т. е. $x dx = \frac{1}{2} dt$:

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Пример 45. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$

Пример 46. $\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

Пример 47. В числителе стоит производная знаменателя:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5} dx = \ln(x^2 + 3x + 5) + C$$

(модуль не нужен, так как $x^2 + 3x + 5 > 0$ при всех x).

Пример 48. Найти $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение. Замена $t = 1 - x^2$, $dt = -2x dx$, $x dx = -\frac{1}{2} dt$:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 49. $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$ (формула 13 при $a = 3$).

3.5. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = u v - \int v du.$$

Выбор u и dv ($P(x)$ — многочлен):

Вид интеграла	Что принять за u
$\int P(x) e^{kx} dx, \int P(x) \sin kx dx, \int P(x) \cos kx dx$	$u = P(x)$
$\int P(x) \ln x dx, \int P(x) \arctg x dx, \int P(x) \arcsin x dx$	$u = \ln x, \arctg x, \arcsin x$

Пример 50. Найти $\int x e^x dx$.

Решение. $u = x, dv = e^x dx$; тогда $du = dx, v = e^x$:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Пример 51. Найти $\int x \cos 2x dx$.

Решение. $u = x, dv = \cos 2x dx$; $du = dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x$:

$$\int x \cos 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Пример 52. $\int \ln x dx$: $u = \ln x, dv = dx$; $du = \frac{dx}{x}, v = x$:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

Пример 53. $\int x^2 \ln x dx$: $u = \ln x, dv = x^2 dx$; $du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^3}{3}$:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

3.6. Интегрирование рациональных дробей (основные приёмы)

Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя. Неправильную дробь делением «уголком» приводят к сумме многочлена и правильной дроби. Правильную дробь раскладывают на *простейшие дроби* вида

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (p^2-4q < 0),$$

коэффициенты которых находят методом неопределённых коэффициентов.

Пример 54. Найти $\int \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)} dx$.

Решение. Раскладываем на простейшие дроби:

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow 3x+1 = A(x+3) + B(x-1).$$

При $x = 1$: $4 = 4A$, $A = 1$. При $x = -3$: $-8 = -4B$, $B = 2$. Следовательно,

$$\int \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} dx = \int \frac{dx}{x - 1} + 2 \int \frac{dx}{x + 3} = \ln|x - 1| + 2\ln|x + 3| + C.$$

Пример 55 (выделение полного квадрата).

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{3} + C.$$

Пример 56 (понижение степени). Используем формулу $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

3.7. Определённый интеграл

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. Разобьём отрезок точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на части длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, в каждой части выберем точку ξ_i и составим *интегральную сумму* $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

Определение. *Определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм при стремлении к нулю длины наибольшего из частичных отрезков:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Числа a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Геометрический смысл. Если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ равен площади *криволинейной трапеции*, ограниченной графиком $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

Свойства определённого интеграла:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x)) dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$$

3.8. Формула Ньютона — Лейбница

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $F(x)$ — любая её первообразная, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Таким образом, для вычисления определённого интеграла нужно найти первообразную (методами п. 3.3–3.6) и подставить пределы интегрирования.

Пример 57.

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^2 - 2x + 3) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 = (9 - 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = 9 - \frac{7}{3} \\ &= \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Пример 58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Пример 59. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

Замена переменной в определённом интеграле. При замене $t = \varphi(x)$ нужно пересчитать пределы интегрирования; возвращаться к старой переменной не нужно.

Пример 60. Найти $\int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$.

Решение. $t = 1 + x^2$, $dt = 2x dx$; при $x = 0$ имеем $t = 1$, при $x = 1$ имеем $t = 2$:

$$\int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Интегрирование по частям в определённом интеграле: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

Пример 61. $\int_0^1 x e^x dx = (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1.$

3.9. Геометрические приложения определённого интеграла

Площадь плоской фигуры. Если фигура ограничена сверху графиком $y = f(x)$, снизу графиком $y = g(x)$ (т. е. $f(x) \geq g(x)$), а слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, то

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Пример 62. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.

Решение. Находим точки пересечения: $x^2 = 2x$, откуда $x = 0$, $x = 2$. На отрезке $[0; 2]$ прямая лежит выше параболы (рис. 2). Тогда

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $S = \frac{4}{3}$ кв. ед.

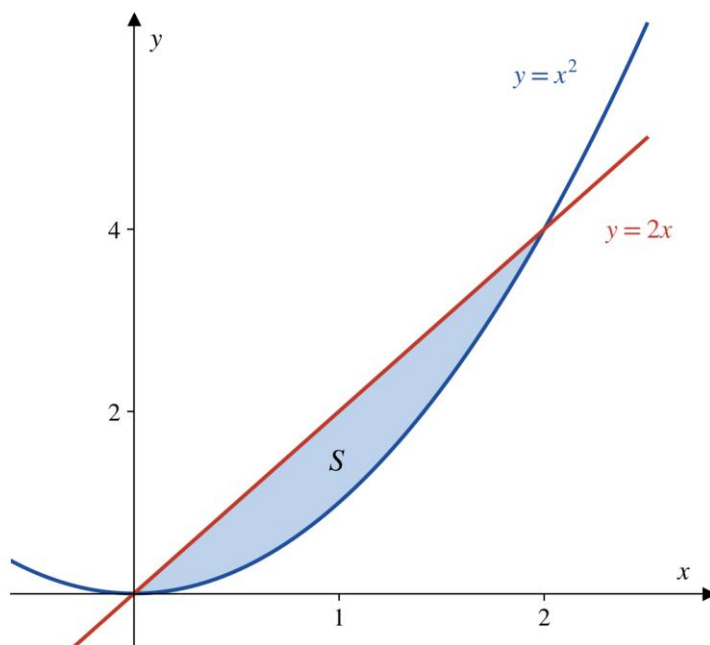


Рис. 2. Фигура, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = 2x$

Пример 63. Площадь под одной аркой синусоиды $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: $S = 2$ кв. ед.

Объём тела вращения. Объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции ($y = f(x)$, $x \in [a; b]$) вокруг оси Ox :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример 64. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$.

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi.$$

Ответ: $V = 8\pi$ куб. ед.

Несобственный интеграл (кратко). Интеграл с бесконечным пределом определяется как предел:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если предел конечен, интеграл называется *сходящимся*, иначе — *расходящимся*.

Пример 65. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Интеграл сходится.

Итоговая памятка

Пределы. Сначала подставляем предельное значение. Если получилась неопределённость:

- $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ при $x \rightarrow \infty$ — делим на старшую степень x ;
- $\left[\frac{0}{0} \right]$ — раскладываем на множители, домножаем на сопряжённое, используем первый замечательный предел, эквивалентные бесконечно малые или правило Лопиталя;
- $[\infty - \infty]$ — приводим к общему знаменателю или домножаем на сопряжённое;
- $[1^\infty]$ — второй замечательный предел: $\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$.

Производные. Правила дифференцирования (сумма, произведение, частное) + таблица производных + правило для сложной функции.

Интегралы. Таблица интегралов + три основных метода: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям. Определённый интеграл вычисляется по формуле Ньютона — Лейбница.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение предела функции в точке. Что такое односторонние пределы?
2. Какие виды неопределённостей вы знаете? Как раскрывается неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ для отношения многочленов?
3. Запишите первый и второй замечательные пределы и их следствия.

4. Какие бесконечно малые называются эквивалентными? Приведите пять пар эквивалентных бесконечно малых.
5. Дайте определение производной. В чём её геометрический и физический смысл?
6. Запишите уравнение касательной к графику функции.
7. Сформулируйте правила дифференцирования произведения, частного и сложной функции.
8. Сформулируйте правило Лопиталя. К каким неопределённостям оно применяется?
9. Как с помощью производных найти интервалы монотонности, экстремумы, интервалы выпуклости и точки перегиба?
10. Что называется первообразной и неопределённым интегралом? Перечислите свойства неопределённого интеграла.
11. Запишите формулу интегрирования по частям. Как выбирать u и dv ?
12. Запишите формулу Ньютона — Лейбница. Как вычислить площадь плоской фигуры?

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. — М.: Айрис-пресс.
2. Шипачев В. С. Высшая математика: учебник. — М.: Юрайт.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. — М.: Мир и Образование.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. — М.: Интеграл-Пресс.