Теория чисел

$\mathbb{N}$ – *множество натуральных чисел*;

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$\mathbb{Z}$ – *множество целых чисел*;

$\mathbb{Q}$ – *множество рациональных чисел*;

$\mathbb{R}$ – *множество действительных чисел*;

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ – *множество иррациональных чисел*;

$\mathbb{C}$ – *множество комплексных чисел*;

Последовательности. Арифметическая прогрессия.

a_1 – первый член прогрессии, d – разность прогрессии, S_n – сумма первых n членов прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$

Геометрическая прогрессия. Бесконечные последовательности.

b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии, S_n – сумма первых n членов прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{(q-1)}$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$$0 < q < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q},\ (*)\ |q| < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Разложение на простые множители.

Разложение натурального числа на простые множители: $x = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$.

Количество натуральных делителей натурального числа: $Q = (1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_k)$.

Сумма всех натуральных делителей натурального числа:
$S = \left(1 + p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^{n_1}\right) \cdot \left(1 + p_2^1 + p_2^2 + \dots + p_2^{n_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + p_k^1 + p_k^2 + \dots + p_k^{n_k}\right).$

Критерии проверки задачи 19

Содержание критерия	Баллы
Верно, получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно, получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно, получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно, получен один из следующих результатов: - обоснованное решение пункта *а*; - обоснованное решение пункта б; - искомая оценка в пункте в; - пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	
Максимальный балл	

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* или обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	
Максимальный балл	

Задачи

1. Решите уравнение в натуральных числах $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\dfrac{10}{7}$.

2. Ваня задумал простое трехзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может заканчиваться, если последняя цифра (разряд единиц) равна сумме первых двух?

3. Укажите все натуральные числа, у которых 6 натуральных делителей, сумма которых 504.

4.Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке не убывания. Если какое-то число, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске остается одно такое число, а остальные, равные ему стираются. Например, если задуманы «1,3,3,4», то на доске будет набор «1,3,4,5,6,7,8,10,11»

а) Приведите пример, задуманных чисел, для которых будет записан набор «1,2,3,4,5,6,7,8»

б) Существует ли пример задуманных чисел, для которых на доске будет набор «1,3,4,5,7,9,10,11,12,13,14,16,18,19,20,22»?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых выписан набор «5,6,8,10,11,13,14,15,16,18,19,21,23,24,29»

5. В живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного) кроликов, но не всех. Первый ученик дает порцию по 100 гр, второй – по 200 гр, третий – по 300 гр., а четвертый – по 400 гр.
а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?

б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили различное количество корма?

в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик насыпал корм ровно четырем кроликам и все кролики получили разное количество корма?

6. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел «-3», среднее арифметическое положительных «4», а отрицательных «-8».

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

7. В течении четверти учитель ставил детям оценки «1,2,3,4,5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять 4-ки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

8. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40, но меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

9. Бесконечная арифметическая прогрессия a_1, a_2… состоит из натуральных чисел. Пусть $S_1=a_1$; $S_2=a_1+a_2$; … $S_n=a_1+a_2+…+a_n$; натуральное n, $n>1$;

а) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10}=100S_1$;

б) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10}=50S_2$;

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 \cdot S_{10}}$?

10. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел

«-11,12,13,-14,-15,17, -18,19». Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному из чисел «-11,12,13,-14,-15,17, -18,19». После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое не отрицательное число может в результате получиться?

12. У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых возможно и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа

детей, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли в классе быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительных условий пунктов а) и б)?

13. В некотором царстве было несколько (более 2) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было изначально. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь образованных объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после какого-то деления общее число княжеств было 162?

в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

14. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3. а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни. быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?
15. В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.

а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?

б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?

в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

16. На доске написаны числа, каждое из которых не меньше 50, но не более 150. Каждое из чисел $\boldsymbol{a_i}$ уменьшили на $\boldsymbol{r_i}$%. При этом для каждого $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{1 \le i \le n}$), либо $\boldsymbol{r_i}$=2, либо $\boldsymbol{a_i}$ уменьшилось на 2.

а) Может ли среднее арифметическое чисел $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, …, $\boldsymbol{r_n}$ быть равным 5?

б) Может ли оказаться среднее арифметическое чисел $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, …, $\boldsymbol{r_n}$ больше 2?

в) Пусть на доске написано 30 чисел, сумма которых уменьшилась на 40. Найдите наибольшее значение среднего арифметического $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, …, $\boldsymbol{r_n}$.

17. Каждое из четырех последовательных натуральных чисел поделили на его первую цифру. Сумма получившихся чисел ровна S.

а) Может ли S быть равной $41\frac{11}{24}$?б) Может ли S быть равной $569\frac{29}{72}$?

в) Найдите наибольшее целое S, если каждое из исходных чисел было от 400 до 999 включительно.

18. Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Верно ли, что $b_{99} \in \mathrm{N}$? [нет]

19. Решите уравнение $3^x + 4^y = 5^z, x, y, z \in \mathrm{N}$. [$x$=$y$=$z$=2]

20. Числа от 1 до 37 записаны в строку, так, что сумма всех предшествующих чисел делится на следующее за ними число. Какое число может стоять на третьем месте, если на первом месте 37, а на втором -1? [2]

21. Корни x_1, x_2 многочлена $f(x) = x^2 + (3a+10)x + 5b - 14$ и его значение при x=1 являются простыми числами. Чему равны a и b?

22. Корень x_1 многочлена $f(x) = x^2 + px + q$ и его значение при x=11 являются простыми числами. Чему равны x_1, x_2, p, q?

23. Найдите все такие натуральные n, что при вычепкивании первой цмфры числа 4^n снова получается число, являющееся натуральной степенью числа 4. [3]

24. Из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 составлены 9 (необязательно различных) девятизначных натуральных чисел (каждая цифра использована ровно по 1 разу в каждом числе). На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться их сумма? [8]

25. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из отрезка натурального ряда от 1 до 2024, так чтобы разность любых двух из них не была простым числом? [405]

26. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a<b$, ни одно из

написанных чисел не делится на $(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18. 19 и 20?

б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равным 25?

в) Найдите наибольшее значение N.

27. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 159. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a<b$, ни одно из написанных чисел не делится на $(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 28. 29 и 30?

б) Среди написанных на доске чисел есть 13. Может ли N быть равным 20?

в) Найдите наибольшее значение N.

28. Есть четыре коробки: в первой коробке 81 камень, во второй — 82. в третьей— 83. а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Мог ли в первой коробке оказаться 81 камень, во второй — 78. в третьей — 83. а в четвёртой — 4?

б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 246 камней?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

29. Дано натуральное число. За один ход можно прибавить к этому числу утроенную сумму его цифр или вычесть из этого числа утроенную сумму его цифр так. чтобы в результате получилось натуральное число.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 29?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 31?

в) Какое наименьшее число можно получить из числа 128 за несколько таких ходов?

30. Из набора цифр 0. 1. 5. 6. 7. 8 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое — трёхзначное и оба кратны 45.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 6975?

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 8025?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

31. В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?
в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

32. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 1782. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5.5 раза меньше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

26. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a<b$, ни одно из написанных чисел не делится на $(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18. 19 и 20?

б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равным 25?

в) Найдите наибольшее значение N.

Решение.

а) Если на доске написаны два числа, идущие подряд, то любое число делится на их разность, равную 1. Если на доске написаны числа 18 и 20, то каждое из этих чисел делится на их разность, равную 2. Значит, никакие два из чисел 18, 19 и 20 не могли быть написаны на доске одновременно.

б) Если на доске написано 25 чисел, то хотя бы два из них дают одинаковый остаток при делении на 17. Значит, разность этих чисел делится на 17. Следовательно, N не может быть равным 25.

в) Предположим, что $N \geq 34$. Если на доске есть число $a \leq 33$, то хотя бы два из написанных на доске чисел дают одинаковый остаток при делении на a, но тогда их разность делится на a. Значит, каждое из чисел, написанных на доске, больше 33. Среди любых $N \geq 34$ различных чисел от 34 до 99 найдётся два, идущих подряд. Разность этих чисел равна 1, и на неё делится любое число, написанное на доске. Получаем противоречие. Следовательно, $N \leq 33$.

Покажем, что N может быть равным 33. Пусть на доске написаны нечётные числа от 35 до 99:

$$35, 37, 39, \ldots, 95, 97, 99.$$

Разность любых двух из этих чисел чётная, а значит, ни одно из написанных на доске чисел не делится на неё. С другой стороны, каждая из таких разностей не превосходит 64. Следовательно, любой нечётный делитель такой разности не превосходит 31. Таким образом, построенный пример удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 33.

27. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 159. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a<b$, ни одно из написанных чисел не делится на $(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 28. 29 и 30?

б) Среди написанных на доске чисел есть 13. Может ли N быть равным 20?

в) Найдите наибольшее значение N.

Решение.

а) Если на доске написаны два числа, идущие подряд, то любое число делится на их разность, равную 1. Если на доске написаны числа 28 и 30, то каждое из этих чисел делится на их разность, равную 2. Значит, никакие два из чисел 28, 29 и 30 не могли быть написаны на доске одновременно.

б) Если на доске написано 20 чисел, то хотя бы два из них дают одинаковый остаток при делении на 13. Значит, разность этих чисел делится на 13. Следовательно, N не может быть равным 20.

в) Предположим, что $N \geq 54$. Если на доске есть число $a \leq 53$, то хотя бы два из написанных на доске чисел дают одинаковый остаток при делении на a, но тогда их разность делится на a. Значит, каждое из чисел, написанных на доске, больше 53. Среди любых $N \geq 54$ различных чисел от 54 до 159 найдётся два, идущих подряд. Разность этих чисел равна 1, и на неё делится любое число, написанное на доске. Получаем противоречие. Следовательно, $N \leq 53$.

Покажем, что N может быть равным 53. Пусть на доске написаны нечётные числа от 55 до 159:

$$55, 57, 59, \ldots, 155, 157, 159.$$

Разность любых двух из этих чисел чётная, а значит, ни одно из написанных на доске чисел не делится на неё. С другой стороны, каждая из таких разностей не превосходит 104. Следовательно, любой нечётный делитель такой разности не превосходит 51. Таким образом, построенный пример удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 53.

28. Есть четыре коробки: в первой коробке 81 камень, во второй — 82. в третьей— 83. а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Мог ли в первой коробке оказаться 81 камень, во второй — 78. в третьей — 83. а в четвёртой — 4?

б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 246 камней?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

Решение.

а) Пусть 2 раза из первых трёх коробок переложили камни в четвёртую. Тогда в первой коробке оказалось 79 камней, во второй — 80 камней, в третьей — 81 камень, а в четвёртой — 6 камней. Если после этого переложить камни из второй, третьей и четвёртой коробок в первую, то в первой коробке окажется 82 камня, во второй — 79, в третьей — 80, а в четвёртой — 5. Если после этого переложить камни из первой, второй и четвёртой коробок в третью, то в первой коробке окажется 81 камень, во второй — 78, в третьей — 83, а в четвёртой — 4.

б) Если в четвёртой коробке оказалось 246 камней, то в первой, во второй и в третьей коробках не осталось камней.

Пусть в какой-то момент в коробках оказалось a, b, c и d камней соответственно. Тогда после одного хода в коробках могло оказаться либо $a-1$, $b-1$, $c-1$ и $d+3$ камня, либо $a-1$, $b-1$, $c+3$ и $d-1$ камень, либо $a-1$, $b+3$, $c-1$ и $d-1$ камень, либо $a+3$, $b-1$, $c-1$ и $d-1$ камень соответственно. Заметим, что разность между числами камней во второй и в первой коробках либо не изменилась, либо изменилась на 4. Сначала разность чисел камней во второй и в первой коробках равнялась 1. Следовательно, ни в какой момент она не могла стать равной 0. Значит, в этих двух коробках всегда разное число камней. Следовательно, в четвёртой коробке не могло оказаться 246 камней.

в) Сначала разность чисел камней в любых двух коробках не делится на 4. Следовательно, ни в какой момент в двух коробках не могло оказаться одинаковое число камней. Значит, во второй, в третьей и в четвёртой коробках не меньше $0+1+2=3$ камней суммарно, а в первой коробке не больше 243 камней.

Покажем, что в первой коробке могло оказаться 243 камня. Пусть 21 раз из первых трёх коробок переложили камни в четвёртую. Тогда в первой коробке оказалось 60 камней, во второй — 61, в третьей — 62, а в четвёртой — 63. Если после этого 61 раз переложить камни из второй, третьей и четвёртой коробок в первую, то в первой коробке окажется 243 камня, во второй — 0 камней, в третьей — 1 камень, а в четвёртой — 2 камня.

Ответ: а) да; б) нет; в) 243.

29. Дано натуральное число. За один ход можно прибавить к этому числу утроенную сумму его цифр или вычесть из этого числа утроенную сумму его цифр так. чтобы в результате получилось натуральное число.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 29?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 31?

в) Какое наименьшее число можно получить из числа 128 за несколько таких ходов?

Решение.
а) Приведём пример последовательности ходов, при помощи которых из числа 128 можно получить число 29:

128; 95; 53; 29.

б) Заметим, что остаток от деления числа на 3 не меняется при ходе, поскольку утроенная сумма цифр любого числа делится на 3. Остаток от деления числа 128 на 3 равен 2, а остаток от деления числа 31 на 3 равен 1. Значит, из числа 128 невозможно получить число 31 за несколько ходов.
в) Остаток от деления на 3 любого числа, которое можно получить из числа 128 за несколько ходов, равен 2. Таким образом, из числа 128 невозможно получить число, меньшее 2.
Приведём пример последовательности ходов, при помощи которых из числа 128 можно получить число 2:

128; 95; 53; 29; 62; 38; 5; 20; 26; 2.

Ответ: а) да; б) нет; в) 2.

30. Из набора цифр 0. 1. 5. 6. 7. 8 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое — трёхзначное и оба кратны 45.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 6975? (да)

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 8025? (нет)

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре? (10575)

Решение.
а) Для пары чисел 6795 и 180 сумма равна 6975.
б) Каждое из чисел кратно 45, следовательно, сумма такой пары кратна 45. Число 8025 не является кратным 45.
в) Число кратно 45 тогда и только тогда, когда оно кратно 9 и 5. Поскольку оба числа кратны 5, получаем, что одно из них оканчивается на 0, а другое на 5.
Если трёхзначное число оканчивается на 0, то сумма его двух оставшихся цифр должна делиться на 9, так как само число делится на 9. Среди цифр 1, 6, 7, 8, 9 только пара $(1; 8)$ удовлетворяет этому условию.

Если трёхзначное число оканчивается на 5, то сумма его двух оставшихся цифр должна давать остаток 4 при делении на 9. Среди цифр 1, 6, 7, 8, 9 только пара $(6; 7)$ удовлетворяет этому условию.

Если трёхзначное число делится на 9, то и четырёхзначное число также делится на 9, поскольку сумма всех цифр 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9 делится на 9. Более того, делимость числа на 9 не зависит от расположения его цифр.
Если число состоит из фиксированного набора цифр, то оно будет наибольшим, когда цифры идут в порядке убывания. Таким образом, для каждого из построенных разбиений цифр между трёхзначным и четырёхзначным числами рассмотрим наибольшую сумму:

$$810+9765=10\,575,\ 765+9810=10\,575.$$

Значит, наибольшая возможная сумма — это 10 575.
Ответ: а) да; б) нет; в) 10 575.

31. В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?
в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Решение.
а) Если в порту всего два контейнера массой 20 тонн и шесть контейнеров массой 60 тонн, причём один контейнер массой 20 тонн и пять контейнеров массой 60 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров. Масса контейнеров с сахарным песком равна 320 тонн, а масса всех контейнеров равна 400 тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет 80 % от общей массы всех контейнеров.
б) Предположим, что в порту было m контейнеров массой 20 тонн и n контейнеров массой 60 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 20 тонн и b контейнеров массой 60 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 40 % от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a+b=0,75(m+n), \\ 20a+60b=0,4(20m+60n); \end{cases} \begin{cases} 4a+4b=3m+3n, \\ 20a+60b=8m+24n; \end{cases} \begin{cases} 4a+4b=3m+3n, \\ -12a+28b=-16m. \end{cases}$$

Из равенства $-12a+28b=-16m$ получаем $m+3(m-a)+7b=0$.

Поскольку $b \ge 0$ и $m \ge a \ge 0$, это равенство может выполняться только при $m=b=a=0$. Из системы уравнений следует, что $n=0$. Получили: $m=b=a=n=0$, что невозможно. Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 40 % от общей массы контейнеров.
в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наибольшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 60 тонн, а масса каждого контейнера без сахарного песка равна 20 тонн. Если обозначить количество контейнеров с сахарным песком через $3c$, то их масса равна $180c$ тонн, количество контейнеров без сахарного песка равно c, а их масса равна $20c$ тонн. Таким образом, общая масса всех контейнеров равна $200c$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет 90 % от этой массы.
Ответ: а) да; б) нет; в) 90.

32. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 1782. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5.5 раза меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 19 раз было записано число 92 и один раз число 34. Тогда сумма этих чисел равна 1782. После перестановки цифр на доске 19 раз оказалось записано число 29 и один раз число 43. Сумма этих чисел равна $594 = \frac{1782}{3}$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, ..., $\overline{a_nb_n}$. Обозначим: $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. Поскольку $a_1 \le 9b_1$, ..., $a_n \le 9b_n$, получаем $A \le 9B$. Если $10A + B = 5{,}5(10B + A)$, то $54B = 4{,}5A \le 40{,}5B$. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, ..., $\overline{a_nb_n}$. Обозначим: $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 1782$, и нужно найти наименьшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10(1782 - 10A) + A = 17\,820 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наибольшее возможное значение числа A. Поскольку $a_1 \le 9b_1$, ..., $a_n \le 9b_n$, получаем $A \le 9B$. Поэтому

$$1782 = 10A + B \ge 10A + \frac{A}{9} = \frac{91A}{9},$$

откуда $A \le \frac{9 \cdot 1782}{91} < 177$, то есть $A \le 176$. Значит,

$$S = 17\,820 - 99A \ge 17\,820 - 99 \cdot 176 = 396.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 396. Пусть первоначально на доске 19 раз было записано число 91 и один раз число 53. Тогда сумма этих чисел равна 1782. После перестановки цифр на доске 19 раз оказалось записано число 19 и один раз число 35. Сумма этих чисел равна 396.

Ответ: а) например, 19 раз число 92 и число 34; б) нет; в) 396.