МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Единый Государственный Экзамен

Готовимся к итоговой аттестации

#ЕГЭучебник2023

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Ященко,
И. Р. Высоцкий, Л. А. Титова

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ГОТОВИМСЯ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Электронное издание

Москва
Издательство «Интеллект-Центр»
2023

УДК 373.167.1:51(075.3)
ББК 22.1я721
С30

Под общей редакцией научного руководителя Центра педагогического мастерства *И. В. Ященко*

Рецензенты:
Т. Н. Казарихина — кандидат педагогических наук,
заместитель директора по НМР АНО СОШ «Димитриевская», доцент МПГУ;
Е. С. Лебедева — старший преподаватель кафедры общеобразовательных дисциплин
Российского государственного университета правосудия

В сборнике использованы задачи, предложенные
И. Р. Высоцким, Д. Д. Гущиным, П. И. Захаровым, М. А. Посицельской, С. Е. Посицельским, А. В. Семеновым, В. А. Смирновым, А. С. Трепалиным, С. А. Шестаковым, Д. Э. Шнолем, И. В. Ященко

Семёнов, А. В.

С30 Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации / А. В. Семёнов, А. С. Трепалин, И. Р. Высоцкий, Л. А. Титова и др. ; под ред. И. В. Ященко ; Московский Центр непрерывного математического образования. — Эл. изд. — 1 файл pdf : 223 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2023. — (Единый государственный экзамен). — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-907528-65-9

Данное пособие предназначено для подготовки к Единому государственному экзамену по математике профильного уровня. Издание включает типовые задания по всем содержательным линиям экзаменационной работы, а также 30 тренировочных вариантов в формате ЕГЭ 2023 года.

Пособие поможет школьникам проверить свои знания и умения по предмету, а учителям — оценить степень достижения требований образовательных стандартов отдельными учащимися и обеспечить их целенаправленную подготовку к экзамену.

УДК 373.167.1:51(075.3)
ББК 22.1я721

Электронное издание на основе печатного издания: Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации / А. В. Семёнов, А. С. Трепалин, И. Р. Высоцкий, Л. А. Титова и др. ; под ред. И. В. Ященко ; Московский Центр непрерывного математического образования. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2023. — 224 с. — (Единый государственный экзамен). — ISBN 978-5-907528-37-6. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-907528-65-9

ВВЕДЕНИЕ

Государственная итоговая аттестация по математике в форме Единого государственного экзамена с 2015 года проводится на базовом и профильном уровнях. Содержание заданий контрольных измерительных материалов Единого государственного экзамена профильного уровня в 2023 году не будет отличаться от содержания вариантов 2022 года. С окончательной структурой варианта можно ознакомиться на сайте Федерального института педагогических измерений (https://fipi.ru) в разделе «ЕГЭ: демоверсии, спецификации, кодификаторы». В рамках спецификации продолжается расширение тематики задач, особенно это касается геометрической части экзамена, а также заданий по началам математического анализа. Указанные изменения нашли своё отражение в книге, которую вы держите в руках.

В контрольных измерительных материалах Единого государственного экзамена на профильном уровне задания с кратким ответом проверяют уровень освоения ФГОС на базовом и повышенном уровнях. В первой части задания с кратким ответом даются на базовом и повышенном уровнях сложности. Основной акцент в большей части таких заданий сделан на проверку освоения математических компетенций (в первую очередь, на применение математических знаний к решению практических задач). Ответом ко всем заданиям с кратким ответом должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Эти ответы нужно записывать в Бланке ответов № 1 в соответствии с прилагаемой инструкцией заполнения бланка. Особенностью проверки правильности выполнения таких задач является проверка только ответов (решения не проверяются). Все задания с кратким ответом берутся из открытого банка заданий ЕГЭ Федерального института педагогических измерений. Большой банк математических задач, из которого формируется банк ФИПИ, содержится на сайте www.mathege.ru.

Вторая часть варианта экзамена по математике содержит задания повышенного и высокого уровней сложности и предназначается, прежде всего, для дифференциации по уровню подготовки будущих абитуриентов. Задания с развёрнутым ответом проверяют уровень освоения ФГОС на повышенном уровне. Все решения заданий с развёрнутым ответом должны быть записаны в Бланке ответов № 2 (дополнительном бланке ответов № 2). Обоснованность и полноту решения этих заданий устанавливают эксперты, и выставляют баллы в соответствии с Критериями оценивания заданий с развёрнутым ответом (демонстрационный вариант ЕГЭ по математике на сайте ФИПИ).

В контрольных измерительных материалах Единого государственного экзамена на базовом уровне задания проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В экзаменационную работу включены задания базового уровня по всем основным предметным разделам: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

Учебное пособие «Математика. Профильный уровень. ЕГЭ. Готовимся к итоговой аттестации» создано на основе Открытого банка заданий по математике профильного уровня и Открытого банка заданий по математике базового уровня. Использование пособия «Математика. Профильный уровень. ЕГЭ. Готовимся к итоговой аттестации» позволяет выпускникам и учителям заранее выбрать уровень итоговой аттестации, осуществлять диагностику проблемных зон, эффективно выстраивать стратегию и тактику итогового повторения и подготовку к экзамену.

Опыт проведения экзамена с использованием открытого банка заданий по математике в 2010—2022 годах показывает, что наименее эффективны, к сожалению, наиболее популярные стратегии подготовки — прорешивать, начиная с сентября месяца, подряд все задания открытого банка (в котором более 50 000 математических заданий), или прорешивать имеющиеся в большом количестве варианты, аналогичные демонстрационному варианту ЕГЭ (либо из опубликованных пособий, либо составленные с использованием открытого банка).

Залог успеха на экзамене — регулярные занятия математикой в течение всего периода обучения в школе, своевременное выявление и ликвидация возникающих (неизбежно!) проблем. Поэтому настоящая книга позволит учителю включать задания, аналогичные заданиям ЕГЭ, в текущий учебный процесс, начиная с 6 класса.

Учителя и учащиеся при организации итогового повторения и подготовки к экзамену с помощью этой книги имеют возможность повторить задания основных тем курсов алгебры, алгебры и начал математического анализ, геометрии, теории вероятностей и статистики.

Авторы пособия много лет анализируют выполнение заданий экзамена и «вынуждены» рекомендовать определённые подготовительные задания, те задания, которые в явном виде и не даются на экзамене, но без правильного выполнения таких простых заданий нельзя получить правильный ответ в более сложных экзаменационных заданиях.

Раздел «Алгебра» включает в себя задания на рациональные, иррациональные, степенные, тригонометрические и логарифмические уравнения и выражения, новые задания на функции и графики, обновлённые задания на вероятность.

В пункте «Рациональные уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, есть и подготовительные задания: линейные уравнения, простейшие дробно-рациональные уравнения, квадратные — это те уравнения, в которых участники экзамена допускают много ошибок. В этом пункте присутствуют задания на вычисление по формулам, традиционные текстовые задачи на совместную работу, движение, проценты, концентрацию растворов и сплавов.

В пункте «Иррациональные уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, но объединяет эти задания наличие радикала (корня). В начале пункта даются задания на преобразование числовых выражений, содержащих корень, в таких вычислениях делается много ошибок участниками экзамена. Авторы рекомендуют при выполнении этих заданий не прибегать к помощи калькулятора, поскольку на экзамене использование калькулятора не предусмотрено. Очень много досадных ошибок допускается в простейших иррациональных уравнениях, поэтому таких уравнений в пособии даётся много. Задания на вычисления по формулам, содержащих радикал, также включены в этот пункт.

В пункте «Степенные уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта. В начале пункта даётся большое количество заданий на преобразование числовых выражений, содержащих степень. Простейшие показательные уравнения есть в вариантах экзамена, поэтому таких уравнений в пособии даётся много. Задания на вычисления по формулам, содержащих степень, также включены в этот пункт.

В пункте «Тригонометрические уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, но объединяет эти задания наличие тригонометрических функций. В начале пункта даются задания на нахождение по одной тригонометрической функции других тригонометрических функций, в пособии даётся очень большое количество заданий на преобразование тригонометрических выражений с использованием основного тригонометрического тождества, формул приведения, тригонометрических формул двойного угла, знание табличных значений тригонометрических функций. В этот пункт включены также простейшие тригонометрические уравнения, без правильного решения которых нельзя получить правильный ответ в заданиях повышенного уровня. Задания на вычисления по формулам, содержащих тригонометрические функции, также включены в этот пункт.

В пункте «Логарифмические уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, но объединяет эти задания наличие логарифма. В начале пункта даются задания на нахождение значений выражений, содержащих логарифм. Задания подобраны так, чтобы учащийся с помощью этого банка заданий имел возможность повторить все свойства логарифмов. В этот пункт включены также простейшие логарифмические уравнения, без правильного решения которых нельзя получить правильный ответ в заданиях повышенного и высокого уровней. Задания на вычисления по формулам, содержащих логарифм, также включены в этот пункт.

В пункте «Функции и графики» включены задания на нахождение параметров линейной, квадратичной, дробно-рациональной, иррациональной, логарифмической функции по её графику.

В пункте «Вероятность» собрано большое количество заданий, в которых нужно вычислить вероятность наступления или не наступления события. Наряду с простыми заданиями в этот пункт включены и сложные задания.

Раздел «Геометрия» включает в себя задания стереометрии и задания планиметрии, разбитые по темам: длины, углы, тригонометрия, площади.

В пункте «Длины» собрано большое количество заданий, в которых нужно вычислить длину отрезка. Это может быть и треугольник, и четырёхугольник. В этот пункт включено много подготовительных задач — простых планиметрических задач на какой-то один геометрический факт. Для решения таких заданий авторы рекомендуют обязательно сделать рисунок. Иногда такие задания можно решать практически устно, применяя известные соотношения, иногда для решения задачи нужно составить уравнение или систему уравнений. Наряду с простыми заданиями в этот пункт включены и сложные задания.

В пункте «Углы» собрано большое количество заданий, в которых нужно вычислить величину угла. Это может быть и угол в треугольнике или в четырёхугольнике, и вписанный или центральный угол. В этот пункт также включено много подготовительных задач — простых планиметрических задач на какой-то один геометрический факт. Для решения таких заданий авторы рекомендуют обязательно сделать рисунок. Иногда такие задания можно решать практически устно, применяя известные соотношения, иногда для решения задачи нужно составить уравнение. Наряду с простыми заданиями в этот пункт включены и сложные задания.

Практически все задания пункта «Тригонометрия» носят подготовительный характер, потому что авторы специально большое количество заданий на тригонометрические соотношения дали для прямоугольного треугольника в качестве важного повторения.

В пункте «Площади» собраны задания, в которых нужно вычислить площадь фигуры. Это может быть и площадь треугольника, и площадь четырёхугольника (параллелограмма, трапеции), и площадь круга.

В пункте «Стереометрия» собрано большое количество заданий, в которых нужно решить стереометрическую задачу. Это может быть и расстояние между вершинами многогранника, и длина ребра прямоугольного параллелепипеда, и высота правильной пирамиды, и площадь полной поверхности многогранника, и объём части конуса и т.д. В основном в этот пункт включены задания базового уровня сложности.

Раздел «Начала математического анализа» включает задания на геометрический и физический смысл производной, технику дифференцирования и исследование функций, нахождение первообразной и применение первообразной для нахождения площади фигуры.

В пункте «Геометрический и физический смысл производной» собрано большое количество заданий. В пункте есть классические задания на уравнение касательной, а есть и задания, когда по графикам функции и касательной нужно вычислить значение производной в точке. В этот пункт также включено большое количество заданий на рисунках: по графику производной указать какие-то свойства функции или по графику функции ответить на вопросы про производную этой функции.

Практически все задания пункта «Техника дифференцирования» носят подготовительный характер, потому что авторы специально дали большое количество заданий на нахождение производной различных функций. Для выполнения этих заданий потребуется знание табличных производных и правил дифференцирования.

В пункте «Исследование функций» собрано большое количество заданий. В этот пункт включено большое количество заданий на рисунках: по графику производной указать какие-то свойства функции (точка экстремума, скорость изменения) или по графику функции ответить на вопросы про производную этой функции. В этом пункте есть большое количество классических задач на нахождение точек экстремума (локального), наибольшего или наименьшего значения функции на заданном отрезке.

В пункте «Первообразная» даны задания, в которых есть понятие «первообразная». В этот пункт включены задания на рисунках: по графику одной из первообразных указать какие-то свойства функции или по графику функции вычислить площадь фигуры или приращение первообразной. В этом пункте также даны классические задачи на первообразную базового уровня сложности.

Раздел «Задачи повышенной сложности» даёт представления (не претендуя на полноту) о заданиях повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом: тригонометрические уравнения, неравенства и их системы, уравнения и неравенства с параметром, планиметрические и стереометрические задачи и задачи высокого уровня сложности по арифметике и алгебре.

В пункте «Уравнения» даётся набор уравнений повышенного уровня сложности, сводящихся к решению тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений. Для того, чтобы прийти к простейшему тригонометрическому уравнению, нужно решить сначала или квадратное уравнение, или иррациональное уравнение, или показательное уравнение, или логарифмическое. Задания этого пункта даны на языке экзамена: решить уравнение и найти корни этого уравнения, принадлежащие данному отрезку.

В пункте «Неравенства и системы неравенств» даётся небольшой набор неравенств повышенного уровня сложности. Здесь есть и рациональные неравенства, и показательные, и логарифмические.

В пункте «Уравнения и неравенства с параметром» даётся небольшой набор заданий с параметром высокого уровня сложности.

В пункте «Планиметрия» даётся небольшой набор геометрических заданий повышенного уровня сложности. Задания этого пункта даны на языке экзамена: доказать геометрический факт и что-то вычислить.

В пункте «Стереометрия» даётся небольшой набор геометрических заданий повышенного уровня сложности на нахождение расстояний от точки до прямой или плоскости, на нахождение угла между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.

Основное назначение пункта «Арифметика и алгебра» — дать представление о задачах высокого уровня сложности.

В пункте «Экономические задачи» даётся небольшой набор задач с экономическим содержанием.

Учебное пособие «Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации» содержит 30 тренировочных вариантов, аналогичных заданиям государственной итоговой аттестации по математике в форме ЕГЭ, вошедших в обновлённый открытый банк заданий ФИПИ.

Предложенные тренировочные варианты помогут участнику экзамена выбрать свою стратегию сдачи экзамена. При решении тренировочных вариантов можно попробовать разные варианты планирования работы, обращая внимание на то, что условия работы должны быть такими же, как на экзамене: не допускается использование калькулятора, не следует отвлекаться в течение всего времени, отведённого на выполнение варианта. Перед выполнением заданий варианта обязательно прочитайте инструкцию. На экзамене (тренировке) следует пропускать те задания, которые на этапе подготовки, например, с помощью учебного пособия «Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации», вызывали затруднения, и выполнять их после того, как будут решены те задания, в решении которых уверены. Каждый участник экзамена во время выполнения заданий каждой части может выделить больше времени на те задачи, которые он может решить: более подготовленный, быстро решив простые задачи, имеет возможность сосредоточиться на более сложных (задания второй части в вариантах профильного уровня), а менее подготовленный сможет всё время потратить на решение заданий базового уровня сложности (задания первой части).

Данный сборник позволяет учителю вести планомерную подготовку к итоговой аттестации по математике, включая задания сборника в классную и домашнюю работу. В основном одинаковые задания даются парами: одну задачу решили в классе, другую — дома.

Учащиеся имеют возможность самостоятельно выстраивать тактику подготовки к экзамену с использованием материалов данного издания, открытого банка математических заданий с опорой на школьные учебники.

Авторы выражают уверенность в том, что задания сборника позволят не только успешно подготовиться к экзамену, но и закрепить математические знания, которые пригодятся в обычной жизни и при продолжении образования.

1. АЛГЕБРА

1.1. Рациональные уравнения и выражения

1.1.1. Найдите корень уравнения $2 - 5x = 11 - 2x$.

1.1.2. Найдите корень уравнения $-4(3 - x) = 2x + 7$.

1.1.3. Найдите корень уравнения $\frac{7}{8}x = 19\frac{1}{4}$.

1.1.4. Найдите корень уравнения $\frac{5}{9}x = -1\frac{2}{3}$.

1.1.5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{5x - 5} = 2$.

1.1.6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{x - 5} = \frac{1}{4}$.

1.1.7. Найдите корень уравнения $\frac{x - 40}{x - 4} = -5$.

1.1.8. Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x + 2} = \frac{1}{3x - 6}$.

1.1.9. Решите уравнение $\frac{2}{5}x^2 = 4{,}9$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.10. Решите уравнение $\frac{1}{11}x^2 = 9\frac{1}{11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.11. Найдите корень уравнения $x^2 - 9x + 14 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

1.1.12. Найдите корень уравнения $x^2 - 4x - 45 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

1.1.13. Решите уравнение $(2x - 7)^2 = (2x - 1)^2$.

1.1.14. Найдите корень уравнения $(x - 10)^2 = (x + 3)^2$.

1.1.15. Найдите корень уравнения $x^2 - 4 = (x - 2)^2$.

1.1.16. Найдите корень уравнения $x^2 - 5 = (x + 1)^2$.

1.1.17. Решите уравнение $(x - 1)^2 = -4x$.

1.1.18. Найдите корень уравнения $(x - 2)^2 = -8x$.

1.1.19. Решите уравнение $\frac{2}{x^2 + 1} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

1.1.20. Решите уравнение $\frac{19x}{x^2 - 5} = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.21. Найдите корень уравнения $x = \frac{-x - 10}{x + 6}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

1.1.22. Найдите корень уравнения $x = \frac{-4x-7}{x-12}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

1.1.23. Найдите корень уравнения $\frac{10}{x^2-15} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.24. Найдите корень уравнения $\frac{8}{x^2-8} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.25. Найдите корень уравнения $\frac{x-4}{4x-1} = \frac{x-4}{3x-10}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.26. Найдите корень уравнения $\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.27. Найдите корень уравнения $(x+4)^9 = 512$.

1.1.28. Найдите корень уравнения $(x-7)^3 = -216$.

1.1.29. Решите уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.30. Решите уравнение $x^4 + x^2 - 2 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

1.1.31. При температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

1.1.32. При температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

1.1.33. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

1.1.34. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 100 - 4p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

1.1.35. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна $300\,000$ руб.

1.1.36. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 900\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна $600\,000$ руб.

1.1.37. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние (в метрах), t — время падения (в секундах). До дождя время падения камешков составляло 1,2 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

1.1.38. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние (в метрах), t — время падения (в секундах). До дождя время падения камешков составляло 1 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

1.1.39. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}2 + 10t - 5t^2$, где h — высота (в метрах), t — время (в секундах), прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

1.1.40. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$, где h — высота (в метрах), t — время (в секундах), прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?

1.1.41. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время (в минутах), $\omega = 75\ °/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10\ °/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $2250°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

1.1.42. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время (в минутах), $\omega = 50\ °/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10\ °/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $1000°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

1.1.43. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 58$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ выразите в минутах.

1.1.44. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 55$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 2$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 56 км от города. Ответ выразите в минутах.

1.1.45. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах). В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

1.1.46. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах). В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

1.1.47. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 25$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ выразите в омах.

1.1.48. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 63$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 36 Ом. Ответ выразите в омах.

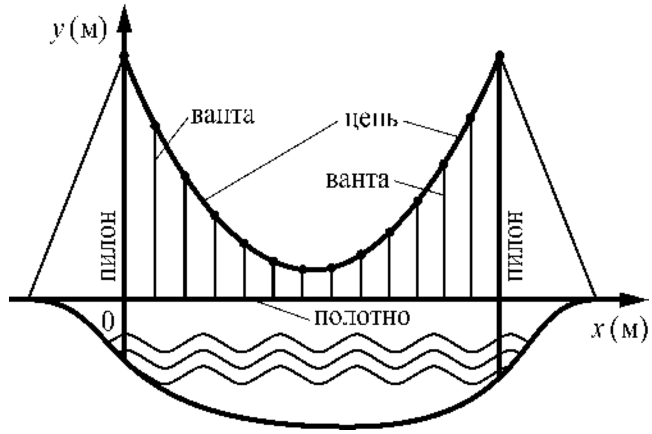
1.1.49. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20 %, если температура холодильника $T_2 = 320$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

1.1.50. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 65 %, если температура холодильника $T_2 = 301$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

1.1.51. Зависимость температуры (в Кельвинах) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температур вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -50$ К/мин², $b = 400$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1750 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

1.1.52. Зависимость температуры (в Кельвинах) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температур вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 680$ К, $a = -16$ К/мин^2, $b = 224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

1.1.53. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0043x^2 - 0{,}8x + 42$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 90 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



1.1.54. На рисунке к задаче 1.1.29 изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0013x^2 - 0{,}29x + 20$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 10 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

1.1.55. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{(r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}})}{(K+1)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 7, их средняя оценка равна 0,32, а оценка экспертов равна 0,22.

1.1.56. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{(r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}})}{(K+1)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 7, их средняя оценка равна 0,11, а оценка экспертов равна 0,15.

1.1.57. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 5. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вчетверо дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{3In + Op + 4Tr}{A}$. Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 1.

1.1.58. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 10. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вчетверо, а объективность — втрое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{4In + Op + 3Tr}{A}$. Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 20.

1.1.59. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,6 км от места отправления. Один идёт со скоростью 3 км/ч, а другой — со скоростью 4,2 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в км.

1.1.60. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от места отправления. Один идёт со скоростью 3 км/ч, а другой — со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в км.

1.1.61. Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 35 км. Путь из A в B занял у туриста 14 часов, из которых 7 часов ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.62. Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 22 км. Путь из A в B занял у туриста 8 часов, из которых 3 часа ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.63. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 200 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 10 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 10 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

1.1.64. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 162 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 9 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 9 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

1.1.65. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 42 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью на 28 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

1.1.66. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 36 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью на 24 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

1.1.67. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

1.1.68. Два велосипедиста одновременно отправились в 165-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

1.1.69. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 513 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

1.1.70. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 336 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 48 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

1.1.71. Моторная лодка прошла против течения реки 117 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.72. Моторная лодка прошла против течения реки 247 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 16 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.73. На изготовление 27 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 54 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

1.1.74. На изготовление 572 деталей первый рабочий затрачивает на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 650 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

1.1.75. Заказ на изготовление 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 3 детали больше?

1.1.76. Заказ на изготовление 240 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 1 деталь больше?

1.1.77. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 4 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

1.1.78. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 9 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 5 дней выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

1.1.79. Плиточник должен уложить 168 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 2 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

1.1.80. Плиточник должен уложить 324 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 9 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 6 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

1.1.81. Смешали некоторое количество 18-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 16-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.1.82. Смешали 3 литра 10-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 40-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.1.83. Имеется два сплава. Первый содержит 5 % никеля, второй — 25 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 250 кг, содержащий 20 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

1.1.84. Первый сплав содержит 5 % меди, второй — 14 % меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

1.1.85. Бригада маляров красит забор длиной 140 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 70 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

1.1.86. Рабочие прокладывают тоннель длиной 112 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 7 метров туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 7 дней.

1.1.87. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 72 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 342 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 276 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 45 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

1.1.88. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 66 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 385 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 372 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

1.1.89. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 60 км/ч и 40 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 350 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 18 секундам. Ответ дайте в метрах.

1.1.90. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 60 км/ч и 30 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 400 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 38 секундам. Ответ дайте в метрах.

1.1.91. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 32 круга по кольцевой трассе протяжённостью 5,1 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 6 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 51 минуту после старта? Ответ дайте в км/ч.

1.1.92. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 99 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 22 минуты. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 20 минут после старта? Ответ дайте в км/ч.

1.1.93. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 21 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 420 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

1.1.94. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч, вторую треть — со скоростью 60 км/ч, а последнюю — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

1.1.95. Петя и Митя выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 10 вопросов теста, а Митя— на 16. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Мити на 117 минут. Сколько вопросов содержит тест?

1.1.96. Коля и Митя выполняют одинаковый тест. Коля отвечает за час на 12 вопросов теста, а Митя— на 21. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Коля закончил свой тест позже Мити на 105 минут. Сколько вопросов содержит тест?

1.1.97. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 9 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

1.1.98. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 17 часов. Через 1 час после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

1.1.99. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 23 рабочих. Через 3 дня после начала работы в первую бригаду перешли 20 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

1.1.100. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 9 рабочих, а во второй — 11 рабочих. Через 6 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

1.1.101. Один мастер может выполнить заказ за 28 часов, а другой — за 21 час. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

1.1.102. Первый насос наполняет бак за 30 минут, второй — за 48 минут, а третий — за 1 час 20 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

1.1.103. Две трубы наполняют бассейн за 4 часа 30 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 18 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

1.1.104. Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

1.2. Иррациональные уравнения и выражения

1.2.1. Найдите значение выражения $\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2}$.

1.2.2. Найдите значение выражения $\frac{\left(3\sqrt{5}\right)^2}{15}$.

1.2.3. Найдите значение выражения $\sqrt{34^2 - 30^2}$.

1.2.4. Найдите значение выражения $\sqrt{233^2 - 208^2}$.

1.2.5. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{32} - \sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{8}$.

1.2.6. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{27} - \sqrt{48}\right)\cdot\sqrt{12}$.

1.2.7. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{4{,}8}\cdot\sqrt{1{,}8}}{\sqrt{0{,}24}}$.

1.2.8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{1{,}5}\cdot\sqrt{2{,}1}}{\sqrt{0{,}35}}$.

1.2.9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{14} - \sqrt{12}\right)\left(\sqrt{14} + \sqrt{12}\right)$.

1.2.10. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{8} - \sqrt{18}\right)\left(\sqrt{8} + \sqrt{18}\right)$.

1.2.11. Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{18}\right)^2}{16}$.

1.2.12. Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{17}\right)^2}{12+\sqrt{119}}$.

1.2.13. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{3}}-\sqrt{16\frac{2}{3}}\right):\sqrt{\frac{2}{27}}$.

1.2.14. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}}-\sqrt{5\frac{2}{5}}\right):\sqrt{\frac{3}{125}}$.

1.2.15. Найдите корень уравнения $\sqrt{x-5}=4$.

1.2.16. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+3}=3$.

1.2.17. Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-9x}=2$.

1.2.18. Найдите корень уравнения $\sqrt{10-x}=2$.

1.2.19. Решите уравнение $\sqrt{18-7x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

1.2.20. Решите уравнение $\sqrt{56-x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

1.2.21. Решите уравнение $\sqrt{\frac{4}{3x-17}}=\frac{1}{2}$.

1.2.22. Решите уравнение $\sqrt{\frac{5}{8-3x}}=\frac{1}{13}$.

1.2.23. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+10}=2$.

1.2.24. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+1}=2$.

1.2.25. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,3 километра, приобрести скорость не менее 90 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

1.2.26. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 километра, приобрести скорость не менее 140 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

1.2.27. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 12 километров? Ответ выразите в метрах.

1.2.28. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 32 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 36 километров?

1.2.29. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{81} \cdot 10^{15}$ м^2, а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{20}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

1.2.30. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{125} \cdot 10^{15}$ м^2, а мощность её излучения равна $4{,}56 \cdot 10^{21}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

1.3. Степенные уравнения и выражения

1.3.1. Найдите значение выражения $3^4 \cdot 9^{-2}$.

1.3.2. Найдите значение выражения $2^3 \cdot 16^{-\frac{1}{2}}$.

1.3.3. Найдите значение выражения $5^{0{,}36} \cdot 25^{0{,}32}$.

1.3.4. Найдите значение выражения $8^{0{,}6} \cdot 32^{0{,}04}$.

1.3.5. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{7}} \cdot 49^{\frac{5}{7}}$.

1.3.6. Найдите значение выражения $3^{\frac{5}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{12}}$.

1.3.7. Найдите значение выражения $\dfrac{4^{5{,}5}}{16^{1{,}25}}$.

1.3.8. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{3{,}8}}{49^{1{,}4}}$.

1.3.9. Найдите значение выражения $\dfrac{25^{6{,}2}}{5^{10{,}4}}$.

1.3.10. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{3{,}7}}{3^{5{,}4}}$.

1.3.11. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{3{,}2} \cdot 6^{6{,}2}}{12^{5{,}2}}$.

1.3.12. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{2{,}5} \cdot 5^{5{,}5}}{10^{2{,}5}}$.

1.3.13. Найдите значение выражения $4^4 \cdot 3^9 : 12^4$.

1.3.14. Найдите значение выражения $12^{-2{,}8} \cdot 4^{1{,}8} : 3^{-4{,}8}$.

1.3.15. Найдите значение выражения $9\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[12]{125}$.

1.3.16. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[3]{64}$.

1.3.17. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[20]{5}\cdot\sqrt[5]{5}}{\sqrt[4]{5}}$.

1.3.18. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{9}}$.

1.3.19. Найдите значение выражения $\left(2^5\right)^6:2^{32}$.

1.3.20. Найдите значение выражения $\left(36^6\right)^3:\left(6^4\right)^8$.

1.3.21. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{2}}\right)^3$.

1.3.22. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5^{\frac{4}{7}}\cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{55^{12}}$.

1.3.23. Найдите значение выражения $\dfrac{17(m^4)^6+7(m^8)^3}{(4m^{12})^2}$.

1.3.24. Найдите значение выражения $\dfrac{7(m^4)^3+18(m^3)^4}{(5m^6)^2}$.

1.3.25. Найдите значение выражения $\dfrac{(6x)^3\cdot x^{-7}}{x^{-3}\cdot 2x^{-1}}$.

1.3.26. Найдите значение выражения $\dfrac{(4x)^2\cdot x^5}{x^4\cdot 5x^3}$.

1.3.27. Найдите корень уравнения $3^{x-4}=9$.

1.3.28. Найдите корень уравнения $4^{2-x}=16$.

1.3.29. Найдите корень уравнения $4^{2x-17}=\dfrac{1}{64}$.

1.3.30. Найдите корень уравнения $36^{x-5}=\dfrac{1}{6}$.

1.3.31. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-12}=\dfrac{1}{8}$.

1.3.32. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-7}=3$.

1.3.33. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{4+x}=125$.

1.3.34. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-5+x}=125$.

1.3.35. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{18-3x}=64$.

1.3.36. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9$.

1.3.37. Найдите корень уравнения $5^{7+2x} = 25^{2x}$.

1.3.38. Найдите корень уравнения $3^{3+4x} = 1{,}5 \cdot 2^{3+4x}$.

1.3.39. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 32^x$.

1.3.40. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = 2^x$.

1.3.41. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 36$ мг. Период его полураспада $T = 10$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 9 мг?

1.3.42. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 48$ мг. Период его полураспада $T = 8$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг?

1.3.43. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) — давление в газе, V — объём газа (в кубических метрах), a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 2 раза?

1.3.44. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) — давление в газе, V — объём газа (в кубических метрах), a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a увеличение в 32 раза объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к уменьшению давления не менее, чем в 2 раза?

1.4. Тригонометрические уравнения и выражения

1.4.1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.4.2. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (1{,}5\pi; 2\pi)$.

1.4.3. Найдите $18\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}7$.

1.4.4. Найдите $-46\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}1$.

1.4.5. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1.4.6. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

1.4.7. Найдите значение выражения $8\sin 135° \cdot \cos 45°$.

1.4.8. Найдите значение выражения $27\sqrt{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.

1.4.9. Найдите значение выражения $6\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{3}$.

1.4.10. Найдите значение выражения $32\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

1.4.11. Найдите $17\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$.

1.4.12. Найдите $49\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{7}$.

1.4.13. Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}\cos(-750°)$.

1.4.14. Найдите значение выражения $-44\sqrt{2}(\cos -315°)$.

1.4.15. Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-600°)$.

1.4.16. Найдите значение выражения $-29\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-60°)$.

1.4.17. Найдите значение выражения $30\sqrt{3}\sin 1020°$.

1.4.18. Найдите значение выражения $-34\sqrt{3}\cos 930°$.

1.4.19. Найдите значение выражения $10\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,390°$.

1.4.20. Найдите значение выражения $35\,\mathrm{tg}\,14° \cdot \mathrm{tg}\,76°$.

1.4.21. Найдите значение выражения $\frac{48\sin 76°}{\sin 284°}$.

1.4.22. Найдите значение выражения $\frac{35\cos 82°}{\cos 98°}$.

1.4.23. Найдите значение выражения $\frac{28\,\mathrm{tg}\,48°}{\mathrm{tg}\,132°}$.

1.4.24. Найдите значение выражения $\frac{17\cos 86°}{\sin 4°}$.

1.4.25. Найдите значение выражения $-24\,\mathrm{tg}\,70° \cdot \mathrm{tg}\,160°$.

1.4.26. Найдите значение выражения $\frac{2\sin 32° \cdot \cos 32°}{\sin 64°}$.

1.4.27. Найдите значение выражения $\frac{-6\sin 32°}{\sin 16° \cdot \sin 74°}$.

1.4.28. Найдите значение выражения $\frac{-9\sin 136°}{\cos 68° \cdot \cos 22°}$.

1.4.29. Найдите значение выражения $\frac{30(\sin^2 28° - \cos^2 28°)}{\cos 56°}$.

1.4.30. Найдите значение выражения $\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{8} \cdot \cos\frac{13\pi}{8}$.

1.4.31. Найдите значение выражения $\sqrt{75}\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sqrt{75}\sin^2\frac{7\pi}{12}$.

1.4.32. Найдите значение выражения $\sqrt{32}\cos^2\frac{\pi}{8} - \sqrt{8}$.

1.4.33. Найдите значение выражения $\frac{-12}{\sin^2 131° + \sin^2 221°}$.

1.4.34. Найдите значение выражения $\frac{-4}{\sin^2 27° + \sin^2 117°}$.

1.4.35. Найдите значение выражения $\dfrac{-24}{\cos^2 127^\circ + \cos^2 217^\circ}$.

1.4.36. Найдите значение выражения $\dfrac{-38}{\cos^2 15^\circ + \cos^2 105^\circ}$.

1.4.37. Найдите $\dfrac{2\sin 4\alpha}{5\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0{,}2$.

1.4.38. Найдите $\dfrac{3\sin 6\alpha}{5\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0{,}8$.

1.4.39. Найдите $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1.4.40. Найдите $8\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\alpha \in (1{,}5\pi; 2\pi)$.

1.4.41. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $4\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha = 6$.

1.4.42. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $6\sin^2\alpha + 11\cos^2\alpha = 8$.

1.4.43. Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

1.4.44. Найдите корень уравнения $\cos\dfrac{\pi(2x-5)}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

1.4.45. Решите уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4} = 1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

1.4.46. Решите уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{\pi(x+1)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

1.4.47. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1.4.48. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \dfrac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 22$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 11,1 м на расстоянии 1 м?

1.4.49. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 24$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 28,8 м?

1.4.50. Два тела массой $m = 3$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2\sin^2\alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 75 джоулей?

1.5. Логарифмические уравнения и выражения

1.5.1. Найдите значение выражения $\log_2 8$.

1.5.2. Найдите значение выражения $\log_{10} 1000$.

1.5.3. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 32$.

1.5.4. Найдите значение выражения $\log_{0,1} 100$.

1.5.5. Найдите значение выражения $\log_6 \log_2 64$.

1.5.6. Найдите значение выражения $18 \log_7 \sqrt[6]{7}$.

1.5.7. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[7]{3}} 3$.

1.5.8. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{25}$.

1.5.9. Найдите значение выражения $18 \cdot 3^{\log_3 4}$.

1.5.10. Найдите значение выражения $216^{\log_6 7}$.

1.5.11. Найдите значение выражения $(\log_7 343) \cdot (\log_2 8)$.

1.5.12. Найдите значение выражения $(\log_4 16) \cdot (\log_3 9)$.

1.5.13. Найдите значение выражения $\log_{10} 0{,}01 + \log_{0,5} 4$.

1.5.14. Найдите значение выражения $\log_2 64 + \log_{0,1} 100$.

1.5.15. Найдите значение выражения $\log_5 6{,}25 + \log_5 4$.

1.5.16. Найдите значение выражения $\log_8 256 - \log_8 0{,}5$.

1.5.17. Найдите значение выражения $\log_{0,6} 10 - \log_{0,6} 6$.

1.5.18. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 729}{\log_2 9}$.

1.5.19. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 8}{\log_{81} 8}$.

1.5.20. Найдите значение выражения $\log_5 2 \cdot \log_2 25$.

1.5.21. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 9 \cdot \log_9 4$.

1.5.22. Найдите значение выражения $5^{3\log_5 11}$.

1.5.23. Найдите значение выражения $36^{\log_6 \sqrt{8}}$.

1.5.24. Вычислите значение выражения $\left(7^{\log_7 2}\right)^{\log_2 7}$.

1.5.25. Вычислите значение выражения $\left(5^{\log_2 7}\right)^{\log_5 2}$.

1.5.26. Найдите корень уравнения $\log_6(-3+x) = 1$.

1.5.27. Найдите корень уравнения $\log_7(-5-x) = 3$.

1.5.28. Найдите корень уравнения $\log_4(15+x) = \log_4 2$.

1.5.29. Найдите корень уравнения $\log_8(10-x) = \log_8 7$.

1.5.30. Найдите корень уравнения $\log_6(x+7) = \log_6(6x-13)$.

1.5.31. Решите уравнение $\log_2(8+3x) = \log_2(3-x)+1$.

1.5.32. Найдите корень уравнения $\log_3(14-x) = 2\log_3 5$.

1.5.33. Найдите корень уравнения $\log_3(18-x) = 4\log_3 2$.

1.5.34. Найдите корень уравнения $3^{\log_3(7-x)} = 5$.

1.5.35. Найдите корень уравнения $2^{\log_4(x+1)} = 3$.

1.5.36. Найдите корень уравнения $\log_5 25^{2x+7} = 8$.

1.5.37. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{6-x} = 3$.

1.5.38. Решите уравнение $\log_{x+6} 9 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

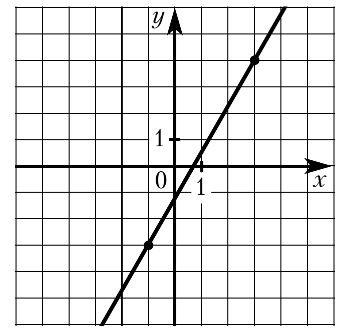
1.5.39. Решите уравнение $\log_{x-7} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

1.5.40. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{П}} = 20\ ^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{В}} = 88\ ^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(^\circ\text{C})$, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\text{П}}}{T - T_{\text{П}}}$ (м), где $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}6$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 96 м?

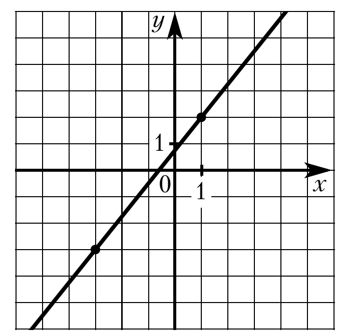
1.5.41. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{П}} = 15\ ^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{В}} = 59\ ^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(^\circ\text{C})$, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\text{П}}}{T - T_{\text{П}}}$ (м), где $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 28\ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 135 м?

1.6. Функции и графики

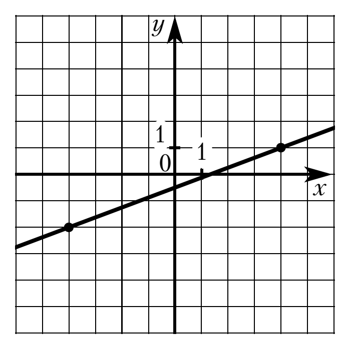
1.6.1. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(-5)$.



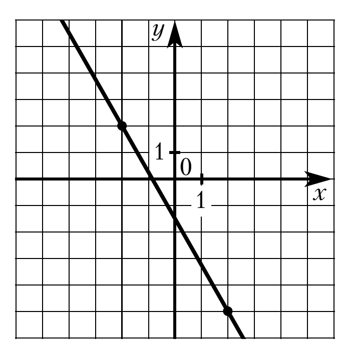
1.6.2. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(-9)$.



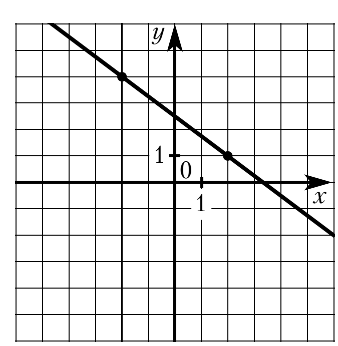
1.6.3. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(12)$.



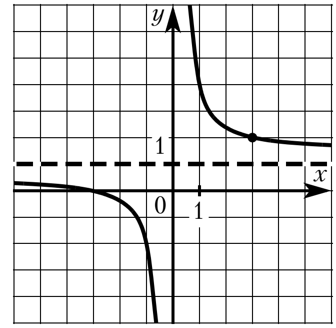
1.6.4. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(8)$.



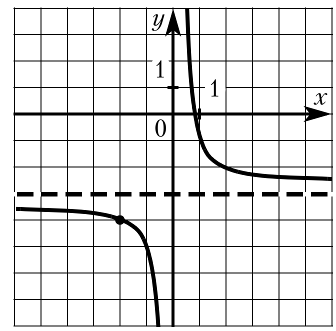
1.6.5. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(-16)$.



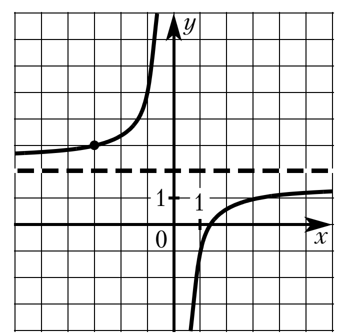
1.6.6. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



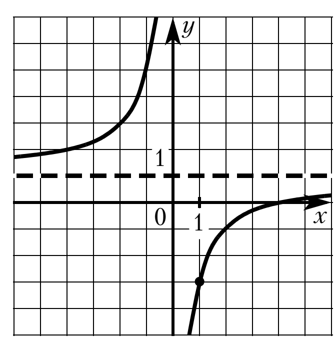
1.6.7. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно $-3{,}1$.



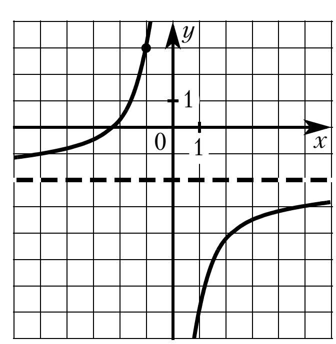
1.6.8. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 2,2.



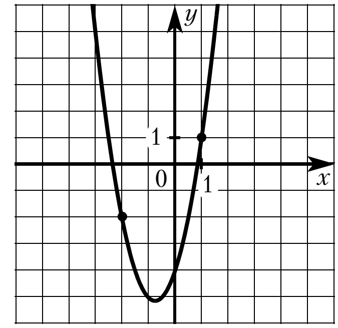
1.6.9. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,75.



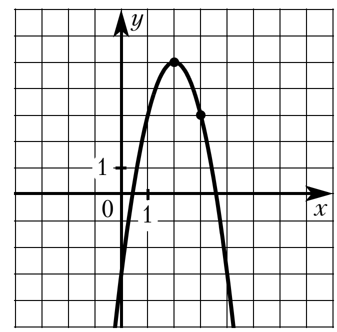
1.6.10. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно -27.



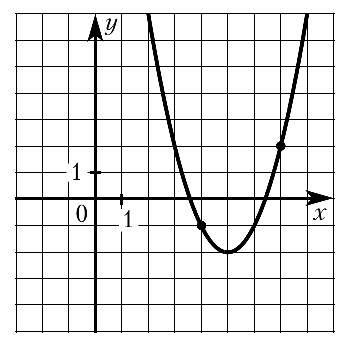
1.6.11. На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-5)$.



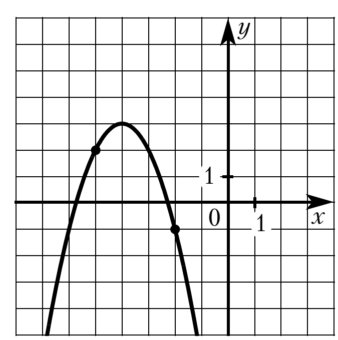
1.6.12. На рисунке изображён график функции $f(x) = -2x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(5)$.



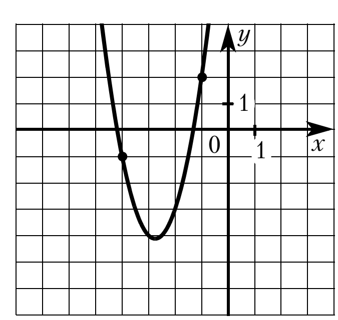
1.6.13. На рисунке изображён график функции $f(x) = x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-1)$.



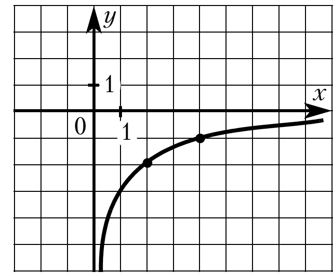
1.6.14. На рисунке изображён график функции $f(x) = -x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-8)$.



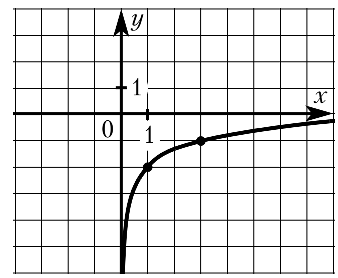
1.6.15. На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-6)$.



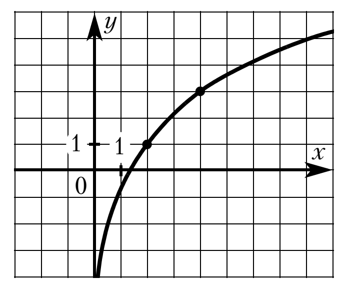
1.6.16. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(32)$.



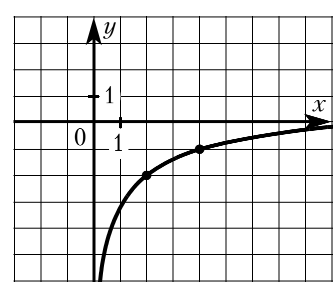
1.6.17. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(27)$.



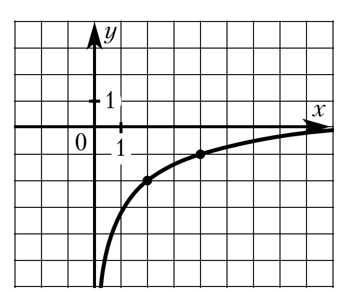
1.6.18. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



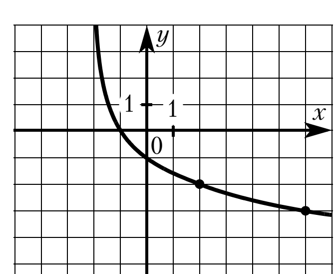
1.6.19. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f\left(\frac{1}{8}\right)$.



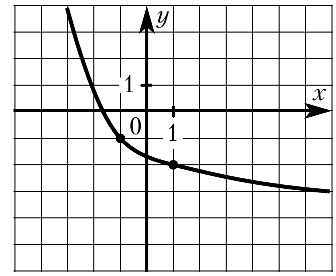
1.6.20. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(0{,}25)$.



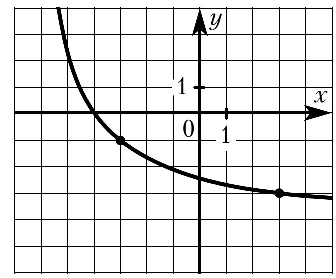
1.6.21. На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a (x + b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -4$.



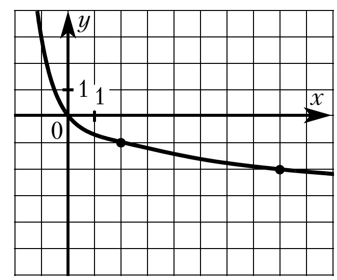
1.6.22. На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -5$.



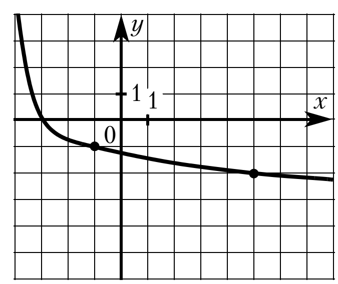
1.6.23. На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -4$.



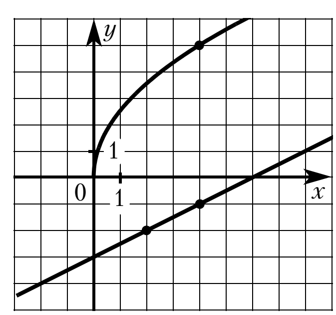
1.6.24. На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -4$.



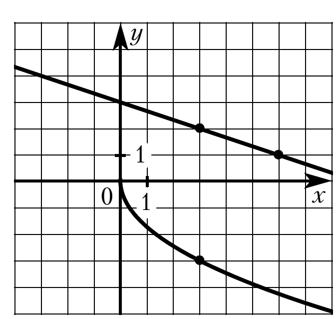
1.6.25. На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -5$.



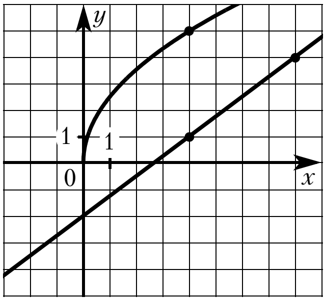
1.6.26. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



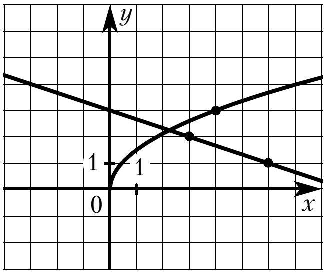
1.6.27. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



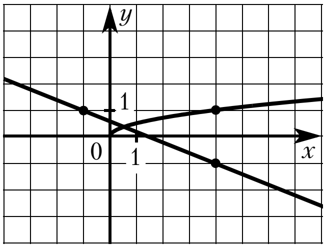
1.6.28. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



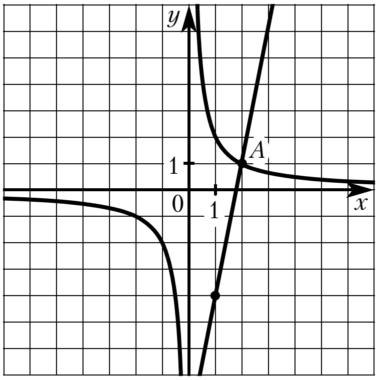
1.6.29. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



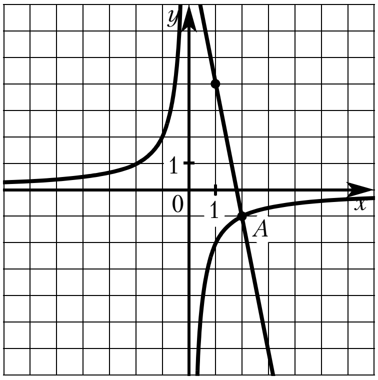
1.6.30. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



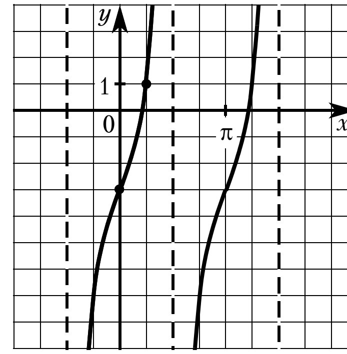
1.6.31. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



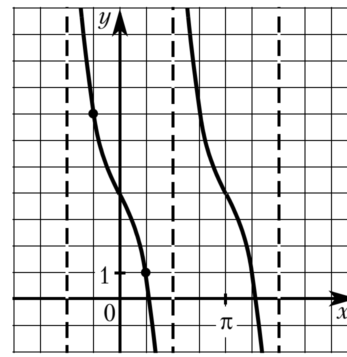
1.6.32. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



1.6.33. На рисунке изображён график функции $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите a.



1.6.34. На рисунке изображён график функции $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите a.



1.7. Вероятность

1.7.1. В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 20 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

1.7.2. В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 13 из них встречается вопрос по оптике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по оптике.

1.7.3. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 20 спортсменов, среди них 5 прыгунов из Голландии и 7 прыгунов из Венесуэлы. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым будет выступать прыгун из Голландии.

1.7.4. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 7 прыгунов из Италии и 10 прыгунов из Канады. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать вторым будет выступать прыгун из Италии.

1.7.5. На семинар приехали 4 учёных из Норвегии, 2 из Испании и 6 из Италии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что одиннадцатым окажется доклад учёного из Италии.

1.7.6. На соревнования по метанию ядра приехали 7 спортсменов из России, 7 из Швеции и 6 из Сербии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым будет выступать спортсмен из Швеции?

1.7.7. В классе 6 учащихся, среди них два друга — Сергей и Олег. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Олег окажутся в одной группе.

1.7.8. В параллели 51 учащийся, среди них два друга — Сергей и Вадим. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Вадим окажутся в одной группе.

1.7.9. В среднем из 150 карманных фонариков двадцать четыре неисправны. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

1.7.10. В каждой партии из 500 лампочек в среднем 7 бракованных. Найдите вероятность того, что наугад взятая лампочка из партии будет исправной.

1.7.11. При производстве в среднем на каждые 992 исправных насоса приходится 8 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

1.7.12. При производстве в среднем на каждые 1393 исправных насоса приходится 7 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

1.7.13. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов — первые два дня по 8 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

1.7.14. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 40 докладов — первые два дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

1.7.15. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 34 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

1.7.16. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 32 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

1.7.17. В чемпионате мира участвуют 16 команд, включая команду из Бразилии. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4.$$

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Бразилии окажется в третьей группе?

1.7.18. В чемпионате мира участвуют 15 команд, включая команду из России. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по три команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5.$$

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

1.7.19. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 11 участников из России, в том числе Петр Трофимов. Найдите вероятность того, что в первом туре Петр Трофимов будет играть с каким-либо шахматистом из России?

1.7.20. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 шашистов, среди которых 13 участников из России, в том числе Андрей Фомин. Найдите вероятность того, что в первом туре Андрей Фомин будет играть с каким-либо шашистом из России?

1.7.21. В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают пятерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

1.7.22. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

1.7.23. На борту самолёта 19 кресел расположены рядом с запасными выходами и 13 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир Л. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Л. достанется удобное место, если всего в самолёте 400 мест.

1.7.24. На борту самолёта 22 кресла расположены рядом с запасными выходами и 11 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир А. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру А. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

1.7.25. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет оба раза.

1.7.26. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

1.7.27. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Витязь» по очереди играет с командами «Атлант» и «Титан». Найдите вероятность того, что команда «Витязь» не выиграет право первой владеть мячом ни в одном матче.

1.7.28. Перед началом волейбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Байкал» по очереди играет с командами «Амур», «Енисей», «Вилюй» и «Иртыш». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах право первой владеть мячом выиграет команда «Байкал».

1.7.29. Найдите вероятность того, что при броске игрального кубика выпадет нечётное число.

1.7.30. Найдите вероятность того, что при броске двух кубиков на обоих выпадет число не большее 3.

1.7.31. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Результат округлите до сотых.

1.7.32. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

1.7.33. Аня и Яна играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Ничья, если очков поровну. Аня выкинула 3 очка. Затем кубик бросает Яна. Найдите вероятность того, что Яна выиграет.

1.7.34. Лена и Саша играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Ничья, если очков поровну. Лена выкинула 4 очка. Затем кубик бросает Саша. Найдите вероятность того, что Саша проиграет.

1.7.35. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

1.7.36. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

1.7.37. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 0,9. Он стреляет пять раз. Найдите вероятность того, что он попадёт в мишень все пять раз.

1.7.38. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 0,7. Он стреляет пять раз. Найдите вероятность того, что он не попадёт в мишень ни одного раза.

1.7.39. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 35 до 46 делится на 5?

1.7.40. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 82 до 96 делится на 6?

1.7.41. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

1.7.42. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

1.7.43. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,83. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,64. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 17.

1.7.44. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 16 пассажиров, равна 0,89. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,46. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 15.

1.7.45. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся У. верно решит больше 9 задач, равна 0,61. Вероятность того, что У. верно решит больше 8 задач, равна 0,73. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 9 задач.

1.7.46. Вероятность того, что на тесте по физике учащийся У. верно решит больше 11 задач, равна 0,66. Вероятность того, что У. верно решит больше 10 задач, равна 0,71. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 11 задач.

1.7.47. Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45 % этих стекол, вторая — 55 %. Первая фабрика выпускает 5 % бракованных стекол, а вторая — 3 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

1.7.48. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60 % этих стёкол, вторая — 40 %. Первая фабрика выпускает 2 % бракованных стёкол, а вторая — 4 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

1.7.49. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,1. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

1.7.50. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,03 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

1.7.51. В аэропорте два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

1.7.52. В аэропорте два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

1.7.53. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

1.7.54. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

1.7.55. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 43 % пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

1.7.56. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называетсяположительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 65 % пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

1.7.57. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,4. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,9?

1.7.58. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,9. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,96?

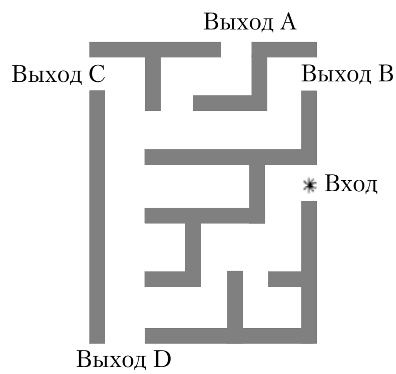
1.7.59. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 8 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 3 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

1.7.60. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 7 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 2 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

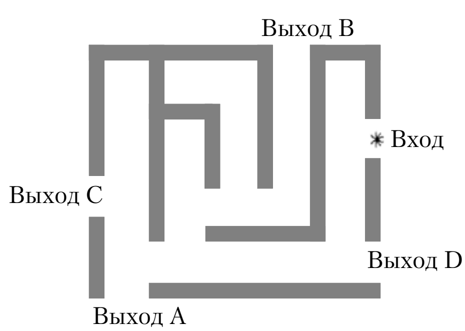
1.7.61. При изготовлении подшипников диаметром 69 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем на 0,01 мм, равна 0,975. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 68,99 мм или больше чем 69,01 мм.

1.7.62. При изготовлении подшипников диаметром 76 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,983. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 75,99 мм или больше чем 76,01 мм.

1.7.63. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



1.7.64. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу A.



1.7.65. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 6, но не дойдя до отметки 9.

1.7.66. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 8, но не дойдя до отметки 2.

1.7.67. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит числа 3. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно три броска? Ответ округлите до сотых.

1.7.68. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 2. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно два броска? Ответ округлите до сотых.

1.7.69. Стрелок в тире стреляет по мишени. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать этому стрелку, чтобы вероятность поражения цели была не менее 0,5?

1.7.70. Стрелок в тире стреляет по мишени. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать этому стрелку, чтобы вероятность поражения цели была не менее 0,6?

1.7.71. В ящике три красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

1.7.72. В ящике два красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

1.7.73. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

1.7.74. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Найдите отношение вероятностей событий «стрелок поразит ровно пять мишеней» и «стрелок поразит ровно четыре мишени».

1.7.75. Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов (шоколадное яйцо с игрушкой внутри). Всего в серии 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть три разные принцессы. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы, которой раньше не было в Машиной коллекции, ей придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

1.7.76. Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов (шоколадное яйцо с игрушкой внутри). Всего в серии 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть четыре разные принцессы. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы, которой раньше не было в Машиной коллекции, ей придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

1.7.77. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 6 очков.

1.7.78. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 4 очка.

1.7.79. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

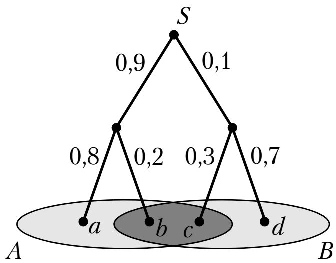
1.7.80. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечётных чисел, а чётные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

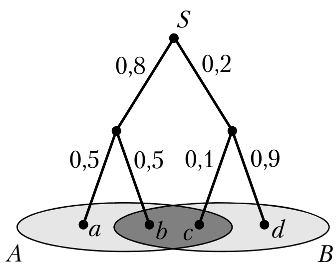
1.7.81. За круглый стол на 6 стульев в случайном порядке рассаживаются 4 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

1.7.82. За круглый стол на 126 стульев в случайном порядке рассаживаются 124 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки не будут сидеть рядом.

1.7.83. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B.



1.7.84. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B.



1.7.85. В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите $\mathrm{E}X$ — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения *X*	−3	0	2	3
Вероятности	0,6	0,1	0,2	0,1

1.7.86. В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите $\mathrm{E}X$ — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения *X*	−3	−2	1	5
Вероятности	0,2	0,4	0,2	0,3

2. ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Длины

2.1.1. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите гипотенузу.

2.1.2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15. Один из его катетов равен 9. Найдите другой катет.

2.1.3. Периметр параллелограмма равен 56. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

2.1.4. Две стороны параллелограмма относятся как $3:4$, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.

2.1.5. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $1:3$, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 60.

2.1.6. Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 5 и 12.

2.1.7. Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 6 и 8.

2.1.8. Средняя линия трапеции равна 35, а меньшее основание равно 27. Найдите большее основание трапеции.

2.1.9. Средняя линия трапеции равна 29, а одно из её оснований больше другого на 14. Найдите большее основание трапеции.

2.1.10. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

2.1.11. Основания трапеции равны 12 и 37. Найдите меньший из отрезков, на которые делит среднюю линию трапеции одна из её диагоналей.

2.1.12. Периметр трапеции равен 40, а сумма непараллельных сторон равна 20. Найдите среднюю линию трапеции.

2.1.13. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 10. Найдите её среднюю линию.

2.1.14. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 22 и 15. Найдите среднюю линию этой трапеции.

2.1.15. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 17 и 126. Найдите среднюю линию этой трапеции.

2.1.16. Основания трапеции равны 10 и 24. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

2.1.17. Основания трапеции равны 13 и 47. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

2.1.18. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 8, отсекает треугольник, периметр которого равен 17. Найдите периметр трапеции.

2.1.19. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 5, отсекает треугольник, периметр которого равен 24. Найдите периметр трапеции.

2.1.20. Диагонали четырёхугольника равны 7 и 25. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

2.1.21. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 30. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

2.1.22. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 47. Найдите гипотенузу этого треугольника.

2.1.23. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 8$, $BC = 15$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

2.1.24. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 2\sqrt{15}$. Радиус описанной окружности этого треугольника равен 8. Найдите AC.

2.1.25. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 5$, $CD = 15$. Найдите периметр четырёхугольника.

2.1.26. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 74, две его стороны равны 21 и 25. Найдите большую из оставшихся сторон.

2.1.27. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 6$ и $CD = 16$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

2.1.28. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 23$, $BC = 27$, $CD = 15$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

2.1.29. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 30. Найдите радиус окружности.

2.1.30. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 31. Найдите радиус окружности.

2.1.31. Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 10. Радиус описанной окружности равен 13. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

2.1.32. Основания равнобедренной трапеции равны 16 и 12. Радиус описанной окружности равен 10. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

2.2. Углы

2.2.1. Один острый угол прямоугольного треугольника на $86°$ больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.2. Один острый угол прямоугольного треугольника на $56°$ больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.3. В треугольнике ABC угол A равен $77°$, $AC = BC$. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

2.2.4. В треугольнике ABC угол C равен $66°$, $AC = BC$. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

2.2.5. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен $74°$. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

2.2.6. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен $128°$. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

2.2.7. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна $12°$. Найдите этот третий угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.8. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна $250°$. Найдите этот третий угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.9. Один острый угол прямоугольного треугольника в 5 раз больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.10. Один острый угол прямоугольного треугольника в 4 раза больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.11. Один угол равнобедренного треугольника на 99° больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.12. Один из внешних углов треугольника равен 49°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $1:6$. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

2.2.13. В треугольнике ABC угол C равен 65°, AD — биссектриса, угол CAD равен 35°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

2.2.14. В треугольнике ABC угол C равен 63°, AD — биссектриса, угол CAD равен 31°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

2.2.15. В треугольнике ABC $AC = BC$, AD — высота, угол BAD равен 28°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

2.2.16. В треугольнике ABC $AB = BC$, AD — высота, угол BAD равен 29°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

2.2.17. В треугольнике ABC CD — медиана, угол ACB равен 90°, угол B равен 22°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

2.2.18. В треугольнике ABC CD — медиана, угол ACB равен 90°, угол B равен 54°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

2.2.19. Острые углы прямоугольного треугольника равны 58° и 32°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

2.2.20. Острые углы прямоугольного треугольника равны 86° и 4°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

2.2.21. Острые углы прямоугольного треугольника равны 46° и 44°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

2.2.22. Два угла треугольника равны 43° и 80°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

2.2.23. В треугольнике ABC угол C равен 6°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

2.2.24. Найдите тупой угол параллелограмма, если его острый угол равен 29°. Ответ дайте в градусах.

2.2.25. Сумма двух углов параллелограмма равна 10°. Найдите один из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

2.2.26. Сумма двух углов параллелограмма равна 126°. Найдите один из оставшихся углов. Ответ дайте в градумах.

2.2.27. Один угол параллелограмма больше другого на 28°. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.28. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 68°. Ответ дайте в градусах.

2.2.29. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{4}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

2.2.30. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{6}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

2.2.31. Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 125°. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 79°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

2.2.32. Центральный угол на 48° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

2.2.33. Найдите центральный угол AOB, если он на 62° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.

2.2.34. AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 32°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.

2.2.35. AC и BD — диаметры окружности с центром O. Центральный угол AOD равен 84°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

2.2.36. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 116°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

2.2.37. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 117° и 153°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

2.2.38. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 44°, угол CAD равен 36°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

2.2.39. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 28°, угол CAD равен 44°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

2.2.40. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 92°, угол ABD равен 54°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

2.2.41. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 52°, угол ABD равен 34°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

2.2.42. Хорда AB стягивает дугу окружности в 120°. Найдите угол между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах.

2.2.43. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 87°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.

2.2.44. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности в точке A, O — центр окружности, отрезок OC пересекает окружность в точке B, а меньшая дуга окружности AB, заключённая внутри этого угла, равна 58°. Ответ дайте в градусах.

2.2.45. Угол ACO равен 20°. Его сторона CA касается в точке A окружности с центром O. Прямая CO пересекает окружность в точках B и D, точка B лежит между C и O. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.

2.2.46. Точки A и B лежат на окружности. Точка C лежит вне неё, причём отрезок AC пересекает окружность в точке D, а отрезок BC — в точке E. Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38°. Ответ дайте в градусах.

2.2.47. Точки A и B лежат на окружности. Точка C лежит вне неё, причём отрезок AC пересекает окружность в точке D, а отрезок BC — в точке E. Угол ACB равен 48°. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна 162°. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.

2.2.48. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен $28°$. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

2.2.49. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен $53°$. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

2.3. Тригонометрия

2.3.1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{3\sqrt{11}}{10}$. Найдите $\cos A$.

2.3.2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите $\cos A$.

2.3.3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

2.3.4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{12}{13}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

2.3.5. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Найдите $\cos A$.

2.3.6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}8$. Найдите $\sin B$.

2.3.7. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}28$. Найдите $\sin B$.

2.3.8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите $\cos B$.

2.3.9. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{5}{\sqrt{41}}$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

2.3.10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите $\cos B$.

2.3.11. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 4$, $\sin A = 0{,}75$. Найдите BC.

2.3.12. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 9$, $\sin A = 0{,}3$. Найдите BC.

2.3.13. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 2$, $\operatorname{tg} A = 0{,}5$. Найдите AC.

2.3.14. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 8$, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$. Найдите AC.

2.3.15. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5$, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AC.

2.3.16. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 10$, $\cos B = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AC.

2.3.17. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}6$, $AC = 12$. Найдите AB.

2.3.18. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 8$, $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите AB.

2.3.19. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 10$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Найдите AC.

2.3.20. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 20$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите BC.

2.3.21. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 20$, $BC = 14$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

2.3.22. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = \sqrt{51}$, $BC = 7$. Найдите $\sin A$.

2.3.23. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\cos A = 0{,}4$. Найдите AB.

2.3.24. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, $\cos A = 0{,}1$. Найдите AC.

2.3.25. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 15$, $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите AC.

2.3.26. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$. Найдите AB.

2.3.27. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 3, $\operatorname{tg} A = 0{,}25$. Найдите AB.

2.3.28. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 2, $\operatorname{tg} A = 0{,}25$. Найдите AB.

2.3.29. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 1, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{20}}{5}$. Найдите AC.

2.3.30. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 9, $\operatorname{tg} A = \frac{15}{8}$. Найдите AC.

2.3.31. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}7$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

2.3.32. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}55$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

2.3.33. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}4$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

2.3.34. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}37$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

2.3.35. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = 3$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

2.3.36. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = 8$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

2.3.37. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{5}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.

2.3.38. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos B = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

2.3.39. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

2.3.40. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 4$, $BC = 2$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

2.3.41. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 120$, $BC = 35$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

2.3.42. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 12$, $\cos A = \frac{1}{2}$. Найдите AH.

2.3.43. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 25$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите AH.

2.3.44. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 26$, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите AH.

2.3.45. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $BC = 14$, $\sin A = \frac{4}{7}$. Найдите AH.

2.3.46. В параллелограмме $ABCD$ $\sin C = \frac{1}{3}$, $AD = 6$. Найдите высоту, опущенную на сторону AB.

2.3.47. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 9, $\sin A = \frac{3}{4}$. Найдите AD.

2.3.48. Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 52. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

2.3.49. Основания равнобедренной трапеции равны 27 и 43. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{8}{9}$. Найдите боковую сторону.

2.4. Площади

2.4.1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 14 и 8.

2.4.2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 и 12.

2.4.3. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $30°$. Боковая сторона треугольника равна 22. Найдите площадь этого треугольника.

2.4.4. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $150°$. Боковая сторона треугольника равна 40. Найдите площадь этого треугольника.

2.4.5. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 12 и 4, а угол между ними равен $30°$.

2.4.6. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 15 и 8, а угол между ними равен $150°$.

2.4.7. Площадь треугольника ABC равна 100. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

2.4.8. Площадь треугольника ABC равна 256. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

2.4.9. Площадь треугольника ABC равна 35, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

2.4.10. Площадь треугольника ABC равна 170, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

2.4.11. Периметр треугольника равен 24, а радиус вписанной окружности равен 4. Найдите площадь этого треугольника.

2.4.12. Периметр треугольника равен 78, а радиус вписанной окружности равен 6. Найдите площадь этого треугольника.

2.4.13. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 24 и 25.

2.4.14. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 20, а основание равно 24. Найдите площадь этого треугольника.

2.4.15. В треугольнике со сторонами 3 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой их этих сторон, равна 2. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

2.4.16. В треугольнике со сторонами 8 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой их этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

2.4.17. Стороны параллелограмма равны 10 и 70. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 42. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

2.4.18. Стороны параллелограмма равны 2 и 4. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 3. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

2.4.19. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 12 и 6.

2.4.20. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 5 и 18.

2.4.21. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 32, а один из углов равен $150°$.

2.4.22. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 23, а один из углов равен $30°$.

2.4.23. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 18 и 11, а угол между ними равен $30°$.

2.4.24. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 7 и 17, а угол между ними равен $150°$.

2.4.25. Основания трапеции равны 24 и 18, высота — 4. Найдите площадь трапеции.

2.4.26. Основания трапеции равны 5 и 22, высота — 2. Найдите площадь трапеции.

2.4.27. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 5 и 2. Найдите площадь трапеции.

2.4.28. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 6 и 13. Найдите площадь трапеции.

2.4.29. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 242.

2.4.30. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 648.

2.4.31. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 18 и 32.

2.4.32. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 11 и 44.

2.4.33. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $4:7$. Площадь меньшего многоугольника равна 16. Найдите площадь большего многоугольника.

2.4.34. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $3:5$. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.

2.4.35. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 16, а отношение соседних сторон равно $1:4$.

2.4.36. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 8, а отношение соседних сторон равно $1:2$.

2.4.37. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $\sqrt{\pi}$.

2.4.38. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $50\sqrt{\pi}$.

2.5. Стереометрия

2.5.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и A_1C_1. Ответ дайте в градусах.

2.5.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра AD, точка M — середина ребра AA_1. Найдите угол LMK. Ответ дайте в градусах.

2.5.3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 6, найдите угол между прямыми DE и F_1A_1. Ответ дайте в градусах.

2.5.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 6$, $AD = 18$, $AA_1 = 8$. Найдите синус угла между прямыми C_1D и AB.

2.5.5. Найдите расстояние между вершинами B и D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 7$.

2.5.6. Найдите расстояние между вершинами A и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 5$.

2.5.7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $D_1C_1 = 1$, $BB_1 = 2$, $B_1C_1 = 2$. Найдите длину диагонали C_1A.

2.5.8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CD = 4$, $B_1C_1 = 12$, $DD_1 = 3$. Найдите длину диагонали DB_1.

2.5.9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1 = \sqrt{14}$, $BB_1 = 1$, $A_1D_1 = 3$. Найдите длину ребра DC.

2.5.10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 3\sqrt{2}$, $C_1D_1 = 4$, $BC = 1$. Найдите длину ребра DD_1.

2.5.11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 7. Найдите расстояние между точками C и F.

2.5.12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 4. Найдите расстояние между точками E и A_1.

2.5.13. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SC = 25$, $BD = 14$. Найдите длину отрезка SO.

2.5.14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 30$, $SA = 34$. Найдите длину отрезка AC.

2.5.15. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 10, а сторона основания равна $8\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.

2.5.16. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 13, а сторона основания равна 5. Найдите высоту пирамиды.

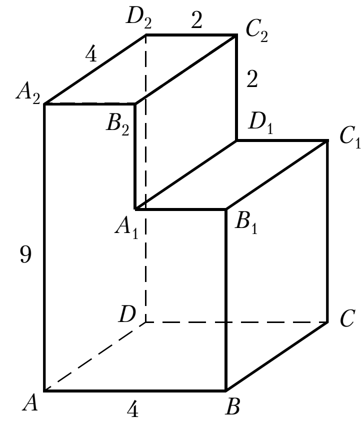
2.5.17. Высота конуса равна 5, а диаметр основания — 24. Найдите образующую конуса.

2.5.18. Высота конуса равна 16, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.

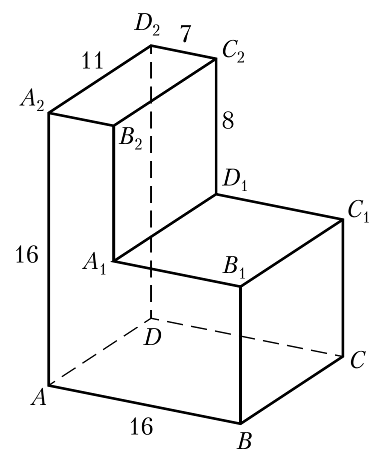
2.5.19. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $78\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

2.5.20. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $55\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

2.5.21. Найдите расстояние между вершинами D_2 и B_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



2.5.22. Найдите расстояние между вершинами D и B_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



2.5.23. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $CD = 2$, ребро $BC = \sqrt{5}$, ребро $CC_1 = 2$. Точка K — середина ребра DD_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1, B_1 и K.

2.5.24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 16$, $AA_1 = 13$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D, D_1 и B.

2.5.25. Рёбра правильного тетраэдра равны 17. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.

2.5.26. Рёбра правильного тетраэдра равны 24. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.

2.5.27. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 25. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

2.5.28. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 32. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

2.5.29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 8, боковые рёбра равны 20. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

2.5.30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 11, боковые рёбра равны 1. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

2.5.31. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 17$, $AD = 15$, $AA_1 = 8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

2.5.32. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 20$, $AD = 16$, $AA_1 = 12$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

2.5.33. Площадь основания конуса равна 81π, высота — 2. Найдите площадь осевого сечения конуса.

2.5.34. Площадь основания конуса равна 49π, высота — 5. Найдите площадь осевого сечения конуса.

2.5.35. Высота конуса равна 8, а длина образующей — 17. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

2.5.36. Диаметр основания конуса равен 8, а длина образующей — 5. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

2.5.37. Рёбра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2 и 6. Найдите площадь его поверхности.

2.5.38. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 10 и 5. Диагональ параллелепипеда равна 15. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

2.5.39. Площадь поверхности куба равна 200. Найдите его диагональ.

2.5.40. Площадь поверхности куба равна 72. Найдите его диагональ.

2.5.41. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 3, а высота — 6.

2.5.42. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 5.

2.5.43. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 6 и 8. Площадь поверхности параллелепипеда равна 768. Найдите его диагональ.

2.5.44. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 12 и 16. Площадь поверхности параллелепипеда равна 3072. Найдите его диагональ.

2.5.45. Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его площадь поверхности увеличится на 192. Найдите ребро куба.

2.5.46. Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его площадь поверхности увеличится на 144. Найдите ребро куба.

2.5.47. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.

2.5.48. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 30, а площадь поверхности равна 2760.

2.5.49. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, высота призмы равна 6. Найдите площадь её поверхности.

2.5.50. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 9 и 12, и боковым ребром, равным 6.

2.5.51. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 12, боковые рёбра равны 10. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

2.5.52. Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 24, а высота равна 5.

2.5.53. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

2.5.54. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

2.5.55. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 8. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2.5.56. Длина окружности основания цилиндра равна 9, высота равна 11. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2.5.57. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 6. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2.5.58. Длина окружности основания конуса равна 7, образующая равна 26. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2.5.59. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 10. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.5.60. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 12. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.5.61. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $19\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2.5.62. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $41\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2.5.63. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

2.5.64. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 57. Найдите площадь поверхности шара.

2.5.65. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 3 раза?

2.5.66. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 11 раз?

2.5.67. Радиусы двух шаров равны 24 и 32. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

2.5.68. Радиусы двух шаров равны 24 и 45. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

2.5.69. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 6 и 36. Найдите ребро равновеликого ему куба.

2.5.70. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4 и 64. Найдите ребро равновеликого ему куба.

2.5.71. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 4, а боковые ребра равны $3\sqrt{3}$.

2.5.72. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 6, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

2.5.73. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3, боковое ребро равно 6. Найдите объём призмы.

2.5.74. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12, боковое ребро равно 10. Найдите объём призмы.

2.5.75. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 7. Найдите её объём.

2.5.76. Найдите объём пирамиды, высота которой равна 1, а основание — прямоугольник со сторонами 2 и 3.

2.5.77. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен $45°$. Найдите объём пирамиды.

2.5.78. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 12, а угол между боковой гранью и основанием равен $45°$. Найдите объём пирамиды.

2.5.79. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3, объём призмы равен 18. Найдите боковое ребро призмы.

2.5.80. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6, объём призмы равен 48. Найдите боковое ребро призмы.

2.5.81. Найдите объём пирамиды, высота которой равна 6, а основание — прямоугольник со сторонами 7 и 16.

2.5.82. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8, а высота равна $\sqrt{3}$.

2.5.83. Высота конуса равна 7, образующая равна 10. Найдите его объём, делённый на π.

2.5.84. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 21. Найдите объём треугольной пирамиды B_1ABC.

2.5.85. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 66. Найдите объём треугольной пирамиды $BA_1B_1C_1$.

2.5.86. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объём треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 21.

2.5.87. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.

2.5.88. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, D, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 9$, $AD = 10$, $AA_1 = 3$.

2.5.89. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, D, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 5$.

2.5.90. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, A_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $AD = 5$, $AA_1 = 4$.

2.5.91. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $AD = 9$, $AA_1 = 3$.

2.5.92. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 6.

2.5.93. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 15, а боковое ребро равно 7.

2.5.94. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 7, а боковое ребро равно 9.

2.5.95. От треугольной призмы, объём которой равен 9, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части.

2.5.96. Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 196. Точка E — середина ребра SB. Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.

2.5.97. От треугольной пирамиды, объём которой равен 84, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.

2.5.98. Объём треугольной пирамиды равен 10. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении $2:3$, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

2.5.99. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 4,5. Найдите объём параллелепипеда.

2.5.100. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 3,5. Найдите его объём.

2.5.101. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 5. Найдите его объём.

2.5.102. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 5. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

2.5.103. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 9. Боковые рёбра равны $\frac{10}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

2.5.104. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 84.

2.5.105. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 9.

2.5.106. Цилиндр описан около шара. Объём цилиндра равен 78. Найдите объём шара.

2.5.107. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 66. Найдите объём цилиндра.

2.5.108. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 24. Найдите объём конуса.

2.5.109. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 60. Найдите объём шара.

2.5.110. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

2.5.111. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1200 см^3 воды и полностью в неё погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 28 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

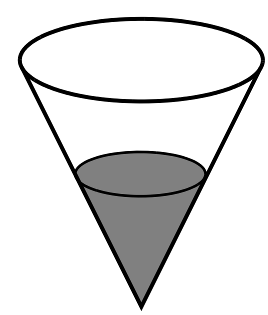
2.5.112. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 20 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

2.5.113. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

2.5.114. Объём первого цилиндра равен 72 см^3. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания — в 4 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

2.5.115. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.

2.5.116. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 45 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



2.5.117. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 10 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

2.5.118. Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в четыре раза?

2.5.119. Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в пять раза?

3. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Геометрический и физический смысл производной

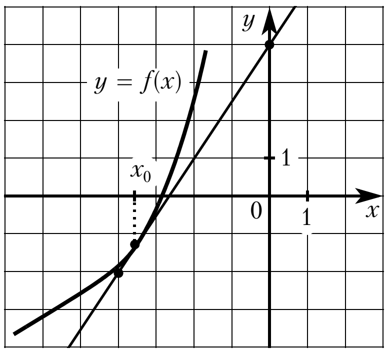
3.1.1. Прямая $y = 8x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

3.1.2. Прямая $y = 7x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 4x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

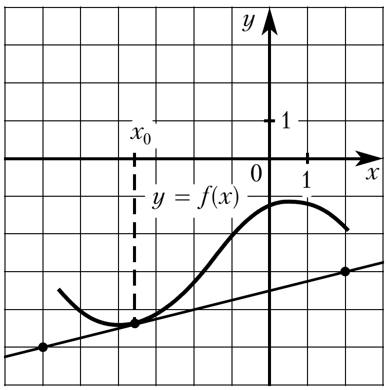
3.1.3. Прямая $y = 6x - 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 + 6x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

3.1.4. Прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

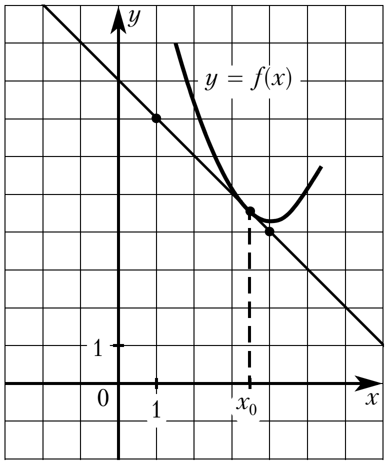
3.1.5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



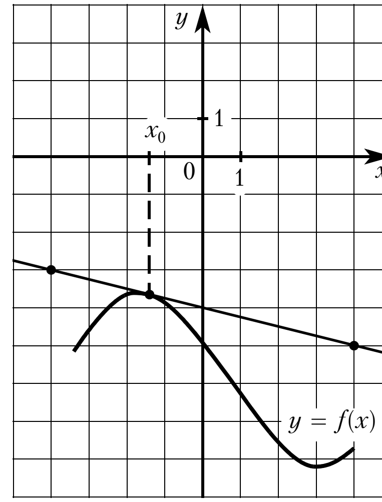
3.1.6. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



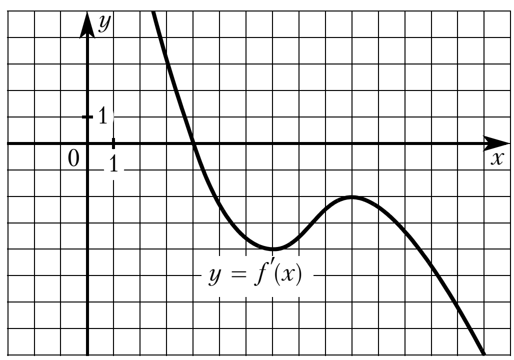
3.1.7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



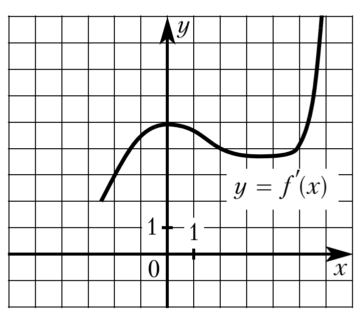
3.1.8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



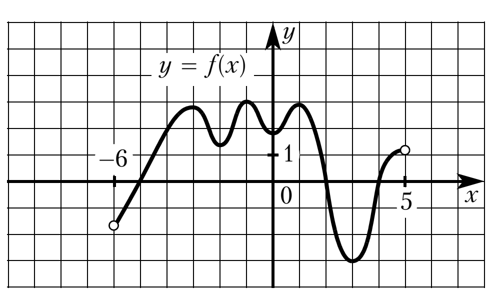
3.1.9. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



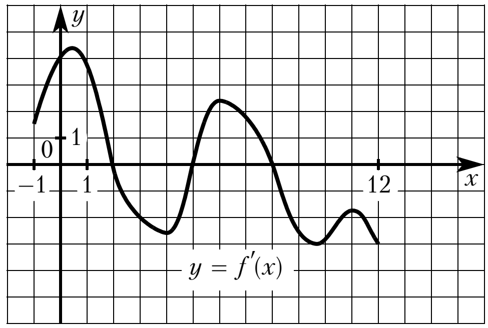
3.1.10. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.



3.1.11. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -8$.



3.1.12. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 15$ или совпадает с ней.



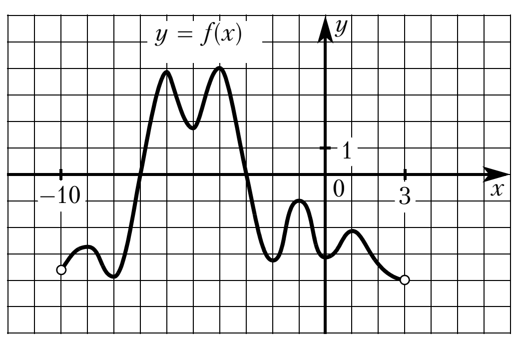
3.1.13. Прямая $y = -5x + 7$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 - 29x + 19$. Найдите a.

3.1.14. Прямая $y = -7x - 9$ является касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 + bx$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

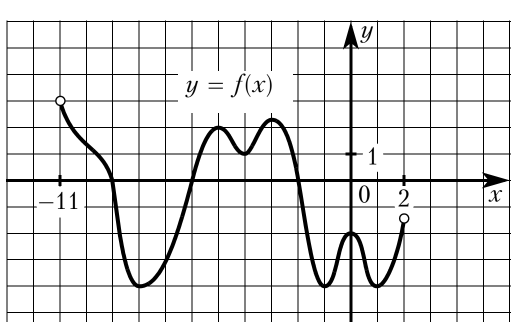
3.1.15. Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 9x^2 + bx + 1$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

3.1.16. Прямая $y = 3x - 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 10x^2 + 23x + c$. Найдите c.

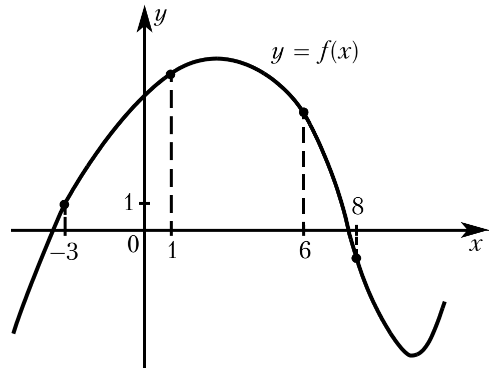
3.1.17. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10;\ 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.



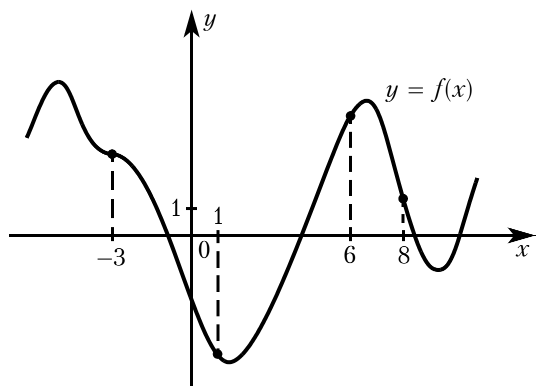
3.1.18. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11;\ 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.



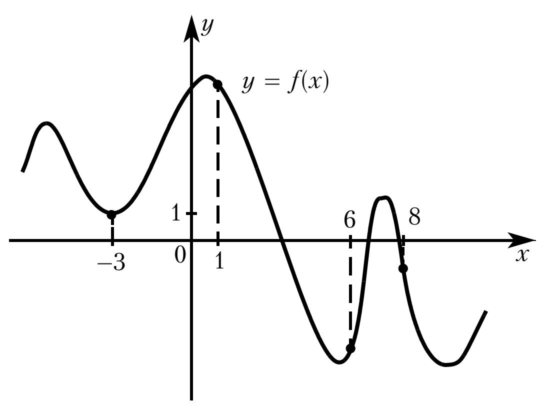
3.1.19. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



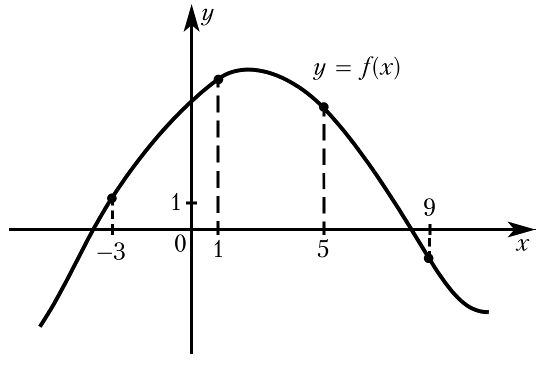
3.1.20. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



3.1.21. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



3.1.22. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 5, 9. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



3.1.23. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 8t - 21$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

3.1.24. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - 4$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 6 м/с?

3.1.25. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 + 2t^2 - 5t - 18$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

3.1.26. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 8$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 15 м/с?

3.1.27. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^4 + 6t^3 - 4t^2 - 8t + 3$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 1$ с.

3.2. Техника дифференцирования

3.2.1. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x - 1$ в точке $x_0 = -\sqrt{17}$.

3.2.2. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x}{4} + 8$ в точке $x_0 = 13$.

3.2.3. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 + 3$ в точке $x_0 = 4$.

3.2.4. Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^2 - 5$ в точке $x_0 = 4$.

3.2.5. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^2}{4} - 5$ в точке $x_0 = -16$.

3.2.6. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^2 + 2x$ в точке $x_0 = -3$.

3.2.7. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 + x - 1$ в точке $x_0 = -2$.

3.2.8. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 17}{5}$ в точке $x_0 = 1$.

3.2.9. Найдите значение производной функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

3.2.10. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^3 + 18$ в точке $x_0 = \sqrt{5}$.

3.2.11. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3}{5} + 5$ в точке $x_0 = 3$.

3.2.12. Найдите значение производной функции $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x - 14$ в точке $x_0 = 7$.

3.2.13. Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^4 - 2x + 117$ в точке $x_0 = -2$.

3.2.14. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^4}{2} + 3x^3 + x + 11$ в точке $x_0 = -2$.

3.2.15. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^5}{3} + x^2 + \frac{x}{3} - 1{,}5$ в точке $x_0 = 2$.

3.2.16. Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.

3.2.17. Найдите значение производной функции $f(x) = 6\sqrt{x} + 2x - 4$ в точке $x_0 = 9$.

3.2.18. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{6} - 5x^2 + \frac{x}{6} + 14$ в точке $x_0 = 1$.

3.2.19. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = -2$.

3.2.20. Найдите значение производной функции $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x}{8} + 1{,}4$ в точке $x_0 = -4$.

3.2.21. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{9}{2x} + 3x - \frac{3}{2}$ в точке $x_0 = 3$.

3.2.22. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{x} - 74{,}5$ в точке $x_0 = 2$.

3.2.23. Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{27}x^2 + 10{,}5x - 2$ в точке $x_0 = 2{,}25$.

3.2.24. Найдите значение производной функции $f(x) = (x-2)^2 + 2$ в точке $x_0 = 3{,}5$.

3.2.25. Найдите значение производной функции $f(x) = (3x+1)^2 - 3$ в точке $x_0 = \frac{2}{3}$.

3.2.26. Найдите значение производной функции $f(x) = (x-1)^3 + 5$ в точке $x_0 = -2$.

3.2.27. Найдите значение производной функции $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3 + 12x$ в точке $x_0 = -3$.

3.2.28. Найдите значение производной функции $f(x) = (2x+5)(-3x+1) + 4$ в точке $x_0 = 2$.

3.2.29. Найдите значение производной функции $f(x) = (x^2-3)(2x+1) - 144$ в точке $x_0 = -1$.

3.2.30. Найдите значение производной функции $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ в точке $x_0 = 9$.

3.2.31. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}(x-3) - 14{,}5$ в точке $x_0 = 1$.

3.2.32. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}(2x^2 + 4x - 1) + 2{,}55$ в точке $x_0 = 2$.

3.2.33. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ в точке $x_0 = -2{,}5$.

3.2.34. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+2}$ в точке $x_0 = -1{,}5$.

3.2.35. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-1}$ в точке $x_0 = -2{,}5$.

3.2.36. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$ в точке $x_0 = -7$.

3.2.37. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{2x^2-18}{x-3}$ в точке $x_0 = -13$.

3.2.38. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 3$.

3.2.39. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 9}{x + 2}$ в точке $x_0 = -2{,}5$.

3.2.40. Найдите значение производной функции $f(x) = 9 \cdot \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 0{,}25$.

3.2.41. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$ в точке $x_0 = 0{,}25$.

3.2.42. Найдите значение производной функции $f(x) = \sin x + 1$ в точке $x_0 = 0$.

3.2.43. Найдите значение производной функции $f(x) = \cos x - 2x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

3.2.44. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{tg} x + \pi$ в точке $x_0 = \dfrac{3\pi}{4}$.

3.2.45. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{ctg} x + 3x + 8$ в точке $x_0 = -\dfrac{\pi}{6}$.

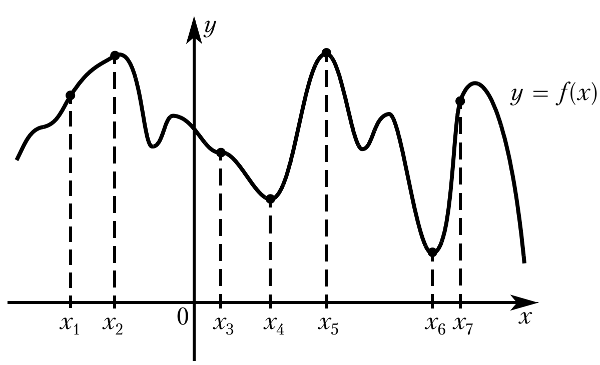
3.2.46. Найдите значение производной функции $f(x) = \sin 3x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

3.2.47. Найдите значение производной функции $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 1$ в точке $x_0 = \pi$.

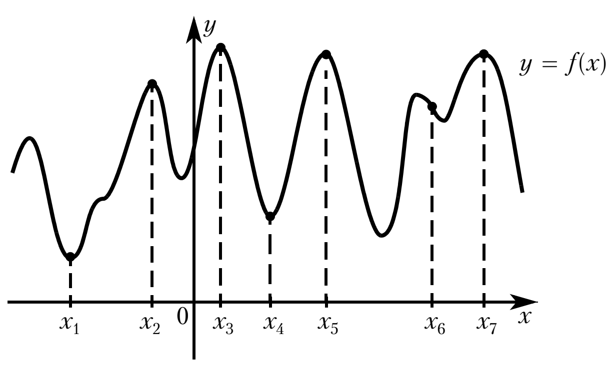
3.2.48. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2} + 5$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

3.3. Исследование функций

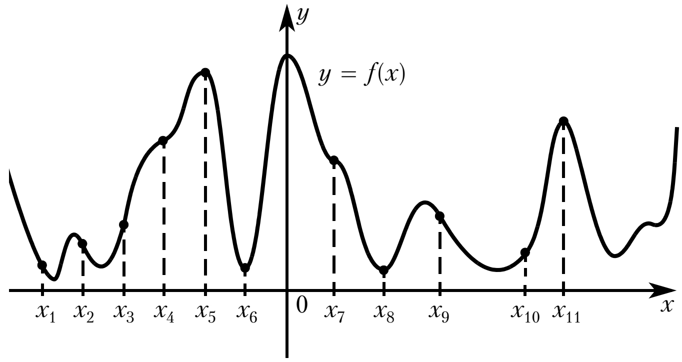
3.3.1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



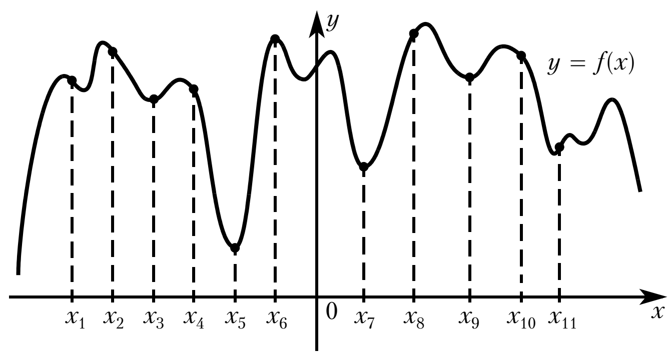
3.3.2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



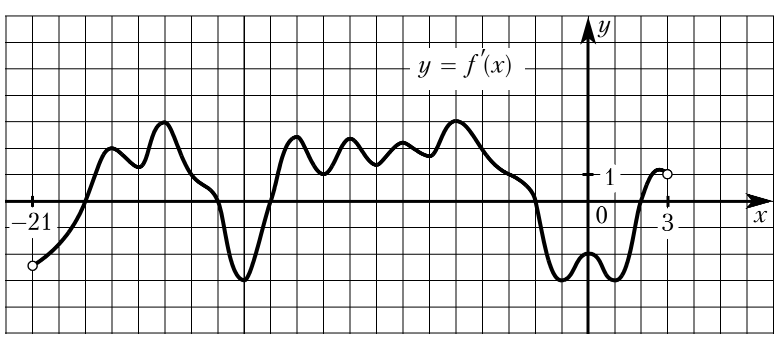
3.3.3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



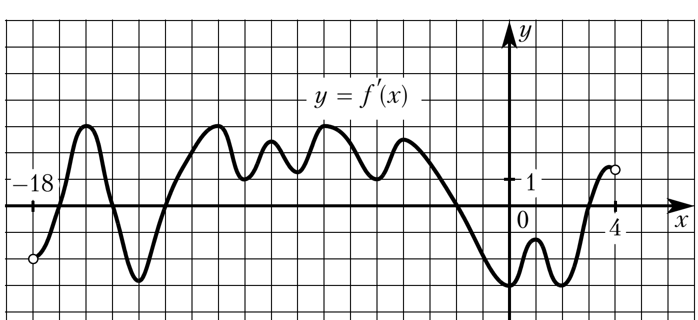
3.3.4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



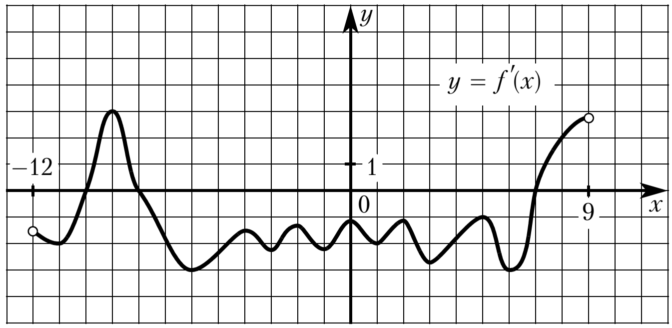
3.3.5. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-21; 3)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-20; -1]$.



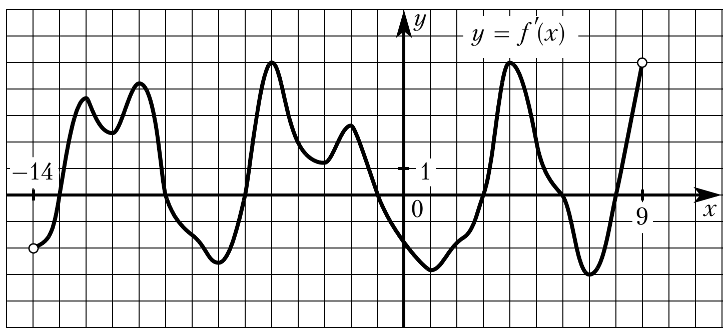
3.3.6. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-18; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16; 2]$.



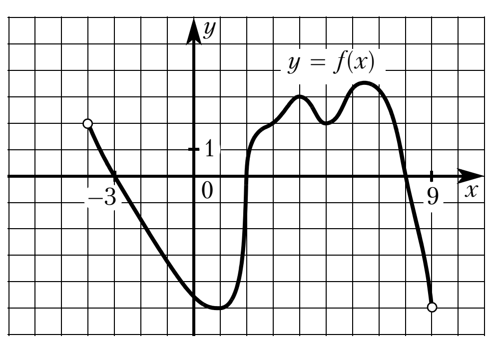
3.3.7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 8]$.



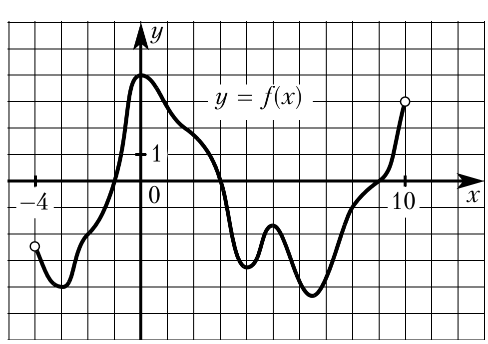
3.3.8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 7]$.



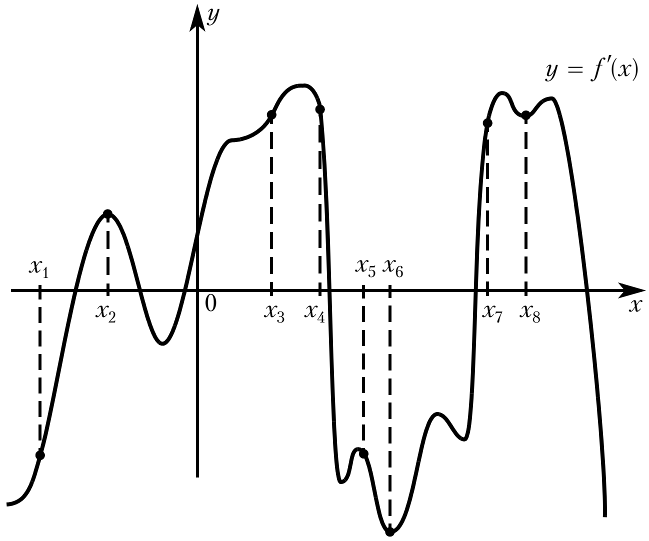
3.3.9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 9)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ положительна.



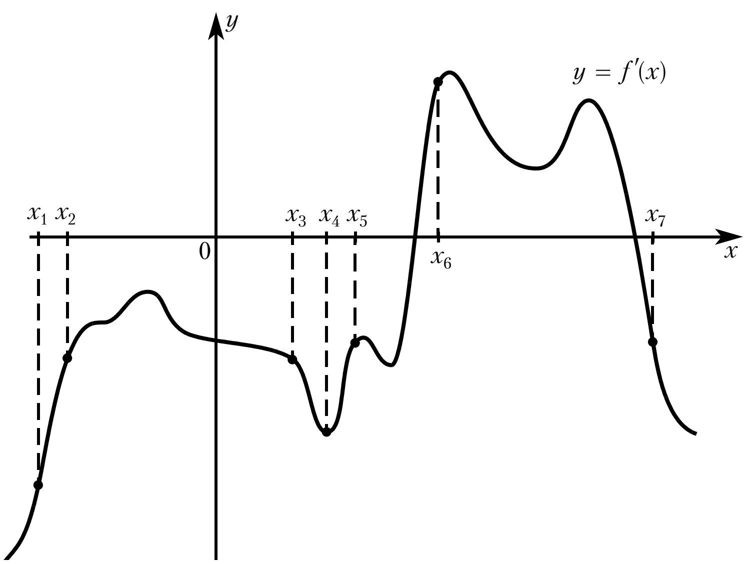
3.3.10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



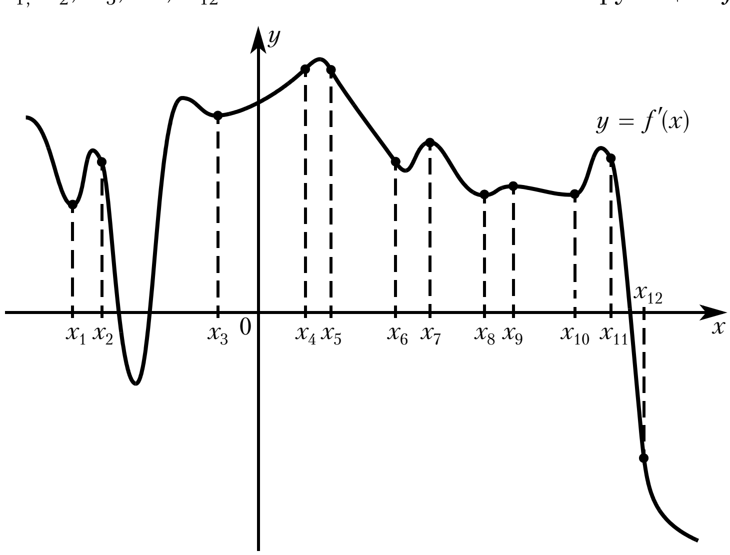
3.3.11. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ... , x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



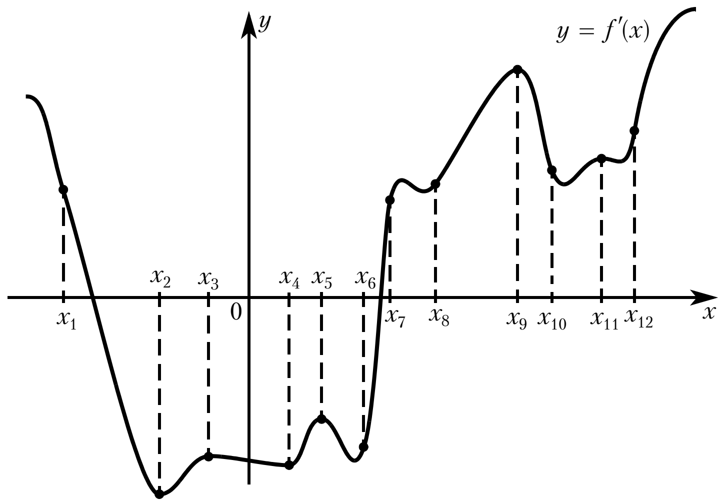
3.3.12. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ... , x_7. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



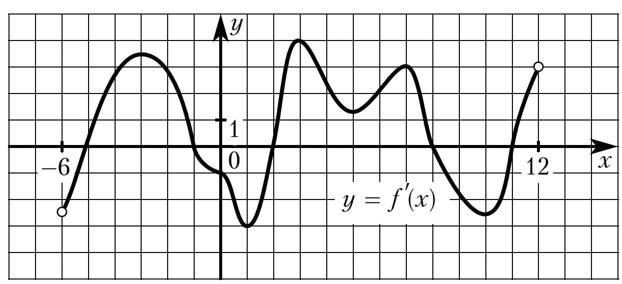
3.3.13. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ... , x_{12}. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



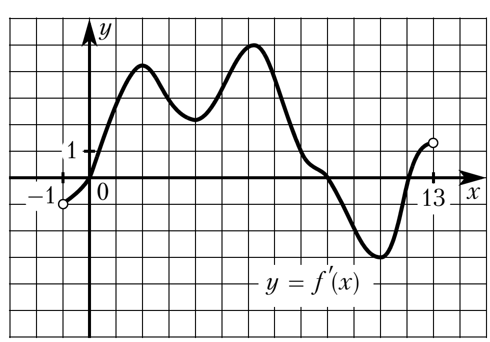
3.3.14. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{12}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



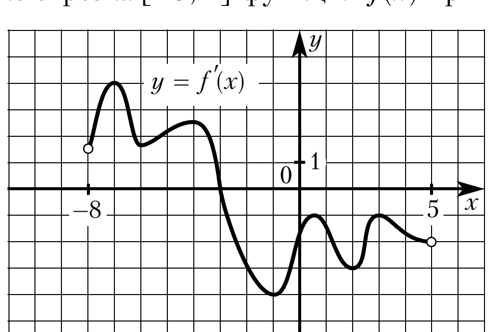
3.3.15. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



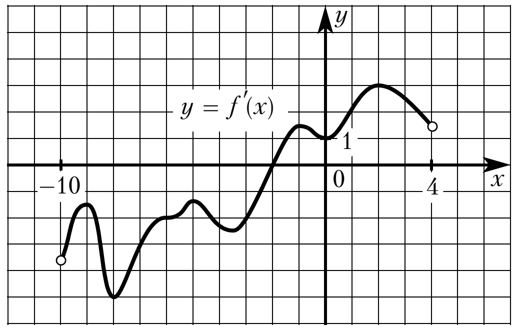
3.3.16. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 13)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



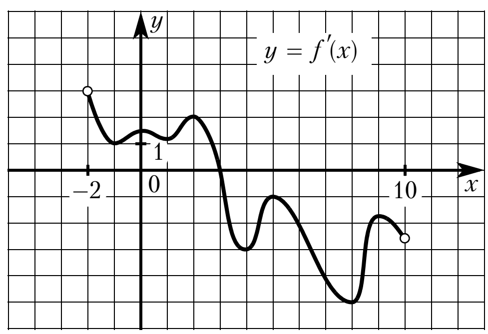
3.3.17. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 5)$. В какой точке отрезка $[-3;\ 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



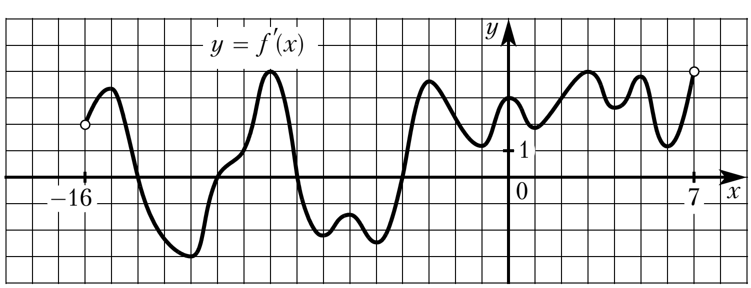
3.3.18. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 4)$. В какой точке отрезка $[-8; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



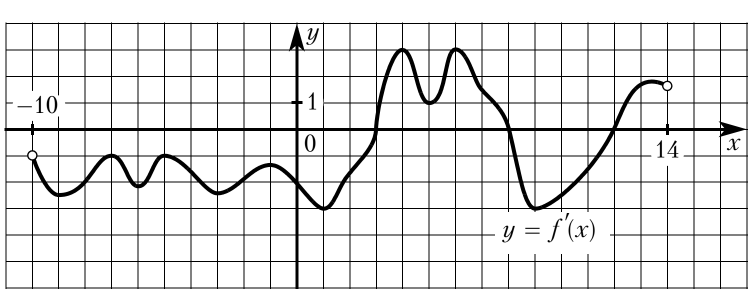
3.3.19. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-1; 9)$.



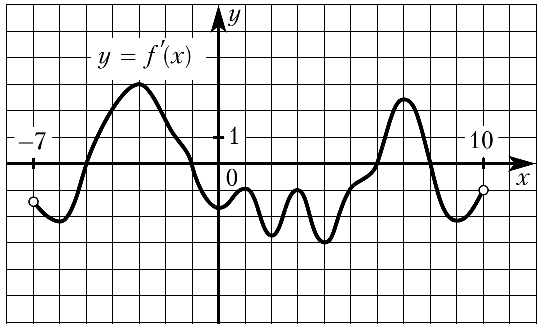
3.3.20. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-16; 7)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-15; 6]$.



3.3.21. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 11]$.



3.3.22. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 10)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 5]$.



3.3.23. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 75x + 23$.

3.3.24. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 192x + 14$.

3.3.25. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-7; -1]$.

3.3.26. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^5 - 20x^3 - 13$ на отрезке $[-6; 1]$.

3.3.27. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 36}{x}$.

3.3.28. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 484}{x}$.

3.3.29. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 900}$.

3.3.30. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 225}$.

3.3.31. Найдите точку максимума функции $y = 6 + 15x - 4x\sqrt{x}$.

3.3.32. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 24x + 14$.

3.3.33. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[7; 10]$.

3.3.34. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 12x + 3$ на отрезке $[0; 100]$.

3.3.35. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$.

3.3.36. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$.

3.3.37. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x + 19$.

3.3.38. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x + 15$.

3.3.39. Найдите точку минимума функции $y = 6^{x^2 - 8x + 28}$.

3.3.40. Найдите точку минимума функции $y = 7^{x^2 - 30x + 235}$.

3.3.41. Найдите точку максимума функции $y = (24 - x)e^{x+24}$.

3.3.42. Найдите точку максимума функции $y = (15 - x)e^{x+15}$.

3.3.43. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 20x - 20)e^{2-x}$ на отрезке $[-2; 3]$.

3.3.44. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 21x - 21)e^{2-x}$ на отрезке $[-1; 4]$.

3.3.45. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 19x + 19)\,e^{x+20}$.

3.3.46. Найдите точку минимума функции $y = (2x^2 - 26x + 26)\,e^{x-17}$.

3.3.47. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

3.3.48. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 9e^x - 2$ на отрезке $[1; 3]$.

3.3.49. Найдите наибольшее значение функции $y = 28\sqrt{2}\sin x - 28x + 7\pi + 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.3.50. Найдите наименьшее значение функции $y = -28 - 3{,}5\pi + 14x - 14\sqrt{2}\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.3.51. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\sqrt{2}\cos x + 6x - \frac{3\pi}{2} + 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.3.52. Найдите наименьшее значение функции $y = -22 + \frac{9\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}x - 27\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.3.53. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 11) - 5x + 2$.

3.3.54. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 10) - 5x + 7$.

3.3.55. Найдите точку минимума функции $y = \log_2(x^2 - 14x + 72) - 8$.

3.3.56. Найдите точку минимума функции $y = \log_3(x^2 - 24x + 148) + 1$.

3.3.57. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5\ln(x + 3) + 4$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

3.3.58. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - 6\ln(x + 3) + 4$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

3.3.59. Найдите точку максимума функции $y = 1{,}5x^2 - 39x + 108\ln x - 8$.

3.3.60. Найдите точку минимума функции $y = 0{,}5x^2 - 11x + 30\ln x + 8$.

3.3.61. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 13x + 11\ln x + 12$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.

3.3.62. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 7$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

3.4. Первообразная

3.4.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 11x + 5$ в точке 0 равно 6. Найдите $F(-3)$.

3.4.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -5x + 8$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(4)$.

3.4.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ в точке 0 равно 4. Найдите $F(4)$.

3.4.4. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 2x^2 + 9x - 4$ в точке 0 равно 7. Найдите $F(-3)$.

3.4.5. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -6x^2 - 2x + 5$ в точке 0 равно 9. Найдите $F(5)$.

3.4.6. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ в точке 0 равно -5. Найдите $F(2)$.

3.4.7. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -x^3 + 10x - 7$ в точке 0 равно 12. Найдите $F(-2)$.

3.4.8. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \frac{x^3}{5} - 3x^2 + 7x - 8$ в точке 0 равно -21. Найдите $F(5)$.

3.4.9. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 9x^8$ в точке 0 равно -13. Найдите $F(-1)$.

3.4.10. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -18x^4$ в точке 0 равно 17. Найдите $F(2)$.

3.4.11. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -5\sin x$ в точке 0 равно 17. Найдите $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

3.4.12. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 11\sin x$ в точке равно -9. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

3.4.13. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 21\sin x$ в точке равно 6. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

3.4.14. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 8\cos x$ в точке $-\pi$ равно 13. Найдите $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

3.4.15. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 10\cos x$ в точке $\frac{\pi}{2}$ равно -4. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

3.4.16. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 6e^x$ в точке 0 равно -18. Найдите $F(\ln 3)$.

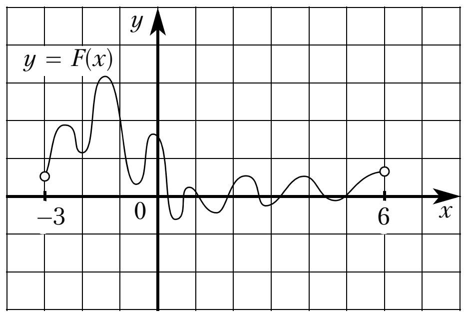
3.4.17. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -8e^x$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(\ln 7)$.

3.4.18. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 12e^x$ в точке 0 равно 7. Найдите $F(-\ln 5)$.

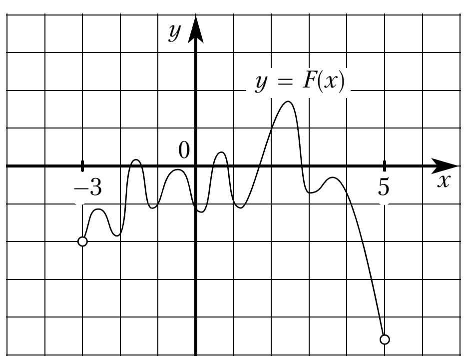
3.4.19. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \dfrac{7}{x}$ в точке 1 равно -11. Найдите $F(e^2)$.

3.4.20. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -\dfrac{10}{x}$ в точке равно 8. Найдите $F(e^4)$.

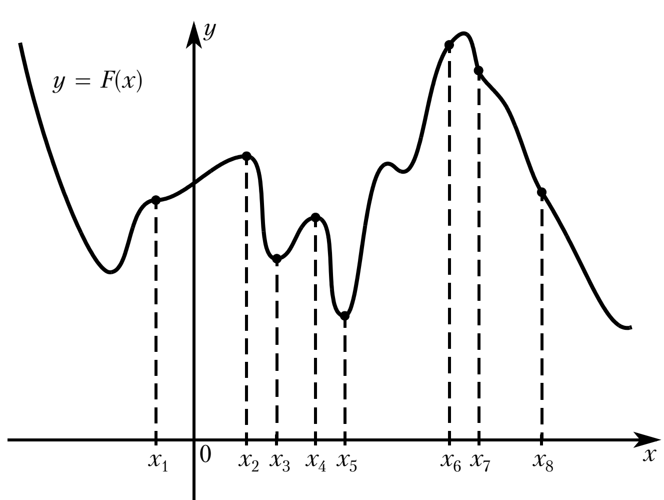
3.4.21. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



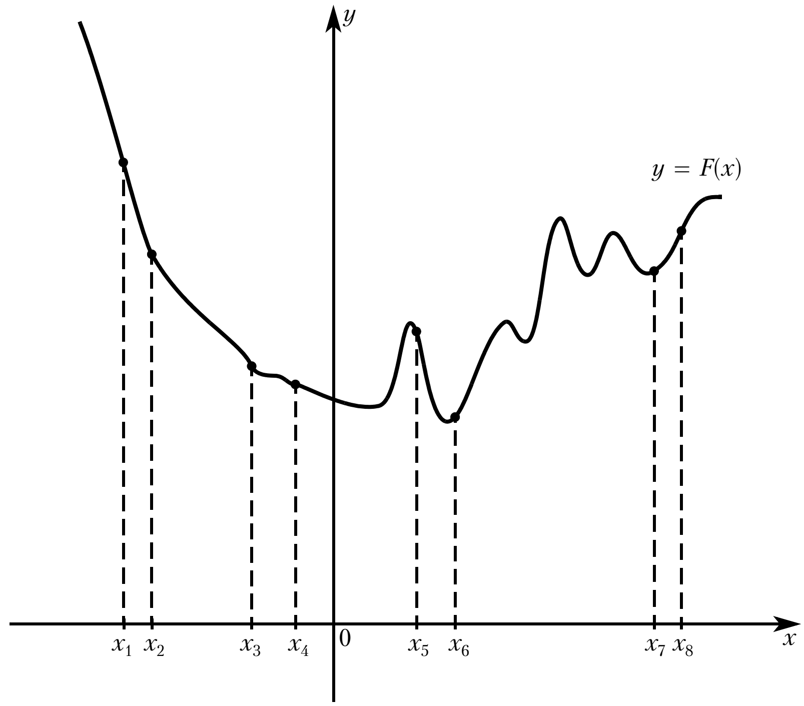
3.4.22. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



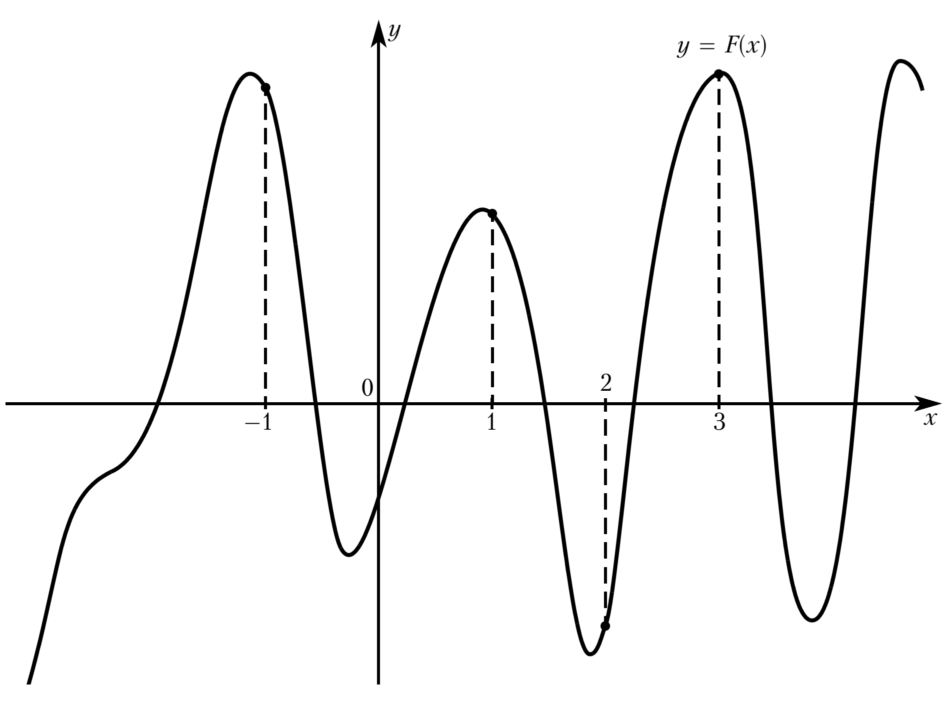
3.4.23. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



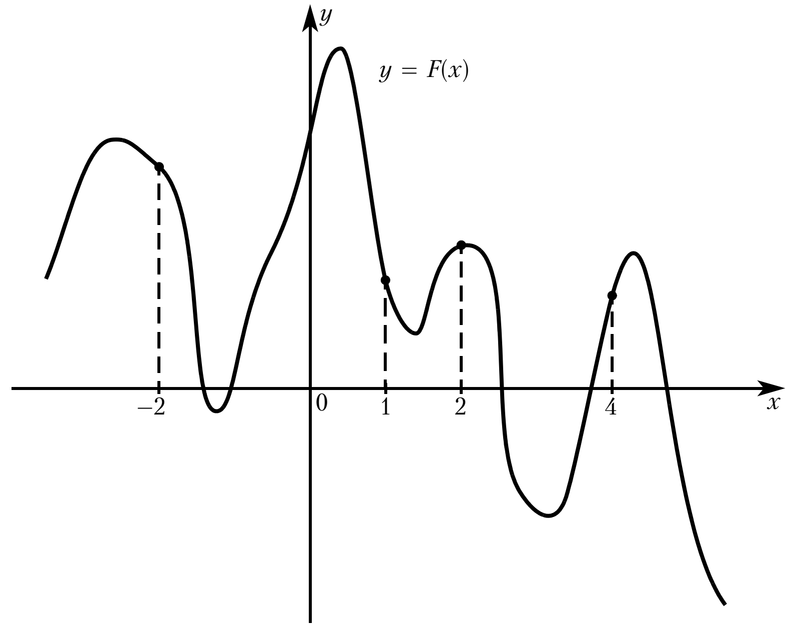
3.4.24. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



3.4.25. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 3. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наименьшее? В ответе укажите эту точку.



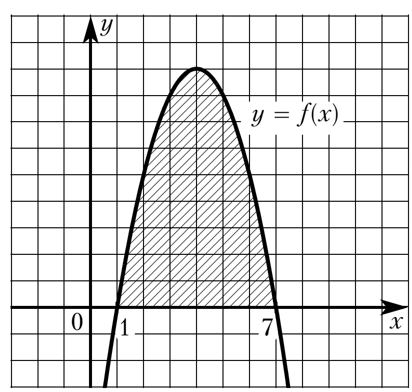
3.4.26. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки -2, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наибольшее? В ответе укажите эту точку.



3.4.27. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 7x + 11.$$

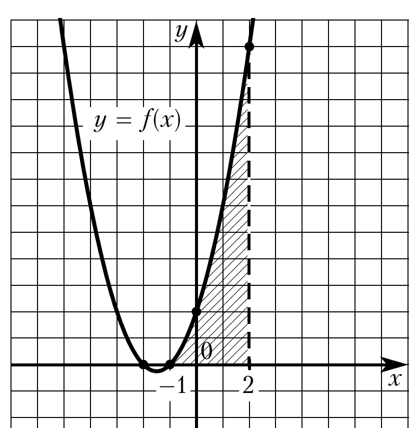
Найдите площадь заштрихованной фигуры.



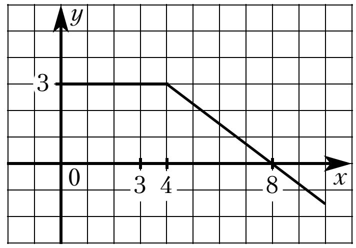
3.4.28. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - 14.$$

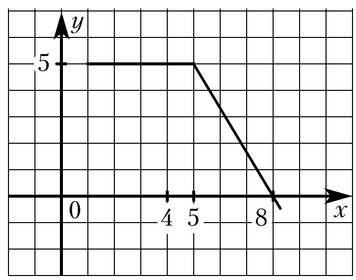
Найдите площадь заштрихованной фигуры.



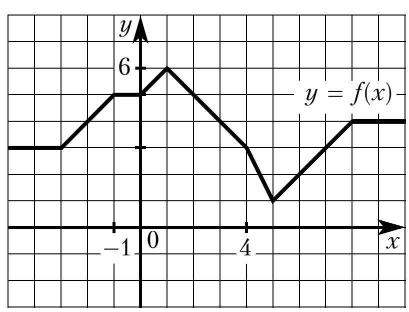
3.4.29. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



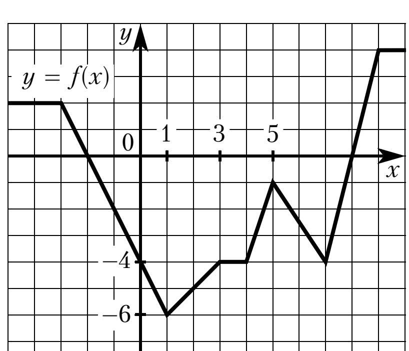
3.4.30. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



3.4.31. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой $F(x)$. Найдите разность $F(4) - F(-1)$.



3.4.32. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой $F(x)$. Найдите разность $F(5) - F(1)$.



4. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

4.1. Уравнения

4.1.1. а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 12\cos x + 5 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\sin x \geqslant 0$.

4.1.2. а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\cos x \leqslant 0$.

4.1.3. а) Решите уравнение $\sin 4x - \sin x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

4.1.4. а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos x = 0$.
б) Найдите количество корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $\left[3\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

4.1.5. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$.

4.1.6. а) Решите уравнение $15\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

4.1.7. а) Решите уравнение $9^{\sin x} = 3$.
б) Найдите наибольший отрицательный корень этого уравнения.

4.1.8. а) Решите уравнение $2\cdot 16^{\cos x} + 4^{\cos x} - 1 = 0$.
б) Найдите наименьший положительный корень этого уравнения.

4.1.9. а) Решите уравнение $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.
б) Найдите наибольший отрицательный корень этого уравнения.

4.1.10. а) Решите уравнение $\sqrt{\cos 2x - \sin 5x} = -2\cos x$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 4\pi]$.

4.1.11. а) Решите уравнение $4\sin^3 x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4.1.12. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4.1.13. а) Решите уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

4.1.14. а) Решите уравнение $\log_7(2\cos^2 x + 3\cos x - 1) = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

4.1.15. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4.1.16. а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 5 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

4.1.17. а) Решите уравнение $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4.1.18. а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

4.1.19. а) Решите уравнение $\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{21\pi}{2}; -\frac{19\pi}{2}\right]$.

4.1.20. а) Решите уравнение $\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{19\pi}{2}; -\frac{17\pi}{2}\right]$.

4.1.21. а) Решите уравнение $2\cos^2(\pi - x) - \sin(\pi + 2x) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{13\pi}{2}; 8\pi\right]$.

4.1.22. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\pi - 2x\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$.

4.1.23. а) Решите уравнение $(-2\cos^2 x + \sin x + 1)\cdot\log_{0,5}(-0{,}8\cos x) = 0$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-6\pi; -4\pi]$.

4.1.24. а) Решите уравнение $(-6\sin^2 x - 11\cos x + 10)\cdot\log_7(0{,}3\sin x) = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

4.1.25. а) Решите уравнение $27^x - 6\cdot 9^x - 3^{x+2} + 54 = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 5; \log_3 8]$.

4.1.26. а) Решите уравнение $16^x - 7\cdot 8^x - 2^{x+3} + 56 = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; \log_2 10]$.

4.2. Неравенства и системы неравенств

4.2.1. Решите неравенство $\log_5^2(25 - x^2) - 3\log_5(25 - x^2) + 2 \geqslant 0$.

4.2.2. Решите неравенство $\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leqslant 1 + \frac{1}{3^x - 2}$.

4.2.3. Решите неравенство $\frac{2}{7^x - 7} \geqslant \frac{5}{7^x - 4}$.

4.2.4. Решите неравенство $\frac{1}{5^x + 31} \leqslant \frac{4}{5^{x+1} - 1}$.

4.2.5. Решите неравенство $\frac{13 - 5\cdot 3^x}{9^x - 12\cdot 3^x + 27} \geqslant 0{,}5$.

4.2.6. Решите неравенство $\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5\cdot 2^x + 6} \leqslant 0$.

4.2.7. Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geqslant 0.$

4.2.8. Решите неравенство $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x.$

4.2.9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}+\log_5(x+3)\geqslant 0,\\ 9^{x+1}-28\cdot 3^x+3\geqslant 0.\end{cases}$$

4.2.10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{3\cdot 64^x+2^x-70}{64^x-2}\geqslant 3,\\ \log_3^2(x+3)-3\log_3(x+3)+2\leqslant 0.\end{cases}$$

4.2.11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}25^x-30\cdot 5^x+125\geqslant 0,\\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)\leqslant 0.\end{cases}$$

4.2.12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}x^2+2^x+36\leqslant 78\cdot\log_3(x+3),\\ 12x+2^x\geqslant 78\cdot\log_3(x+3).\end{cases}$$

4.2.13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}8\cdot 4^x-65\cdot 2^x+8\leqslant 0,\\ \log_{|x|}^2(x^4)+\log_3(x^2)\leqslant 16.\end{cases}$$

4.2.14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{320-4^{-x}}{64-2^{-x}}\geqslant 5,\\ \log_{0,25x^2}\left(\dfrac{x+6}{4}\right)\leqslant 1.\end{cases}$$

4.2.15. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}5^{x+2}+2\cdot 5^{-x}\leqslant 51,\\ \log_{2x}0{,}25\geqslant\log_2 32x-1.\end{cases}$$

4.2.16. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}3\cdot 9^{-x}-28\cdot 3^{-x}+9\leqslant 0,\\ \log_{x^2}(x+1)^2\leqslant 1.\end{cases}$$

4.2.17. Решите неравенство $x\log_{625}(x+2)\geqslant\log_5(x^2+4x+4).$

4.2.18. Решите неравенство $x\log_{216}(x+3)\geqslant\log_6(x^2+6x+9).$

4.2.19. Решите неравенство $x^2\log_{125}(-x-2)\geqslant\log_5(x^2+4x+4).$

4.2.20. Решите неравенство $x^2\log_{64}(-x-3)\geqslant\log_2(x^2+6x+9).$

4.2.21. Решите неравенство $\dfrac{3^x+7}{3^x-7}+\dfrac{3^x-7}{3^x+7}\leqslant\dfrac{4\cdot 3^{x+2}-64}{9^x-49}.$

4.2.22. Решите неравенство $\dfrac{2^x+8}{2^x-8}+\dfrac{2^x-8}{2^x+8}\leqslant\dfrac{5\cdot2^{x+3}-72}{4^x-64}$.

4.2.23. Решите неравенство $\sqrt{1-\log_2 x}\cdot\dfrac{(x-3)(x+5)}{x+1}\geqslant 0$.

4.2.24. Решите неравенство $\sqrt{2-\log_{\frac{1}{2}} x}\cdot\dfrac{(x-1)(x+7)}{x+2}\geqslant 0$.

4.3. Уравнения и неравенства с параметром

4.3.1. Найдите все значениях a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-15x-14+a^2-10a=0$ принимает наибольшее значение.

4.3.2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x-a}=x-3a$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

4.3.3. Найдите все значения a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases}(x-3a-4)^2+(y-a+2)^2=1,\\(x-4a-3)^2+(y+3)^2=9.\end{cases}$$

4.3.4. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2-a^2(a+1)x+a^5<0$ имеет решения и множество решений неравенства содержится в интервале $(-9;\,4)$.

4.3.5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $9^x-2(a-3)\cdot3^x+a^2-8a+7=0$ имеет единственный корень.

4.3.6. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-8x+7|$ больше 1.

4.3.7. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-6x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

4.3.8. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

4.3.9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x-3|=\dfrac{5}{x+2}$ на промежутке $[0;\,+\infty)$ имеет ровно два корня.

4.3.10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|2x^2-3x-2|=a-2x^2-8x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

4.3.11. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0,\\[2mm] x+y-a=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

4.3.12. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy-7y+4x+12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}}=0,\\[2mm] a=x+y\end{cases}$$

имеет единственное решение.

4.3.13. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

4.3.14. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

4.3.15. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

4.3.16. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

4.3.17. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

4.3.18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 1| + 2x - x^2 = |y^2 - 1| + 2y - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

4.3.19. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

4.3.20. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| - x^2 = |y^2 - 2y| - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

4.3.21. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a + y^2} = \sqrt{a + x^2}, \\ x^2 + y^2 = 6x - 8y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

4.3.22. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a - y^2} = \sqrt{a - x^2}, \\ x^2 + y^2 = -6x - 8y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

4.3.23. Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a + 3x \leqslant 12, \\ a + 4x \geqslant x^2, \\ a \leqslant x \end{cases}$$

является отрезок, длина которого равна 2.

4.3.24. Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a + x \leqslant 8, \\ a + 4x + 4 \geqslant x^2, \\ a \leqslant 3x + 6 \end{cases}$$

является отрезок, длина которого равна 6.

4.3.25. Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 a + \cos^8 \frac{a}{2} + 5^{x^4} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$$

имеет единственное решение.

4.3.26. Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^4 a + \cos^4 \frac{a}{2} + 4^{x^2} = \cos^2 \pi x$$

имеет единственное решение.

4.4. Планиметрия

4.4.1. а) Докажите, что в параллелограмме биссектрисы углов при одной стороне перпендикулярны.

б) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 3 : 7$. Найдите BC, если $AB = 10$.

4.4.2. В треугольнике ABC $AB = 12$, $BC = 5$, $CA = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 4 : 9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

4.4.3. Окружности S_1 и S_2 радиусов 4 и 2 соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB = 2$.

4.4.4. Точка O — центра окружности радиуса 3. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60°$.

а) Докажите, что $AK = \sqrt{3}$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

4.4.5. Дана окружность радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA = 120°$. Известно, что $OD = 3$.

а) Докажите, что расстояние от O до хорды AB равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC.

4.4.6. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60°$. На сторонах AB и BC как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами $120°$ при вершинах.

а) Докажите, что прямая, соединяющая вершины этих треугольников, проходит через точку B.

б) Найдите расстояние между этими вершинами.

4.4.7. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC = 10$. Проведены три окружности радиуса 6 с центрами A, B и C.

а) Докажите, что существует ровно шесть окружностей, касающихся всех трёх данных.

б) Найдите радиусы всех таких окружностей.

4.4.8. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 10$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершни треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что треугольники BKL и ABC подобны.

б) Найдите длину отрезка KL.

4.4.9. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника.

а) Докажите, что линия, соединяющая центры окружностей, параллельна одной из стороны треугольника.

б) Найдите радиусы окружностей.

4.4.10. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A.

а) Докажите, что треугольники ALM и AKN подобны.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

4.4.11. На прямой, содержащей биссектрису AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удалённая от вершины A на расстояние, равное $\sqrt{26}$. Известно, что $BC = 5$, $AC = 12$.

а) Докажите, что $AD = \dfrac{12\sqrt{26}}{5}$.

б) Найдите площадь треугольника BCE.

4.4.12. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Окружность пересекает основание AC в точке M и боковую сторону CB в точке N. а) Докажите, что $MN = \dfrac{1}{2}AC$. б) Найдите периметр треугольника MNC, если $AB = 8$, $AB = 10$.

4.4.13. Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 1 : 3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

4.4.14. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q — середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 75°$ и $BC = 1$.

4.4.15. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{1}{3}$.

4.4.16. Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN, если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

4.4.17. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

4.4.18. Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

4.4.19. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна $270°$. Известно, что $AD = 4BC$.

а) Докажите, что $AB = 2CD$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах параллельных сторон и диагоналей исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 10$.

4.4.20. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна $270°$. Известно, что $AD = 4BC$.

а) Докажите, что $CD = \frac{1}{2}AB$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах параллельных сторон и диагоналей исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 16$.

4.4.21. Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX = XY = 2$, а $AB = 4$.

4.4.22. Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX = XY = 4$, а $AB = 6$.

4.5. Стереометрия

4.5.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 5$, $AD = 12$, $CC_1 = 7$. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

4.5.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 15$, $AD = 8$, $CC_1 = 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

4.5.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 10$, а боковое ребро $AA_1 = \sqrt{69}$. Найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

4.5.4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 3\sqrt{2}$, а боковое ребро $SA = 5$. Найдите расстояние от точки A до прямой SC.

4.5.5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания $AB = \sqrt{6}$, а боковое ребро $AA_1 = 3\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки C до плоскости EFB_1.

4.5.6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $SA = \sqrt{73}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости SAC.

4.5.7. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 11$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 до прямой CD_1.

4.5.8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = \sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 11$. Найдите угол между прямыми SA и BC.

4.5.9. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 3$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

4.5.10. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 4\sqrt{3}$, а боковое ребро $SA = 5$. Найдите угол между прямой SC и плоскостью SAB.

4.5.11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 2\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 4$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCA_1.

4.5.12. В правильной треугольной $SABC$ пирамиде с основанием ABC известны рёбра: $AB = 5\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC.

4.5.13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M — точка пересечения медиан грани SBC.

4.5.14. В правильной треугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 2$, а боковое ребро $SA = \sqrt{3}$. Найдите угол между плоскостями SBC и SAD.

4.5.15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

4.5.16. Прямоугольник со сторонами, равными 3 и 4, перегнули по диагонали, причём полуплоскости полученных прямоугольных треугольников образовали двугранный угол, равный 60°. Найдите расстояние между вершинами прямоугольника, не лежащими на диагонали сгиба.

4.5.17. В основании прямой призмы лежит трапеция, острые углы которой равны 60°. Боковая сторона и меньшее основание трапеции равны соответственно 8 и 6. Через боковую сторону трапеции нижнего основания и вершину большего основания трапеции верхнего основания проведено сечение плоскостью, образующего с плоскостью нижнего основания угол в 30°. Найдите площадь сечения.

4.5.18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P = PB_1 = 2:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

4.5.19. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

4.5.20. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану основания CE в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

4.5.21. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

4.5.22. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

4.5.23. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

4.5.24. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

4.5.25. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 8$.

4.5.26. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые B_1D и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1D и AC, если известно, что $AB = 6$, $AA_1 = 12$.

4.6. Арифметика и алгебра

4.6.1. Число умножили на сумму его цифр и получили 10530. Найдите это число.

4.6.2. Произведение числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 5848. Найдите эти числа.

4.6.3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

4.6.4. Решите уравнение в натуральных числах:

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

4.6.5. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

4.6.6. Каждое из чисел 2, 3, ... , 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ... , 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

4.6.7. Перед каждым из чисел 14, 15, ... , 20 и 6, 7, ... , 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

4.6.8. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

4.6.9. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

4.6.10. Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

4.6.11. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

4.6.12. На доске написали несколько необязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

4.6.13. На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

4.6.14. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

4.6.15. Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

4.6.16. а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

4.6.17. Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

4.6.18. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

4.6.19. Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и в секции, и в кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\frac{3}{13}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\frac{2}{7}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 7 девочек и 11 мальчиков?

б) Может ли в классе быть всего 9 девочек и 9 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в классе?

4.6.20. Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и в секции, и в кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\frac{2}{9}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\frac{5}{16}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 8 девочек и 12 мальчиков?

б) Может ли в классе быть всего 10 девочек и 10 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в параллели (параллель состоит из нескольких классов)?

4.6.21. а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 14 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 210 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 70 раз больше суммы цифр этого числа.

4.6.22. а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 20 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 294 раза больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 84 раза больше суммы цифр этого числа.

4.7. Экономические задачи

4.7.1. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять $5\,000\,000$ рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

4.7.2. Зависимость объёма Q (в шт) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 1500 - P,\ 1000 \leqslant P \leqslant 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20 %, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

4.7.3. Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

4.7.4. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

4.7.5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

4.7.6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

4.7.7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 300 000 рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На какое минимально количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350 000 рублей?

4.7.8. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

4.7.9. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

4.7.10. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

4.7.11. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

4.7.12. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

4.7.13. По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 30 млн рублей в первый и второй годы, а также по 20 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 180 млн, а к концу проекта — больше 320 млн рублей.

4.7.14. По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 130 млн, а к концу проекта — больше 200 млн рублей.

4.7.15. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

4.7.16. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

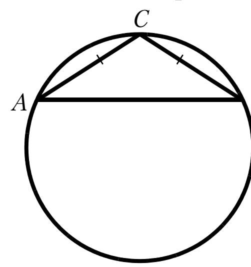
ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА
Профильный уровень

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 1

Часть 1

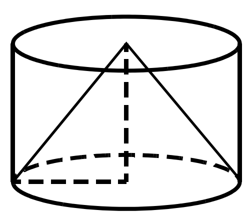
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 33, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

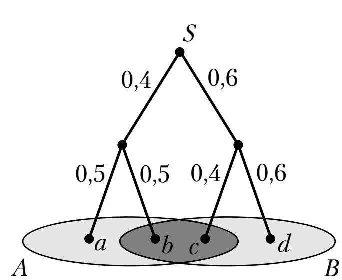


Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8. Результат округлите до сотых.

Ответ: ____________________

4 На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B.



Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{6}{4x-54}}=\dfrac{1}{7}$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{10^{9}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y=-5x+8$ является касательной к графику функции $y=28x^2+bx+15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ: ____________________

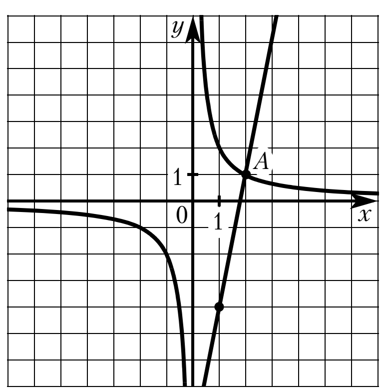
8 Два тела, массой $m=2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v=10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 50 джоулей.

Ответ: ____________________

9 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 75 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 275 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 255 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 50 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображены графики функций $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ: ____________________

11 Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{4}{\sin x} + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

13 В n-угольной пирамиде $SA_1A_2...A_n$ с вершиной S тангенс двугранного угла при каждом ребре основания равен 0,75.

а) Докажите, что площадь полной поверхности пирамиды относится к площади основания как $9:4$.

б) Найдите объём пирамиды, если в основании лежит ромб, диагонали которого относятся как $2:3$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 20.

14 Решите неравенство $\left|9x^2 - 9|x| + 2\right| \geqslant 3\left|3x^2 - 4|x| + 1\right|$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 5 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 4000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 Основания AB и CD прямоугольной трапеции $ABCD$ равны соответственно 11 и 7, а меньшая боковая сторона BC равна 4. На стороне AD отмечена точка P так, что $AP:PD = 1:3$. Через точку P проведена прямая, перпендикулярная стороне AD и пересекающая прямые CD и BC соответственно в точках K и Q.

а) Докажите, что площадь треугольника DPK относится к площади трапеции $ABCD$ как $1:4$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CDPQ$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2} + \sqrt{xa} = \frac{x^2}{4} + a^2 + xa, \\ xa\left(\frac{x^2}{4} + a^2\right) - xa - \frac{x^2}{4} - a^2 + 1 \geqslant 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

18 Известно, что квадратное уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все значения, которые может принимать a, если $b = 65$.

б) Найдите все значения, которые может принимать a, если $a + b = 52$.

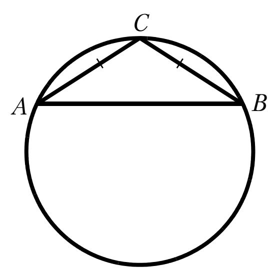
в) Найдите все натуральные числа, которые могут быть корнями уравнения, если $b^2 - a^2 = 380$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 2

Часть 1

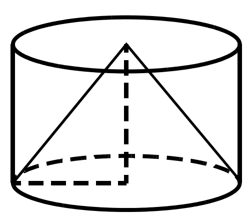
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 7, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $5\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

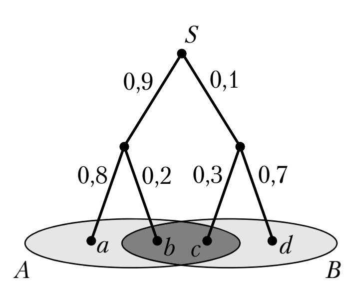


Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5. Результат округлите до сотых.

Ответ: ____________________

4 На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B.



Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{2x-3}} = \frac{1}{3}$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\frac{\left(3^{\frac{4}{7}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{6^{12}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = -6x + 1$ является касательной к графику функции $y = 4x^2 + bx + 2$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ: ____________________

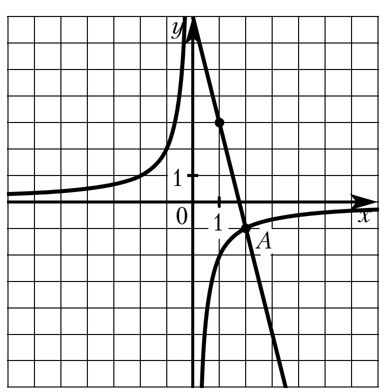
8 Два тела, массой $m = 7$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 9$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 425,25 джоуля.

Ответ: ____________________

9 Грузовик перевозит партию щебня массой 195 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 3 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за седьмой день, если вся работа была выполнена за 13 дней.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ: ____________________

11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-115 - 28x - x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{5}{\sin x} + 5 = 0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

13 В n-угольной пирамиде $SA_1A_2...A_n$ с вершиной S тангенс двугранного угла при каждом ребре основания равен $\dfrac{8}{15}$.

а) Докажите, что площадь полной поверхности пирамиды относится к площади основания как $32:15$.

б) Найдите объём пирамиды, если в основании лежит ромб, диагонали которого относятся как $3:4$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 34.

14 Решите неравенство $9\left|2x^2 - 7|x| + 5\right| \leqslant \left|18x^2 - 67|x| + 55\right|$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 Основания AB и CD прямоугольной трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 6, а меньшая боковая сторона BC равна 3. На стороне AD отмечена точка P так, что $AP:PD = 1:2$. Через точку P проведена прямая, перпендикулярная стороне AD и пересекающая прямые CD и BC соответственно в точках K и Q.

а) Докажите, что площадь треугольника DPK относится к площади трапеции как $8:45$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CDPQ$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2a^2} + \sqrt{3xa} = x^2 + 2a^2 + 3xa, \\ 3xa(x^2 + 2a^2) - 3xa - x^2 - 2a^2 + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

18 Известно, что что квадратное уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все значения, которые может принимать a, если $b = 77$.

б) Найдите все значения, которые может принимать a, если $a + b = 36$.

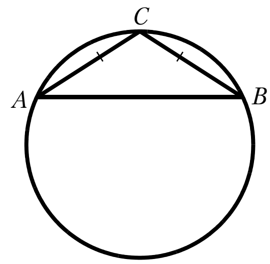
в) Найдите все натуральные числа, которые могут быть корнями уравнения, если $b^2 - a^2 = 156$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 3

Часть 1

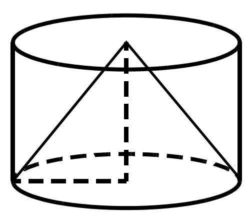
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 19, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $78\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

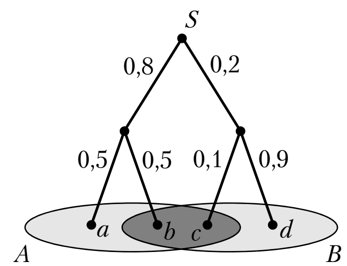


Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2.

Ответ: ____________________

4 На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B.



Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{16}{7x-4}} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5^{\frac{4}{7}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{45^{12}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 9x + 5$ является касательной к графику функции $y = 18x^2 + bx + 7$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ: ____________________

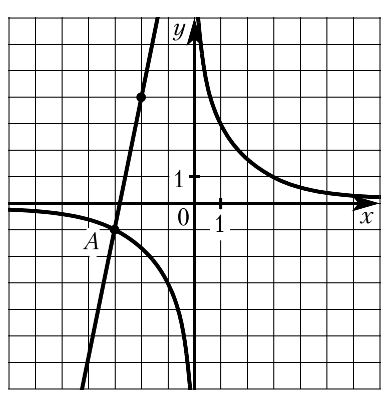
8 Два тела, массой $m = 4$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 6$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 72 джоулей.

Ответ: ____________________

9 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 51 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 357 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 351 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 30 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ: ____________________

11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{55 + 6x - x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{2}{\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{7}{\sin x}+7=0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

13 В n-угольной пирамиде $SA_1A_2...A_n$ с вершиной S тангенс двугранного угла при каждом ребре основания равен $\sqrt{3}$.

а) Докажите, что площадь полной поверхности пирамиды относится к площади основания как $3:1$.

б) Найдите объём пирамиды, если в основании лежит ромб, диагонали которого относятся как $2:5$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 50.

14 Решите неравенство $5\left|5x^2-8|x|+2{,}4\right| \geqslant \left|25x^2-50|x|+16\right|$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 5 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 Основания AB и CD прямоугольной трапеции $ABCD$ равны соответственно 7 и 2, а меньшая боковая сторона BC равна 5. На стороне AD отмечена точка P так, что $AP:PD=2:3$. Через точку P проведена прямая, перпендикулярная стороне AD и пересекающая прямые CD и BC соответственно в точках K и Q.

а) Докажите, что площадь треугольника относится к площади трапеции как $2:5$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CDPQ$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{2xa}=x^2+a^2+2xa,\\ 2xa(x^2+a^2)-2xa-x^2-a^2+1\geqslant 0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

18 Известно, что квадратное уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все значения, которые может принимать a, если $b=99$.

б) Найдите все значения, которые может принимать a, если $a+b=30$.

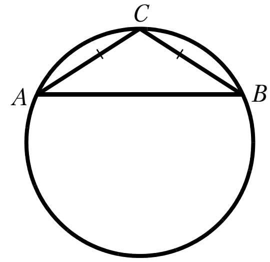
в) Найдите все натуральные числа, которые могут быть корнями уравнения, если $b^2-a^2=476$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 4

Часть 1

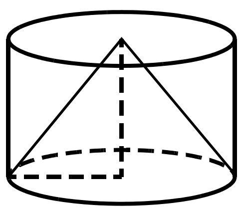
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 22, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $15\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

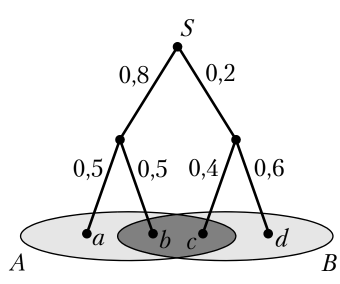


Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5 или 6.

Ответ: ____________________

4 На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B.



Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{3}{5x-30}} = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(7^{\frac{3}{5}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{28^{9}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 9x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^2 + bx + 2$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ: ____________________

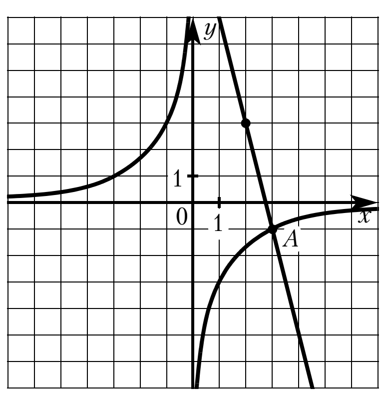
8 Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 9$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 121,5 джоуля.

Ответ: ____________________

9 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 88 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 396 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 272 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 30 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ: ____________________

11 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{16 - 6x - x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{6}{\sin x} + 6 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

13 В n-угольной пирамиде $SA_1A_2...A_n$ с вершиной S тангенс двугранного угла при каждом ребре основания равен 2,4.

а) Докажите, что площадь полной поверхности пирамиды относится к площади основания как $18:5$.

б) Найдите объём пирамиды, если в основании лежит ромб, диагонали которого относятся как $4:5$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 106,6.

14 Решите неравенство $\left|10x^2 - 53|x| + 36\right| \geqslant 2\left|5x^2 - 24{,}5|x| + 9\right|$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 5 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 Основания AB и CD прямоугольной трапеции $ABCD$ равны соответственно 11 и 5, а меньшая боковая сторона BC равна 6. На стороне AD отмечена точка P так, что $AP:PD = 1:2$. Через точку P проведена прямая, перпендикулярная стороне AD и пересекающая прямые CD и BC соответственно в точках K и Q.

а) Докажите, что площадь треугольника относится к площади трапеции как $1:3$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CDPQ$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{9}} + \sqrt{\frac{2xa}{3}} = x^2 + \frac{a^2}{9} + \frac{2xa}{3}, \\ \frac{2xa}{3}\left(x^2 + \frac{a^2}{9}\right) - \frac{2xa}{3} - x^2 - \frac{a^2}{9} + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

18 Известно, что квадратное уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все значения, которые может принимать a, если $b = 39$.

б) Найдите все значения, которые может принимать a, если $a + b = 60$.

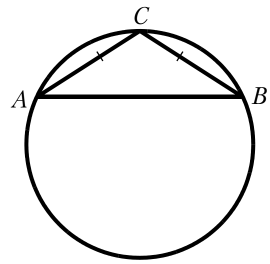
в) Найдите все натуральные числа, которые могут быть корнями уравнения, если $b^2 - a^2 = 341$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 5

Часть 1

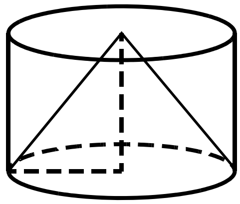
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 37, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $82\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

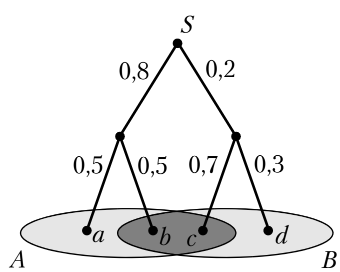


Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков делится на 5, но не делится на 30.

Ответ: ____________________

4 На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B.



Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{2}{7x-31}}=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(7^{\frac{3}{5}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^{9}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y=5x-8$ является касательной к графику функции $y=6x^2+bx+16$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ: ____________________

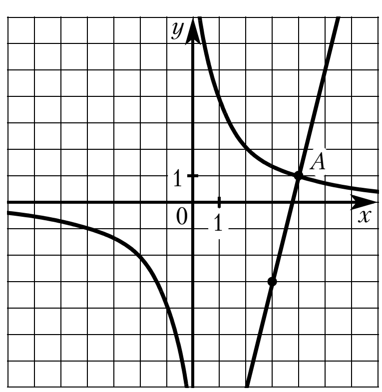
8 Два тела, массой $m=2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v=12$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 72 джоулей.

Ответ: ____________________

9 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 67 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 201 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 210 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображены графики функций $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ: ____________________

11 Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{-36-20x-x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{3}{\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{7}{\sin x}+7=0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

13 В n-угольной пирамиде $SA_1A_2...A_n$ с вершиной S тангенс двугранного угла при каждом ребре основания равен $\dfrac{4}{3}$.

а) Докажите, что площадь полной поверхности пирамиды относится к площади основания как $8:3$.

б) Найдите объём пирамиды, если в основании лежит ромб, диагонали которого относятся как $3:1$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 40.

14 Решите неравенство $\left|7x^2-3|x|+16\right| \leqslant 2\left|3{,}5x^2-9|x|+4\right|$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 6 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 500 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 Основания AB и CD прямоугольной трапеции $ABCD$ равны соответственно 7 и 3, а меньшая боковая сторона BC равна 4. На стороне AD отмечена точка P так, что $AP:PD=1:3$. Через точку P проведена прямая, перпендикулярная стороне AD и пересекающая прямые CD и BC соответственно в точках K и Q.

а) Докажите, что площадь треугольника DPK относится к площади трапеции $ABCD$ как $9:20$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CDPQ$.

17 Найдите все значения , при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+\dfrac{a^2}{16}}+\dfrac{\sqrt{xa}}{2}=x^2+\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{xa}{4},\\[2mm] \dfrac{xa}{4}\left(x^2+\dfrac{a^2}{16}\right)-\dfrac{xa}{4}-x^2-\dfrac{a^2}{16}+1\geqslant 0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

18 Известно, что квадратное уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все значения, которые может принимать a, если $b=26$.

б) Найдите все значения, которые может принимать a, если $a+b=40$.

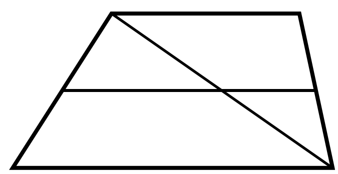
в) Найдите все натуральные числа, которые могут быть корнями уравнения, если $b^2-a^2=161$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 6

Часть 1

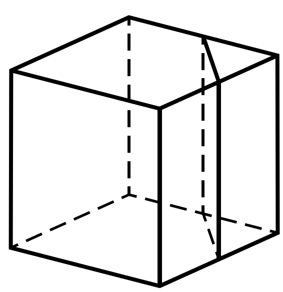
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите длину большего из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: ____________________

2 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 1. Найдите объём куба.



Ответ: ____________________

3 На олимпиаде по физике 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 170 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ____________________

4 В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите $\mathrm{E}X$ — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-2	-1	0	6
Вероятности	0,1	0,5	0,2	0,2

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\log_4 2^{6x-1} = 4$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{28}{\sin\left(-\dfrac{25\pi}{4}\right)\cdot\cos\dfrac{23\pi}{4}}$.

Ответ: ____________________

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\dfrac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 2 м/с?

Ответ: ____________________

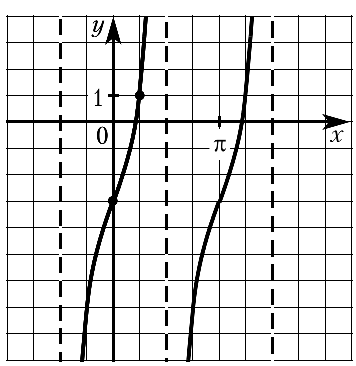
8 Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\sin\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=12$ с — период колебаний, $v_0=0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________

9 Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $y=a\,\mathrm{tg}\,x+b$. Найдите a.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)-2x+9$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{\left(2^{x^2-6x+10}-4\right)\left(25^{x-2}-25\right)}{3^{7x-26}-9}=0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 15; \log_3 20]$.

13 Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $3:4$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $7:18$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 15.

14 Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{3x-2}{4x-3}}+\sqrt{\dfrac{4x-3}{x-1}}>2\sqrt[4]{\dfrac{3x-2}{x-1}}.$

15 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 40 квадратных метров и номера «люкс» площадью 50 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 520 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 1200 рублей в сутки, а номер «люкс» — 1600 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

16 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют со стороной CD угол 30°. Точка E расположена вне прямоугольника так, что $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle BOE = \angle BCE$.

б) Найдите длину отрезка прямой OE, расположенного внутри прямоугольника $ABCD$, если $BE = 20$, $CE = 12$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$y+a-1=\sqrt{(a+1)^2-x^2+2ax-a^2}$$

удовлетворяют неравенству $|x+y-1|\leqslant 2$.

18 Назовем числовое множество хорошим, если его можно разбить на три подмножества с одинаковой суммой элементов.

а) Является ли множество $\{1, 2, 3, \dots, 26, 27\}$ хорошим?

б) Существует ли такое натуральное число n, что множество $\{2, 4, \dots, 2^{99}, 2^{100}, n\}$ является хорошим?

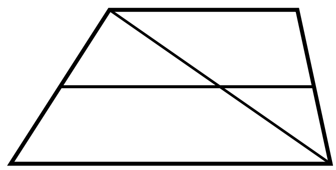
в) Сколько всего хороших подмножеств у множества $\{3, 5, 6, 8, 9, 11, 14\}$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 7

Часть 1

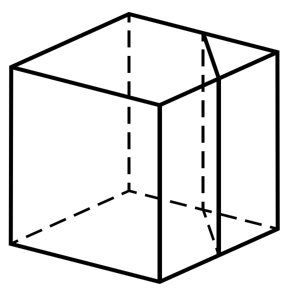
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания трапеции равны 2 и 4. Найдите длину большего из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: ____________________

2 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 35. Найдите объём куба.



Ответ: ____________________

3 На олимпиаде по математике 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ____________________

4 В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите $\mathrm{E}X$ — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\log_8 2^{6x-3} = 4$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{43}{\sin\left(-\dfrac{29\pi}{6}\right)\cdot\cos\dfrac{35\pi}{3}}$.

Ответ: ____________________

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^3-2t^2+6t+25$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 96 м/с?

Ответ: ____________________

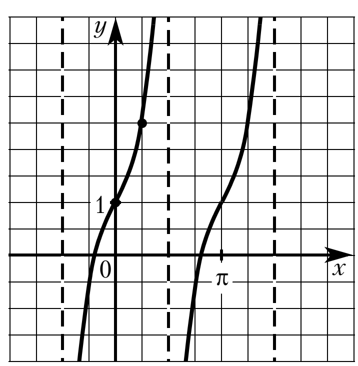
8 Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=12$ с — период колебаний, $v_0=1{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 11 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________

9 Грузовик перевозит партию щебня массой 195 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 3 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за седьмой день, если вся работа была выполнена за 13 дней.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $y=a\,\mathrm{tg}\,x+b$. Найдите a.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y=\ln(x-9)-10x+7$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{\left(5^{x^2+2x-1}-25\right)\left(36^{x-1}-36\right)}{7^{5x-3}-49}=0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_{0,5}6; \log_4 21]$.

13 Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $3:5$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $8:9$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 17.

14 Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{3x-5}{2x+3}}+\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}>2\sqrt[4]{\dfrac{3x-5}{x+1}}$.

15 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 50 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 500 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 1000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 1800 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

16 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют со стороной CD угол $30°$. Точка E расположена вне прямоугольника так, что $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle COE = \angle CBE$.

б) Найдите длину отрезка прямой OE, расположенного внутри прямоугольника $ABCD$, если $BE = 9,\ CE = 15$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$y+2a-1=\sqrt{(a-2)^2-x^2+4ax-4a^2}$$

удовлетворяют неравенству $|x+y-1|\leqslant 3$.

18 Назовем числовое множество хорошим, если его можно разбить на три подмножества с одинаковой суммой элементов.

а) Является ли множество $\{4, 5, 6, \dots, 29, 30\}$ хорошим?

б) Существует ли такое натуральное число n, что множество $\{1, 2, \dots, 2^{59}, 2^{60}, n\}$ является хорошим?

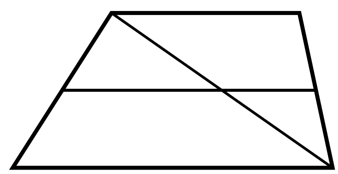
в) Сколько всего хороших подмножеств у множества $\{3, 4, 6, 7, 12, 16, 19\}$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 8

Часть 1

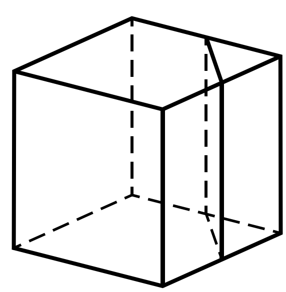
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания трапеции равны 6 и 11. Найдите длину большего из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: ____________________

2 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 21. Найдите объём куба.



Ответ: ____________________

3 На олимпиаде по русскому языку 300 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ____________________

4 В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите $\mathrm{E}X$ — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-1	2	4	6
Вероятности	0,6	0,1	0,2	0,1

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\log_{81} 3^{2x+6} = 4$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{46}{\sin\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)\cdot\cos\dfrac{35\pi}{4}}$.

Ответ: ____________________

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 8t - 16$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 1 м/с?

Ответ: ____________________

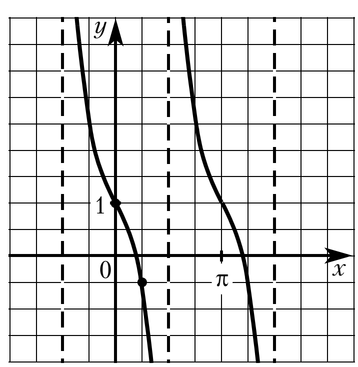
8 Груз массой 0,06 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 5 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________

9 Грузовик перевозит партию щебня массой 360 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 3 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 18 дней.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $y = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите a.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x-5) - 4x + 9$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{\left(3^{x^2-3}-9^x\right)\left(10^{5x-22}-0{,}01\right)}{4^{6x-21}-64}=0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\ln 0{,}2;\ \log_{0,5} 0{,}6]$.

13 Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $4:7$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $33:32$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 13.

14 Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{5x+2}{3x-1}}+\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-3}}>2\sqrt[4]{\dfrac{5x+2}{x-3}}$.

15 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 50 квадратных метров и номера «люкс» площадью 60 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 520 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 1500 рублей в сутки, а номер «люкс» — 1700 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

16 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют со стороной CD угол $30°$. Точка E расположена вне прямоугольника так, что $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle OBC = \angle OEC$.

б) Найдите длину отрезка прямой OE, расположенного внутри прямоугольника $ABCD$, если $BE = 30,\ CE = 18$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$y + a + 1 = \sqrt{(a-2)^2 - x^2 + 2ax - a^2}$$

удовлетворяют неравенству $|x + y - 1| \leqslant 2$.

18 Назовем числовое множество хорошим, если его можно разбить на три подмножества с одинаковой суммой элементов.

а) Является ли множество $\{5, 6, 7, \dots, 30, 31\}$ хорошим?

б) Существует ли такое натуральное число n, что множество $\{1, 5, \dots, 5^{59}, 5^{60}, n\}$ является хорошим?

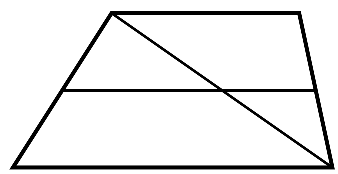
в) Сколько всего хороших подмножеств у множества $\{1, 3, 4, 6, 7, 9, 13\}$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 9

Часть 1

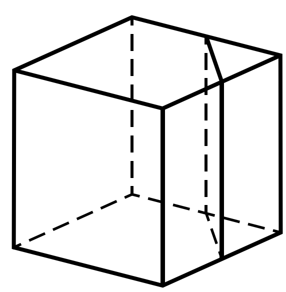
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания трапеции равны 5 и 16. Найдите длину большего из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: ____________________

2 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 7. Найдите объём куба.



Ответ: ____________________

3 На олимпиаде по обществознанию 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ____________________

4 В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения *X*	–3	–2	1	5
Вероятности	0,2	0,4	0,1	0,3

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\log_{27} 3^{2x+3} = 2$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{60}{\sin\left(-\dfrac{32\pi}{3}\right)\cdot\cos\dfrac{25\pi}{6}}$.

Ответ: ____________________

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{6}t^3 + t^2 - 8t - 18$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 40 м/с?

Ответ: ____________________

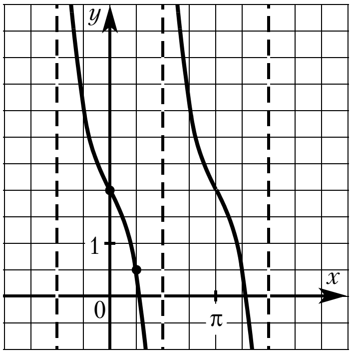
8 Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________

9 Грузовик перевозит партию щебня массой 168 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 3 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за десятый день, если вся работа была выполнена за 12 дней.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $y = a\,\mathrm{tg}\,x + b$. Найдите a.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 7) - 10x + 11$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{\left(2^{x^2-x-4}-4\right)\left(3^{3x-2}-81\right)}{8^{x^2-7}-64}=0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0{,}1;\ \ln 2]$.

13 Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $1:2$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $3:2$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 5.

14 Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{5x-1}{3x-2}}+\sqrt{\dfrac{3x-2}{6x-1}}\geqslant 2\sqrt[4]{\dfrac{5x-1}{6x-1}}$.

15 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 40 квадратных метров и номера «люкс» площадью 50 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 640 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 1200 рублей в сутки, а номер «люкс» — 1600 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

16 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют со стороной CD угол 30°. Точка E расположена вне прямоугольника так, что $\angle BEC=120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle BCO=\angle BEO$.

б) Найдите длину отрезка прямой OE, расположенного внутри прямоугольника $ABCD$, если $BE=6$, $CE=10$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$y+a-2=\sqrt{(a+2)^2-x^2+2ax-a^2}$$

удовлетворяют неравенству $|x+y-2|\leqslant 4$.

18 Назовем числовое множество хорошим, если его можно разбить на три подмножества с одинаковой суммой элементов.

а) Является ли множество $\{6, 7, 8, \ldots, 31, 32\}$ хорошим?

б) Существует ли такое натуральное число n, что множество $\{3, 9, \ldots, 3^{69}, 3^{70}, n\}$ является хорошим?

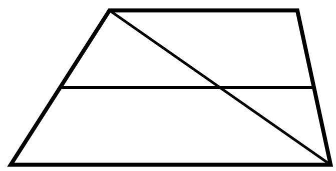
в) Сколько всего хороших подмножеств у множества $\{1, 3, 4, 7, 9, 10, 12\}$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 10

Часть 1

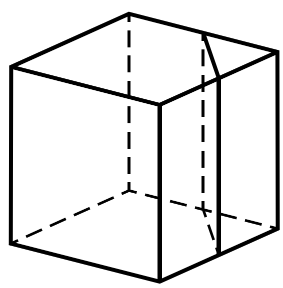
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания трапеции равны 17 и 19. Найдите длину большего из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: ____________________

2 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 42. Найдите объём куба.



Ответ: ____________________

3 На олимпиаде по математике 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 170 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ____________________

4 В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите $\mathrm{E}X$ — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-3	0	2	3
Вероятности	0,6	0,1	0,2	0,1

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\log_8 2^{7x+9} = 3$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{23}{\sin\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)\cdot\cos\dfrac{33\pi}{4}}$.

Ответ: ____________________

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\dfrac{1}{3}t^3+6t^2+8t-17$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 93 м/с?

Ответ: ____________________

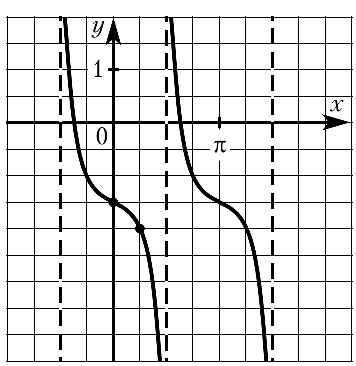
8 Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\sin\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=24$ с — период колебаний, $v_0=0{,}3$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 9 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________

9 Грузовик перевозит партию щебня массой 240 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за двенадцатый день, если вся работа была выполнена за 15 дней.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $y=a\,\mathrm{tg}\,x+b$. Найдите a.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y=\ln(x-13)-2x+7$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{\left(7^{3x^2-1}-49^x\right)\left(2^{6x-26}-16\right)}{15^{3x-2}-15}=0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_8 0{,}7;\ \log_3 251]$.

13 Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $1:3$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $4:1$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 5.

14 Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3x-2}}+\sqrt{\dfrac{x-5}{2x+5}}>2\sqrt[4]{\dfrac{x-5}{3x-2}}$.

15 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 50 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 400 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 1200 рублей в сутки, а номер «люкс» — 1900 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

16 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют со стороной CD угол $30°$. Точка E расположена вне прямоугольника так, что $\angle BEC=120°$.

а) Докажите, что $\angle OEB=\angle OBC$.

б) Найдите длину отрезка прямой OE, расположенного внутри прямоугольника $ABCD$, если $BE=35,\ CE=21$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$y+2a+2=\sqrt{(a-3)^2-x^2+4ax-4a^2}$$

удовлетворяют неравенству $|x+y+2|\leqslant 4$.

18 Назовем числовое множество хорошим, если его можно разбить на три подмножества с одинаковой суммой элементов.

а) Является ли множество $\{2, 3, 4, \dots, 27, 28\}$ хорошим?

б) Существует ли такое натуральное число n, что множество $\{1, 3, \dots, 3^{98}, 3^{99}, n\}$ является хорошим?

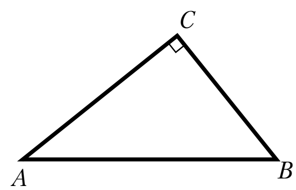
в) Сколько всего хороших подмножеств у множества $\{2, 3, 5, 8, 9, 12, 17\}$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 11

Часть 1

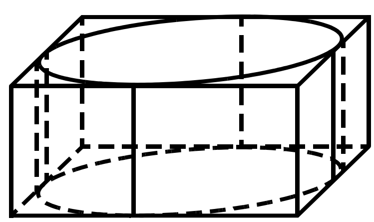
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 17$, $\sin A = \frac{8}{17}$. Найдите AC.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 0,5. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: ____________________

3 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 13 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ____________________

4 Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 6 очков.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{x-119}{x+7} = -5$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $121^{0,16} \cdot 11^{1,68}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 4x + 13$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

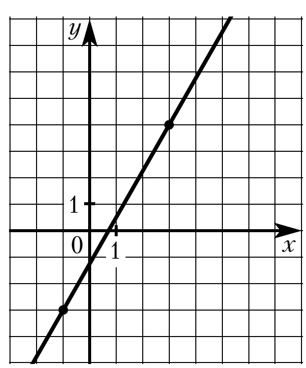
8 При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________

9 На изготовление 399 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 420 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(-5)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 4\cos x + \frac{18}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(0{,}5)^{\sin 2x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна $6\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

14 Решите неравенство $\sqrt{8-2x-x^2}\cdot\left(\frac{1}{2x+9}-\frac{1}{x+10}\right) \geqslant 0$.

15 19 марта планируется взять кредит в банке на сумму 900 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 18-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 19-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 19-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 1,035 млн руб.?

16 Внутри квадрата $ABCD$ с центром O расположены две окружности: окружность с центром O_1, лежащим на диагонали AC, вписана в угол BAD, а окружность с центром O_2, лежащим на диагонали BD, вписана в угол ADC. Эти окружности касаются внешним образом в точке K. Общая касательная, проведённая к ним в точке K, пересекает сторону AD в точке M.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника O_1MO_2.

б) Найдите угол OMO_2, если радиусы первой и второй окружностей относятся как $4:9$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$5\cos^2 x + \left(2a - \frac{1}{2a}\right)|\sin x| = 2a^2 - 3a + 3$$

имеет ровно три решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите эти решения.

18 На доске в первой строке написано два последовательных натуральных числа n и $n+1$, а во второй — по одному разу те и только те натуральные числа, которые являются делителями какого-либо числа из первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 6 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

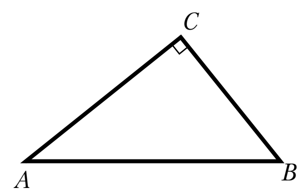
в) Сколько существует таких чисел $n > 2000$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 12

Часть 1

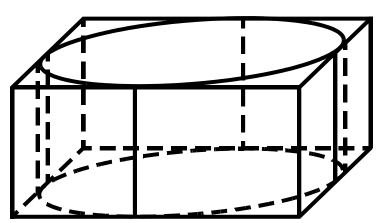
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 35$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите AC.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 1,5. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: ____________________

3 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 18 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ____________________

4 Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 4 очка.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{x-41}{x-5} = 3$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $5^{0,36} \cdot 25^{0,32}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

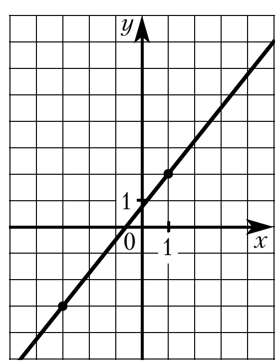
8 При температуре $0\ ^\circ C$ рельс имеет длину $l_0 = 12{,}5$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________

9 На изготовление 391 детали первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 460 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(-9)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{21}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(0{,}25)^{\sin x} = 2^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

13 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна 10. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

14 Решите неравенство $\sqrt{4+3x-x^2}\cdot\left(\frac{1}{3x+5}-\frac{1}{x+7}\right) \geqslant 0$.

15 11 сентября планируется взять кредит в банке на сумму 500 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 10-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 11-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 11-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 530 тыс. руб.?

16 Внутри квадрата $ABCD$ с центром O расположены две окружности: окружность с центром O_1, лежащим на диагонали AC, вписана в угол BAD, а окружность с центром O_2, лежащим на диагонали BD, вписана в угол ADC. Эти окружности касаются внешним образом в точке K. Общая касательная, проведённая к ним в точке K, пересекает сторону AD в точке M.

а) Докажите, что $\angle OMO_1 = \angle OO_2O_1$.

б) Найдите угол OMO_2, если радиусы первой и второй окружностей относятся как $9:16$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\cos^2 x + \left(2a - \frac{1}{a}\right)|\sin x| = 2a^2 - 3a + 3$$

имеет ровно три решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите эти решения.

18 На доске в первой строке написано два последовательных натуральных числа n и $n+1$, а во второй — по одному разу те и только те натуральные числа, которые являются делителями какого-либо числа из первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 7 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

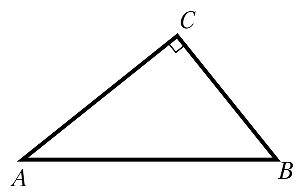
в) Сколько существует таких чисел $n > 3000$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 13

Часть 1

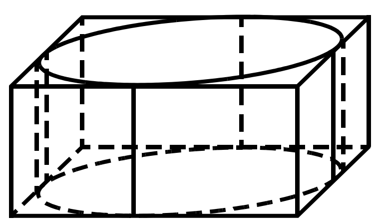
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 4$, $\sin A = \frac{\sqrt{91}}{10}$. Найдите AC.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 5,5. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: ____________________

3 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 18 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ____________________

4 Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 2 очка.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{x-25}{x-1} = -1$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $2^{0,39}\cdot 8^{0,87}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 6x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

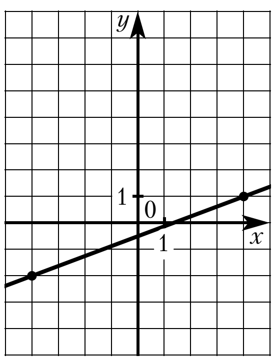
8 При температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha\cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________

9 На изготовление 616 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 700 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(12)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 4\cos x + \frac{21}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};\ 0\right]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(0{,}2)^{\cos x} = 25^{0{,}5\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

13 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $8\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

14 Решите неравенство $\sqrt{12+4x-x^2}\cdot\left(\frac{1}{3x+7}-\frac{1}{x+13}\right)\geqslant 0$.

15 23 октября планируется взять кредит в банке на сумму 600 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— с 12-го по 22-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 23-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 23-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 708 тыс. руб.?

16 Внутри квадрата $ABCD$ с центром O расположены две окружности: окружность с центром O_1, лежащим на диагонали AC, вписана в угол BAD, а окружность с центром O_2, лежащим на диагонали BD, вписана в угол ADC. Эти окружности касаются внешним образом в точке K. Общая касательная, проведённая к ним в точке K, пересекает сторону AD в точке M.

а) Докажите, что $\angle O_1OM = \angle O_1O_2M$.

б) Найдите угол OMO_2, если радиусы первой и второй окружностей относятся как $9:25$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3\cos^2 x - \left(2a - \frac{1}{2-a}\right)|\sin x| = a^2 - 3a + 3$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите это решение.

18 На доске в первой строке написано два последовательных натуральных числа n и $n+1$, а во второй — по одному разу те и только те натуральные числа, которые являются делителями какого-либо числа из первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 8 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

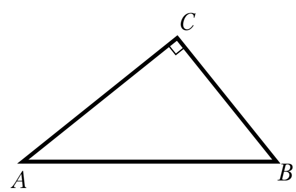
в) Сколько существует таких чисел $n < 1200$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 14

Часть 1

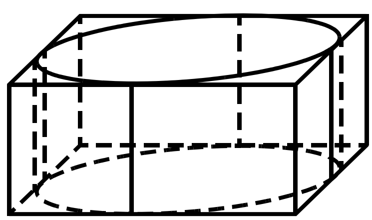
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 12$, $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AC.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 6. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: ____________________

3 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 14 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ____________________

4 Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{x+3}{x+7} = -3$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $3^{0{,}01} \cdot 27^{0{,}33}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = -5x - 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

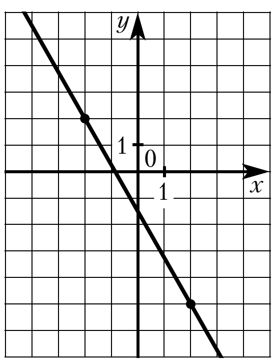
8 При температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________

9 На изготовление 567 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 648 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 2\cos x + \frac{12}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};\ 0\right]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $0{,}25^{\cos 2x} = 2\cdot 8^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

13 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна $10\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

14 Решите неравенство $\sqrt{15x - x^2 - 44}\cdot\left(\frac{1}{4x-6} + \frac{1}{x-9}\right) \leqslant 0$.

15 27 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 200 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 8 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— с 13-го по 26-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 27-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 27-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 304 тыс. руб.?

16 Внутри квадрата $ABCD$ с центром O расположены две окружности: окружность с центром O_1, лежащим на диагонали AC, вписана в угол BAD, а окружность с центром O_2, лежащим на диагонали BD, вписана в угол ADC. Эти окружности касаются внешним образом в точке K. Общая касательная, проведённая к ним в точке K, пересекает сторону AD в точке M.

а) Докажите, что $\angle MO_1O_2 = \angle MOO_2$.

б) Найдите угол OMO_1, если радиусы первой и второй окружностей относятся как $16:25$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\cos^2 x + \left(a - \frac{2}{2+a}\right)|\sin x| = 3a^2 - 4a + 2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите это решение.

18 На доске в первой строке написано два последовательных натуральных числа n и $n+1$, а во второй — по одному разу те и только те натуральные числа, которые являются делителями какого-либо числа из первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 5 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

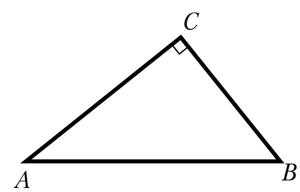
в) Сколько существует таких чисел $n < 5000$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 15

Часть 1

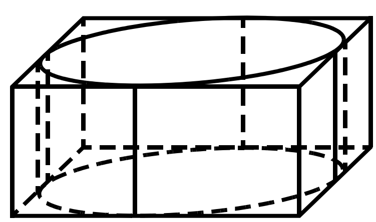
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 12$, $\sin A = \frac{3\sqrt{11}}{10}$. Найдите AC.



Ответ: ____________________

2 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 7. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: ____________________

3 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 12 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ____________________

4 Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечётных чисел, а чётные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{x-24}{x-3} = -2$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $4^{0,19} \cdot 8^{0,54}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 7x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

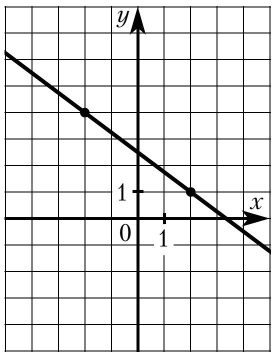
8 При температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________

9 На изготовление 416 деталей первый рабочий тратит на 10 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 546 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение $f(-16)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 4\cos x + \frac{15}{\pi}x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};\ 0\right]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $0{,}64^{\sin x} = 0{,}8 \cdot 1{,}25^{\cos 2x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2}; -5\pi\right]$.

13 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна 6. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

14 Решите неравенство $\sqrt{11x - x^2 - 18} \cdot \left(\frac{1}{6-5x} + \frac{1}{12-x}\right) \leqslant 0$.

15 16 января планируется взять кредит в банке на сумму 700 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 11 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 15-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 16-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 16-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 931 тыс. руб.?

16 Внутри квадрата $ABCD$ с центром O расположены две окружности: окружность с центром O_1, лежащим на диагонали AC, вписана в угол BAD, а окружность с центром O_2, лежащим на диагонали BD, вписана в угол ADC. Эти окружности касаются внешним образом в точке K. Общая касательная, проведённая к ним в точке K, пересекает сторону AD в точке M.

а) Докажите, что точка M лежит на окружности, описанной около треугольника O_1OO_2.

б) Найдите угол OMO_1, если радиусы первой и второй окружностей относятся как $25:36$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$5\cos^2 x - \left(a - \frac{1}{1+a}\right)|\sin x| = a^2 - 3a + 5$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите это решение.

18 На доске в первой строке написано два последовательных натуральных числа n и $n+1$, а во второй — по одному разу те и только те натуральные числа, которые являются делителями какого-либо числа из первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 9 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

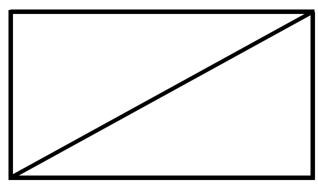
в) Сколько существует таких чисел $n < 6000$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 16

Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Периметр прямоугольника равен 54, а диагональ равна 26. Найдите площадь этого прямоугольника.



Ответ: ____________

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB = 2$, ребро $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K.

Ответ: ____________

3 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орлов выпало больше, чем решек.

Ответ: ____________

4 Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов (шоколадное яйцо с игрушкой внутри). Всего в серии 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть шесть разных принцесс. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы, которой раньше не было в Машиной коллекции, ей придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Ответ: ____________

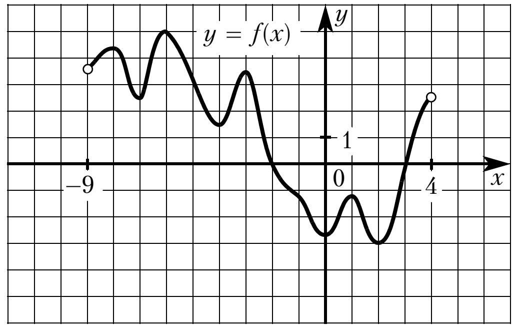
5 Решите уравнение $x = \frac{-x-10}{x+6}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: ____________

6 Найдите значение выражения $\frac{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{8-\sqrt{15}}$.

Ответ: ____________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________

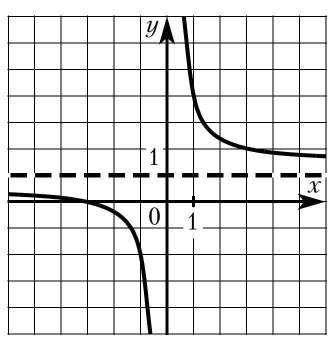
8 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ____________________

9 Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$ на отрезке $[-4; -1]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(2x^2-5x-12)(2\cos x+1)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B. Грани ABC и ABS равновелики. На рёбрах BS, AS и CA отмечены точки K, L и M соответственно, так, что $SK:KB=1:2$, $SL:LA=1:2$, $CM:MA=1:2$.

а) Докажите, что плоскость KLM наклонена к плоскости основания пирамиды под углом 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KLM, если площадь грани ABS равна 9.

14 Решите неравенство $\log_{0,5}^2 x^2+8|\log_{0,5}x^2|\geqslant 9$.

15 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 13 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

16 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D. Центр окружности, вписанной в треугольник BCD, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $\angle BDC=60^\circ$.

б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC, если $AB=4$ и $AC=10$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение $(x;y)$ системы уравнений

$$\begin{cases}3x^2+ay^2+x+2-a=0,\\ ax^2+3y^2+y+2-a=0\end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $|x+y|>2$.

18 Пусть $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число, равное $100a+10b+c$, где a, b и c — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $\overline{abc}+\overline{cba}=1696$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $7\cdot\overline{abc}=5\cdot\overline{cba}$?

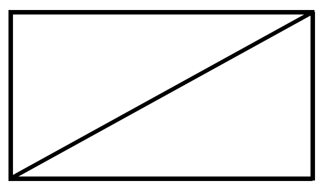
в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\overline{abc}:\overline{cba}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 5?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 17

Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Периметр прямоугольника равен 104, а диагональ равна 51. Найдите площадь этого прямоугольника.



Ответ: ____________________

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $BC = 6$, ребро $AD = \sqrt{37}$, ребро $BB_1 = 2$. Точка K — середина ребра CC_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки B_1, A_1 и K.

Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что количество выпавших орлов меньше 2.

Ответ: ____________________

4 Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов (шоколадное яйцо с игрушкой внутри). Всего в серии 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть четыре разные принцессы. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы, которой раньше не было в Машиной коллекции, ей придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Ответ: ____________________

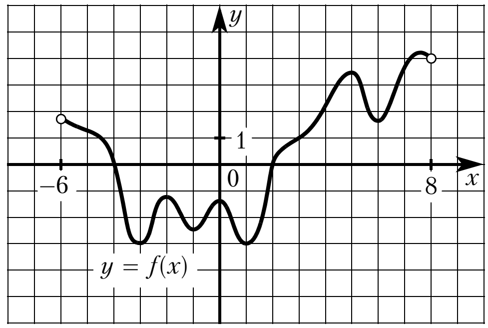
5 Решите уравнение $x = \frac{4x-12}{x-4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2}{7+\sqrt{33}}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________

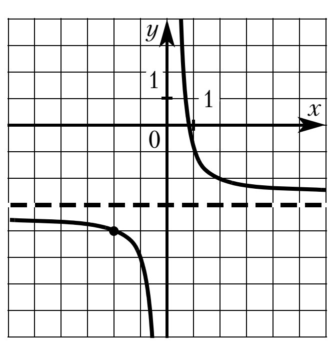
8 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 58$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ____________________

9 Смешали некоторое количество 13-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно $-3{,}1$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-2)^2(x+9) + 6$ на отрезке $[-1; 7]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2-11x+28)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B. Грани ABC и ABS равновелики. На рёбрах BS, AS и CA отмечены точки K, L и M соответственно, так, что $SK:KB=2:3$, $SL:LA=2:3$, $CM:MA=2:3$.

а) Докажите, что плоскость KLM наклонена к плоскости основания пирамиды под углом 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KLM, если площадь грани ABS равна 25.

14 Решите неравенство $\log^2_{\frac{1}{3}}x^2+7\left|\log_{\frac{1}{3}}x^2\right|\geqslant 8$.

15 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 25 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

16 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D. Центр окружности, вписанной в треугольник BCD, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $\angle BDC=30°$.

б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC, если $AB=8$ и $AC=12$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение $(x;\,y)$ системы уравнений

$$\begin{cases}2x^2+ay^2+x+3-a=0,\\ ax^2+2y^2+y+3-a=0\end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $|x|+|y|>2$.

18 Пусть $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число, равное $100a+10b+c$, где a, b и c — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $\overline{abc}+\overline{cba}=1595$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $3\cdot\overline{abc}=5\cdot\overline{cba}$?

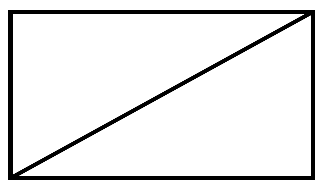
в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\overline{abc}:\overline{cba}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 6?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 18

Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Периметр прямоугольника равен 50, а диагональ равна 24. Найдите площадь этого прямоугольника.



Ответ: ____________

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $CD = 6$, ребро $BC = 2\sqrt{2}$, ребро $CC_1 = 4$. Точка K — середина ребра DD_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1, B_1 и K.

Ответ: ____________

3 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Ответ: ____________

4 Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов (шоколадное яйцо с игрушкой внутри). Всего в серии 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть три разные принцессы. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы, которой раньше не было в Машиной коллекции, ей придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Ответ: ____________

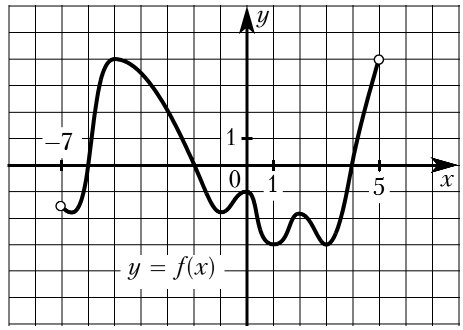
5 Решите уравнение $x = \dfrac{8x+36}{x+13}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: ____________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{14}\right)^2}{10+\sqrt{84}}$.

Ответ: ____________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________

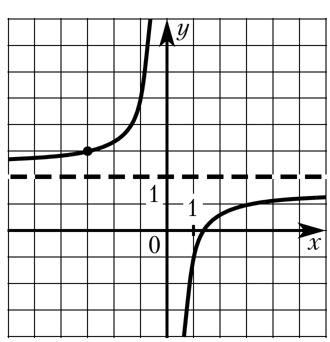
8 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 40$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 64$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ____________________

9 Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 2,2.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-6)^2(x+3) - 3$ на отрезке $[5; 19]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2-x-6)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B. Грани ABC и ABS равновелики. На рёбрах BS, AS и CA отмечены точки K, L и M соответственно, так, что $SK:KB=4:3$, $SL:LA=4:3$, $CM:MA=4:3$.

а) Докажите, что плоскость KLM наклонена к плоскости основания пирамиды под углом 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KLM, если площадь грани ABS равна 49.

14 Решите неравенство $\log_2^2 x^2+3|\log_2 x^2|\geqslant 10$.

15 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 30 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 33 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

16 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D. Центр окружности, вписанной в треугольник BCD, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $\angle DAC=30°$.

б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC, если $AB=7$ и $AC=14$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение $(x; y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+ay^2+3x+2-a=0, \\ ax^2+2y^2+3y+2-a=0 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $|x+y|>2$.

18 Пусть $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число, равное $100a+10b+c$, где a, b и c — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $\overline{abc}+\overline{cba}=1494$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $4\cdot\overline{abc}=5\cdot\overline{cba}$?

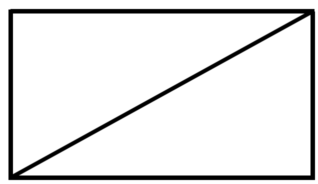
в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\overline{abc}:\overline{cba}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 4?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 19

Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 27. Найдите площадь этого прямоугольника.



Ответ: ____________________

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $CD = 4$, ребро $BC = 2\sqrt{5}$, ребро $CC_1 = 4$. Точка K — середина ребра DD_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1, B_1 и K.

Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно два раза.

Ответ: ____________________

4 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Ответ: ____________________

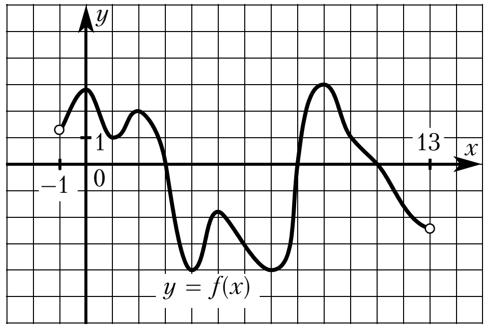
5 Решите уравнение $x = \frac{-8x-45}{x-22}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2}{5+\sqrt{21}}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________

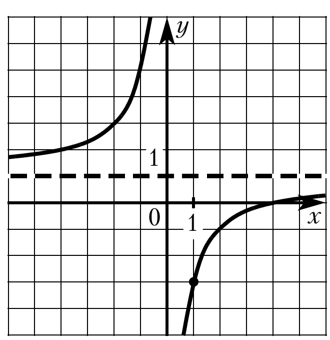
8 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 54$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 80 км от города. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ____________________

9 Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,75.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-9)^2(x+4)+10$ на отрезке $[3; 12]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2+4x-96)(4\sin x+2)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B. Грани ABC и ABS равновелики. На рёбрах BS, AS и CA отмечены точки K, L и M соответственно, так, что $SK:KB=1:3$, $SL:LA=1:3$, $CM:MA=1:3$.

а) Докажите, что плоскость KLM наклонена к плоскости основания пирамиды под углом 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KLM, если площадь грани ABS равна $8\sqrt{2}$.

14 Решите неравенство $\log_6^2 x^2-|\log_6 x^2|\geqslant 2$.

15 По вкладу «А» банк в течение четырёх лет в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 10 % в течение каждого из первых трёх лет. Найдите наименьшее целое число процентов, начисленное за четвёртый год по вкладу «Б», при котором за все четыре года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

16 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D. Центр окружности, вписанной в треугольник BCD, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $\angle BDC=60°$.

б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC, если $AB=10$ и $AC=15$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение $(x;y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+ay^2+2x+5-a=0,\\ ax^2+y^2+2y+5-a=0\end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $|x+y|>2$.

18 Пусть $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число, равное $100a+10b+c$, где a, b и c — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $\overline{abc}+\overline{cba}=1393$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $6\cdot\overline{abc}=5\cdot\overline{cba}$?

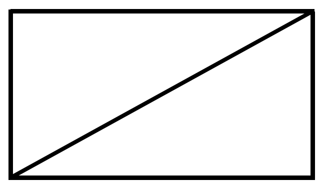
в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\overline{abc}:\overline{cba}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 3?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 20

Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Периметр прямоугольника равен 70, а диагональ равна 34. Найдите площадь этого прямоугольника.



Ответ: ____________________

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AD = 6$, ребро $CD = 2\sqrt{10}$, ребро $DD_1 = 4$. Точка K — середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки D_1, C_1 и K.

Ответ: ____________________

3 В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет все четыре раза.

Ответ: ____________________

4 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Найдите отношение вероятностей событий «стрелок поразит ровно пять мишеней» и «стрелок поразит ровно четыре мишени».

Ответ: ____________________

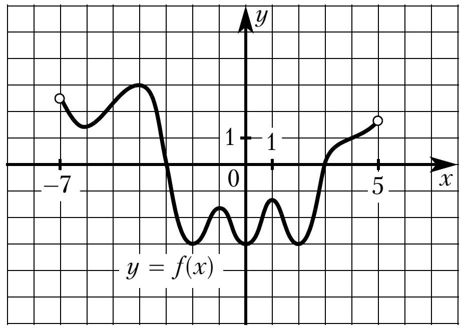
5 Решите уравнение $x = \dfrac{9x-20}{x+18}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)^2}{8+\sqrt{39}}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________

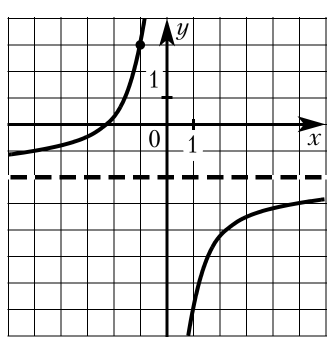
8 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 65$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 40$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 60 км от города. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ____________________

9 Смешали некоторое количество 20-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 16-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно -27.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-3)^2(x-6) - 1$ на отрезке $[4; 6]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(4x^2 - 3x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B. Грани ABC и ABS равновелики. На рёбрах BS, AS и CA отмечены точки K, L и M соответственно, так, что $SK:KB = 2:5$, $SL:LA = 2:5$, $CM:MA = 2:5$.

а) Докажите, что плоскость KLM наклонена к плоскости основания пирамиды под углом 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KLM, если площадь грани ABS равна $49\sqrt{2}$.

14 Решите неравенство $\log^2_{0,2} x^2 + 6|\log_{0,2} x^2| \geqslant 27$.

15 По вкладу «А» банк в течение четырёх лет в конце каждого года увеличивает на 30 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 20 % в течение каждого из первых трёх лет. Найдите наименьшее целое число процентов, начисленное за четвёртый год по вкладу «Б», при котором за все четыре года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

16 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D. Центр окружности, вписанной в треугольник BCD, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BCD, также лежит на этой окружности.

б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC, если $AB = 9$ и $AC = 12$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение $(x; y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 2ay^2 + 4x + 5 - 2a = 0, \\ 2ax^2 + 2y^2 + 4y + 5 - 2a = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $|x + y| > 2$.

18 Пусть $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число, равное $100a + 10b + c$, где a, b и c — десятичные цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $\overline{abc} + \overline{cba} = 1373$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $8 \cdot \overline{abc} = 5 \cdot \overline{cba}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\overline{abc} : \overline{cba}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 2?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 21

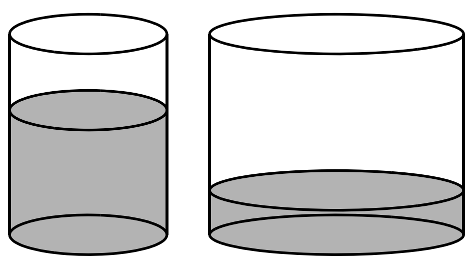
Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 153. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ____________________

2 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 25 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ____________________

3 Сергей отправляет СМС-сообщение другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,6. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

Ответ: ____________________

4 Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит числа 3. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно три броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-2x} = 27$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

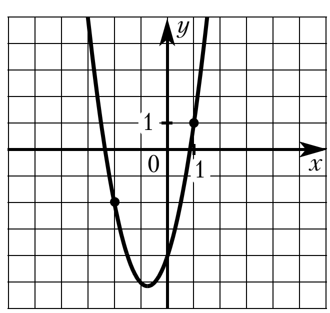
Ответ: ____________________

8 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

9 Лодка в 8:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 20:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-5)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1; 2]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2+2x-2)\left(\log_3(x^2-5)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{5}-x\right)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5;\ -2{,}8]$.

13 Дана правильная треугольная призма $ABCDA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCDA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды ABA_1C_1 равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью ABC_1, если $AB=8$ и $AA_1=6$.

14 Решите неравенство $3^{\lg x}+6\frac{2}{3}\cdot 3^{0{,}5\lg x}\cdot 2^{0{,}5(\lg x-6)}\leqslant 2^{\lg x}$.

15 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 60 % (до $t_1=1{,}6t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $12\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\dfrac{AC\cdot AB}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 8 и 18 соответственно.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $[-1;\ 1]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x}-16^x+2\cdot(4a)^x\geqslant 0$.

18 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 22

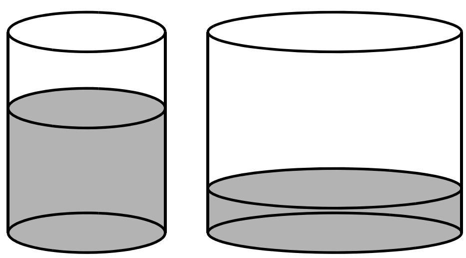
Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 14. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ____________________

2 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ____________________

3 Андрей отправляет СМС-сообщение другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

Ответ: ____________________

4 Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 2. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}} - \sqrt{5\frac{2}{5}}\right) : \sqrt{\frac{3}{20}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = -2x - 12$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 - 6x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

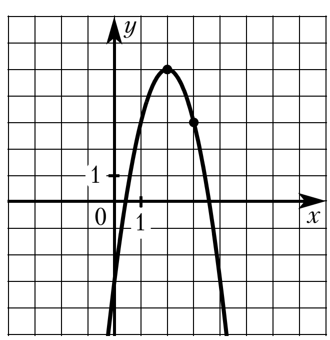
8 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с).Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ____________________

9 Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции$f(x) = -2x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(5)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 2e^x + 6$ на отрезке $[-2; 1]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2+4x+1)\left(\log_{0,2}(x^2-7)+\log_5\left(\sqrt{7}-x\right)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3,7; -2,7]$.

13 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды AB_1C_1C равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C, если $AB=5$ и $AA_1=12$.

14 Решите неравенство $5^{\lg x}-3^{\lg x}<5\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}\lg x}\cdot 3^{\frac{1}{2}(\lg x-2)}$.

15 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог до $t_1=\frac{10t_0}{7}$, сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $18\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\frac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 6 и 24 соответственно.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$ будет являться решением неравенства $2a^{2x}-3\cdot 9^x+5\cdot(3a)^x\geqslant 0$.

18 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=198$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=495$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 6?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 23

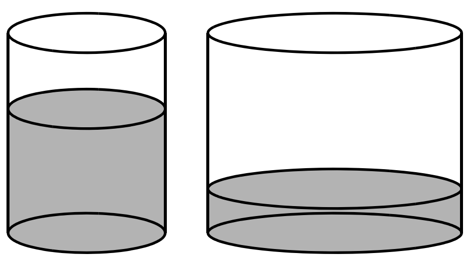
Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 118. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ____________________

2 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 125 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ____________________

3 Пантелей отправляет СМС-сообщение другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,7. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с четвёртой попытки.

Ответ: ____________________

4 Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 2. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно три броска? Ответ округлите до тысячных.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{5-2x} = 125.$

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{6\frac{3}{7}} - \sqrt{2\frac{6}{7}}\right) : \sqrt{\frac{5}{28}}.$

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 8x - 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 + 8x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

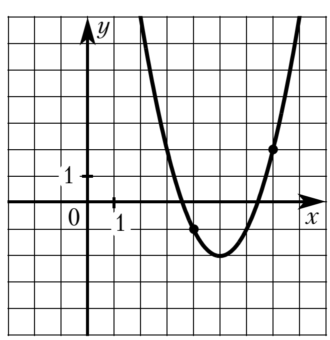
8 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{400}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ____________________

9 Катер в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-1)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 6$ на отрезке $[0; 3]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2+4x-1)\left(\log_{0,25}\left(\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\right)+\log_4\left(\sqrt{3}-x\right)\right)=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4{,}5; -3{,}5]$.

13 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды A_1B_1BC равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой CB_1 и плоскостью A_1BC, если $AB=24$ и $AA_1=7$.

14 Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{4}}(3x+1)}{\log_{\frac{1}{4}}(6x-1)}<2.$

15 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог до $t_1=4t_0$, сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $16\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 20 и 5 соответственно.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ будет являться решением неравенства $4a^{2x}-3\cdot 25^x+11\cdot(5a)^x\geqslant 0$.

18 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=297$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=1386$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 4 и 7?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 24

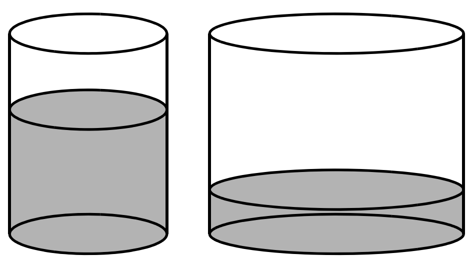
Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 116. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ____________________

2 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 27 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ____________________

3 Алексей отправляет СМС-сообщение другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,6. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена со второй попытки.

Ответ: ____________________

4 При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 5 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 1 очко?

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{16\frac{2}{3}}\right) : \sqrt{\frac{2}{27}}$.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = -x + 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

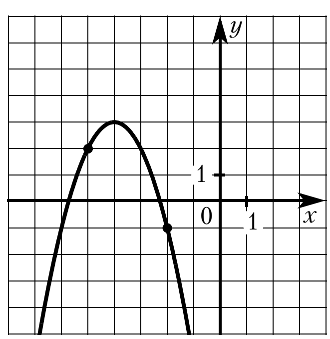
8 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{400}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ____________________

9 Лодка в 9:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 19:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = -x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-8)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 11e^x + 1$ на отрезке $[1; 2]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2+2x-5)\left(\log_4(x^2-7)-\log_2\sqrt{\sqrt{7}-x}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5; -2{,}5]$.

13 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды A_1ABC_1 равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью A_1BC, если $AB=24$ и $AA_1=7$.

14 Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}{\log_{\frac{1}{3}}(4x-1)}<2$.

15 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог до $t_1=2{,}5t_0$, сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $17\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 20 и 45 соответственно.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x}-5\cdot 16^x+14\cdot(4a)^x\geqslant 0$.

18 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=396$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=990$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 4 и 6?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 25

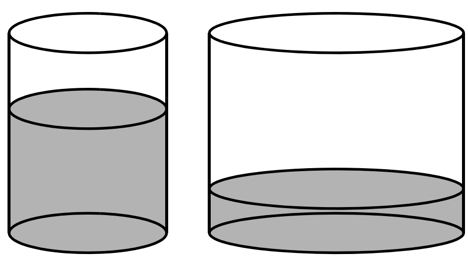
Часть 1

Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 103. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ___________________

2 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 12 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ___________________

3 Матвей отправляет СМС-сообщение другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с четвёртой попытки.

Ответ: ___________________

4 При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 11 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

Ответ: ___________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{18-5x} = 36$.

Ответ: ___________________

6 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{37\frac{1}{2}}\right) : \sqrt{\frac{3}{50}}$.

Ответ: ___________________

7 Прямая $y = -2x + 6$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

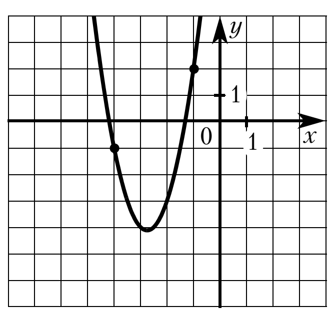
8 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{300}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ____________________

9 Байдарка в 9:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 45 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-6)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 11e^x - 6$ на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2-2x-19)\left(\log_{25}(x^2-8)^2-\log_5\left(-2\sqrt{2}-x\right)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5;\ 1{,}5]$.

13 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды AA_1B_1C равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью A_1B_1C, если $AB=40$ и $AA_1=9$.

14 Решите неравенство $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{6-5x}{x}}\leqslant\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}$.

15 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 25 % (до $t_1=1{,}25t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $15\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 12 и 48 соответственно.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x}-6\cdot4^{x}+17\cdot(2a)^{x}\geqslant0$.

18 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=495$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=1485$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 3 и 7?

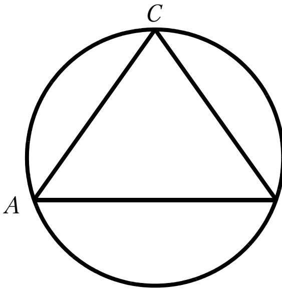
в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 26

Часть 1

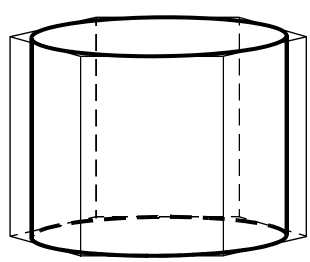
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Ответ: ____________________

3 Вероятность того, что новый планшет выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,2. Если планшет проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в планшете нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый планшет прослужит больше года, но не больше трёх лет.

Ответ: ____________________

4 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Ответ: ____________________

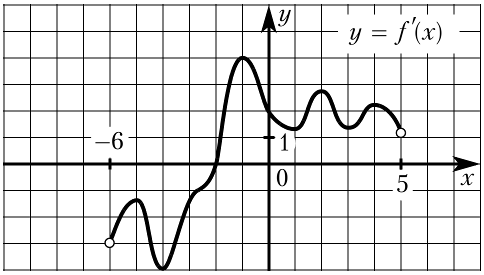
5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-2; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

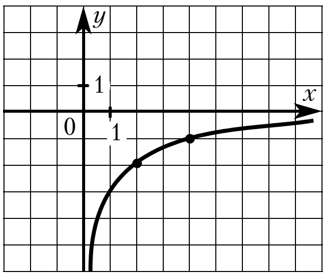
8 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 40$ °/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4$ °/мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 3000°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

9 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(32)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 289}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $4 \cdot 256^{\sin x} - 65 \cdot 16^{\sin x} + 16 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

13 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AH^2 = AC^2 + AD^2 - AB^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 4$ и $AC = AD = 3$.

14 Решите неравенство $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 100 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 1 : 2$, а $BN = 12$.

17 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 25)\sqrt{4x + 3k} \leqslant 0$ имеет не более двух решений.

18 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 1980$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 350$ и $S_{n+2} = 625$?

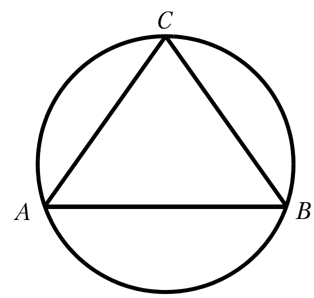
в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 625$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 27

Часть 1

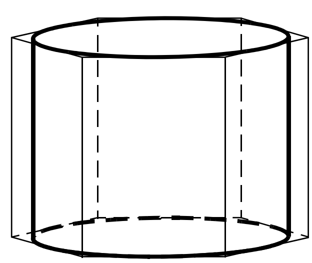
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 104, основание равно 192. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{27}$, а высота равна 1.



Ответ: ____________________

3 Вероятность того, что новый мобильный телефон выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,3. Если телефон проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в телефоне нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый телефон прослужит больше года, но не больше трёх лет.

Ответ: ____________________

4 В ящике три красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

Ответ: ____________________

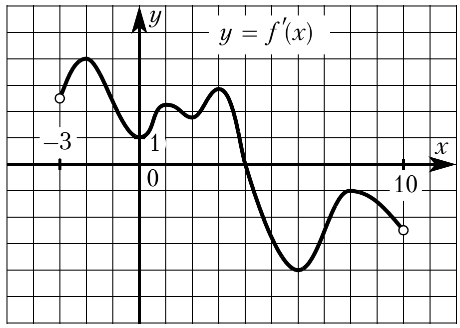
5 Решите уравнение $\cos\dfrac{\pi(x-7)}{3} = \dfrac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\log_a(ab^2)$, если $\log_b a = \dfrac{2}{11}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

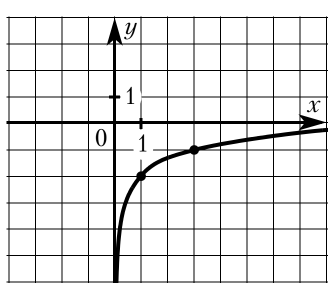
8 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 30$ °/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 3$ °/мин² — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $1200°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

9 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 186 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(27)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 576}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $15^{1+2\cos x} - 16 \cdot 15^{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AH^2 + AB^2 = AC^2 + AD^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = \sqrt{10}$ и $AC = AD = 3$.

14 Решите неравенство $\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) \leqslant 4$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 3 : 4$, а $BN = 42$.

17 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 25)\sqrt{3x - 4k} \leqslant 0$ имеет бесконечно много решений.

18 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2016$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 123$ и $S_{n+2} = 343$?

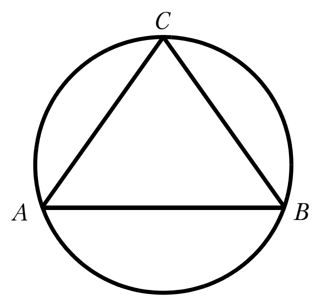
в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 343$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 28

Часть 1

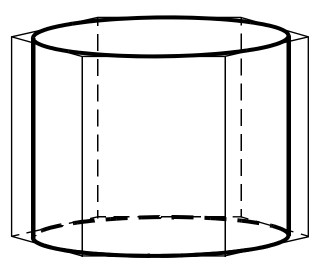
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 15, основание равно 18. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{27}$, а высота равна 4.



Ответ: ____________________

3 Вероятность того, что новый навигатор выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,4. Если навигатор проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в навигаторе нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый навигатор прослужит больше года, но не больше трёх лет.

Ответ: ____________________

4 В ящике два красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

Ответ: ____________________

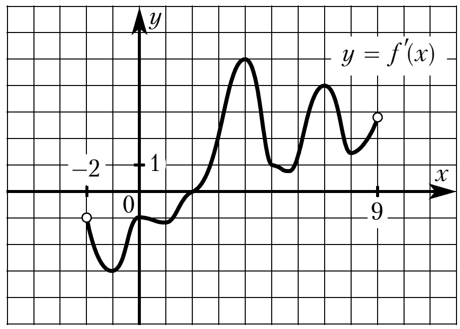
5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x-1)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\log_a(ab^6)$, если $\log_b a = \dfrac{3}{20}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

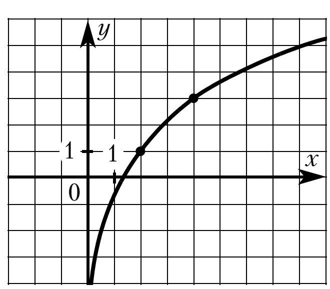
8 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 75$ °/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10$ °/мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 2250°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

9 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 112 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 144}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $2\cdot 4^{2\cos x} - 9\cdot 4^{\cos x} + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(2\pi; 4\pi]$.

13 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AB^2 = AC^2 + AD^2 - AH^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 4\sqrt{2}$ и $AC = AD = 5$.

14 Решите неравенство $\frac{1}{2}\log_{x+4}(x^2+2x+1) + \log_{-x-1}(-x^2-5x-4) \leqslant 3$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 2 : 3$, а $BN = 20$.

17 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 2)\sqrt{-x-k} \leqslant 0$ имеет конечное число решений.

18 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2019$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 310$ и $S_{n+2} = 625$?

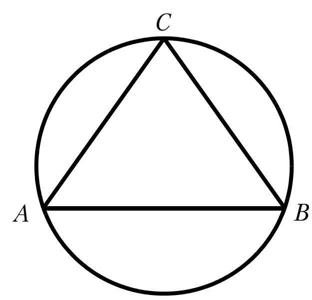
в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 729$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 29

Часть 1

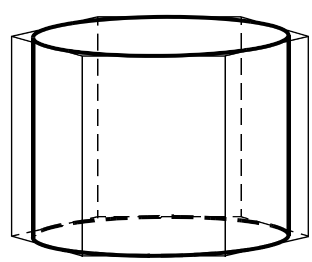
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 50, основание равно 60. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 3.



Ответ: ____________________

3 Вероятность того, что новый смартфон выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,1. Если смартфон проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в смартфоне нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый смартфон прослужит больше двух лет, но не больше четырёх.

Ответ: ____________________

4 В ящике три красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

Ответ: ____________________

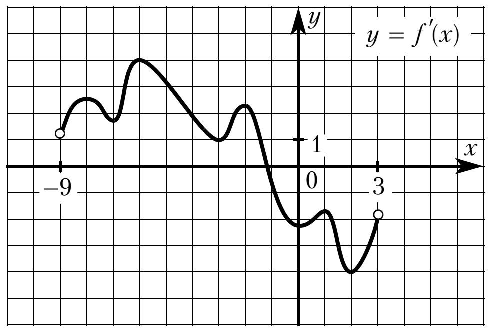
5 Решите уравнение $\cos\dfrac{\pi(x-1)}{3} = \dfrac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\log_a(a^3b^8)$, если $\log_b a = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;\,3)$. В какой точке отрезка $[-7;\,-1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

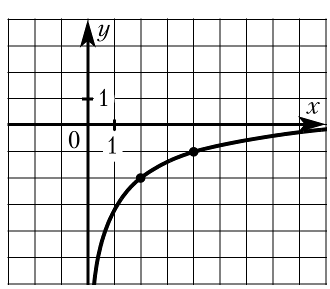
8 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 15$ °/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 6$ °/мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $2250°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

9 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 183 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 1 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 196}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $3\cdot 81^{\sin x} - 4\cdot 9^{\sin x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

13 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $AB^2 - AC^2 = AD^2 - 2AH^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 6$ и $AC = AD = 4\sqrt{5}$.

14 Решите неравенство $\log_5^2(2x+3) + 2\log_5^2 x \leqslant 3\log_5(2x+3)\cdot\log_5 x$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN:BC = 3:5$, а $BN = 24$.

17 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 5)\sqrt{2k - x} \leqslant 0$ имеет единственное решение.

18 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2022$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 128$ и $S_{n+2} = 343$?

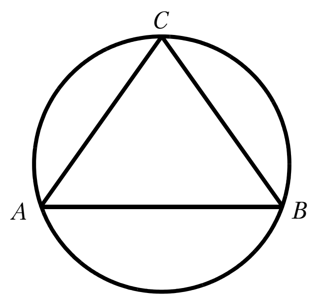
в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 243$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 30

Часть 1

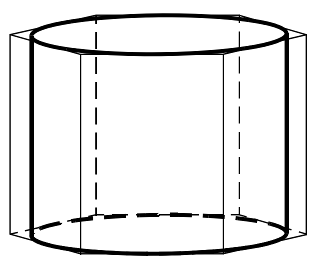
Ответом к заданиям 1—11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 6,5, основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Ответ: ____________________

2 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{0{,}12}$, а высота равна 3.



Ответ: ____________________

3 Вероятность того, что новый ноутбук выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,2. Если ноутбук проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в ноутбуке нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый ноутбук прослужит больше двух, но не больше четырёх лет.

Ответ: ____________________

4 Стрелок в тире стреляет по мишени. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать этому стрелку, чтобы вероятность поражения цели была не менее 0,5?

Ответ: ____________________

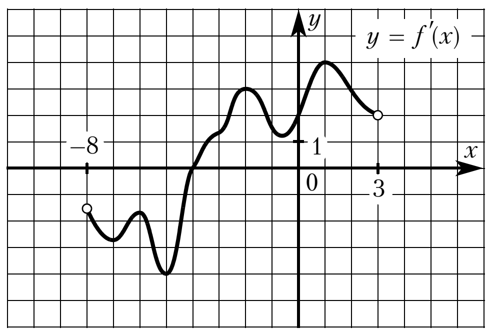
5 Решите уравнение $\cos\dfrac{\pi(x+5)}{3} = \dfrac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Ответ: ____________________

6 Найдите значение выражения $\log_a(a^2b)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$.

Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

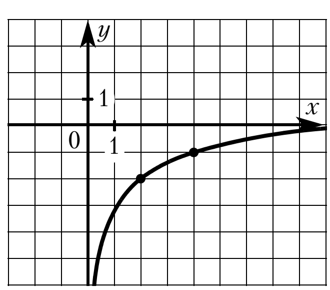
8 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20$ °/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4$ °/мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

9 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 65 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 2 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение $f(0{,}25)$.



Ответ: ____________________

11 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 729}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12—18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $5^{1+2\operatorname{tg}x} - 6\cdot 5^{\operatorname{tg}x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

13 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $AH^2 = AC^2 + AD^2 - AB^2 - AH^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 8$ и $AC = AD = 6$.

14 Решите неравенство $\log_3^2 x + 2\log_3^2(5x-6) \leqslant 3\log_3(5x-6)\cdot\log_3 x$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 2 : 5$, а $BN = 60$.

17 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 13)\sqrt{3x + 2k} \leqslant 0$ имеет не более двух решений.

18 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2025$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 1024$ и $S_{n+2} = 1331$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 1331$?

ОТВЕТЫ

1.1. Рациональные уравнения и выражения

1.1.1. –3. **1.1.2.** 9,5. **1.1.3.** 22. **1.1.4.** –3. **1.1.5.** 1,1. **1.1.6.** 9. **1.1.7.**10. **1.1.8.** –2. **1.1.9.** 3,5. **1.1.10.** 10. **1.1.11.** 7. **1.1.12.** –5. **1.1.13.** 2. **1.1.14.** 3,5. **1.1.15.** 2. **1.1.16.** –3. **1.1.17.** –1. **1.1.18.** –2. **1.1.19.** –1. **1.1.20.** 10. **1.1.21.** –5. **1.1.22.** 1. **1.1.23.** 5. **1.1.24.** 4. **1.1.25.** 4. **1.1.26.** 8. **1.1.27.** –2. **1.1.28.** 1. **1.1.29.** 2. **1.1.30.** –1. **1.1.31.** 75. **1.1.32.** 50. **1.1.33.** 12. **1.1.34.** 15. **1.1.35.** 4000. **1.1.36.** 5000. **1.1.37.** 2,2. **1.1.38.** 1,8. **1.1.39.** 1,6. **1.1.40.** 0,8. **1.1.41.** 15. **1.1.42.** 10. **1.1.43.** 45. **1.1.44.** 60. **1.1.45.** 55. **1.1.46.** 44. **1.1.47.** 100. **1.1.48.** 84. **1.1.49.** 400. **1.1.50.** 860. **1.1.51.** 1. **1.1.52.** 5. **1.1.53.** 4,83. **1.1.54.** 17,23. **1.1.55.** 0,27. **1.1.56.** 0,12. **1.1.57.** 40. **1.1.58.** 4. **1.1.59.** 3. **1.1.60.** 4. **1.1.61.** 3. **1.1.62.** 4. **1.1.63.** 10. **1.1.64.** 18. **1.1.65.** 56. **1.1.66.** 48. **1.1.67.** 16. **1.1.68.** 15. **1.1.69.** 4. **1.1.70.** 19. **1.1.71.** 11. **1.1.72.** 3. **1.1.73.** 6. **1.1.74.** 26. **1.1.75.** 12. **1.1.76.** 15. **1.1.77.** 28. **1.1.78.** 24. **1.1.79.** 12. **1.1.80.** 18. **1.1.81.** 17. **1.1.82.** 34. **1.1.83.** 125. **1.1.84.** 90. **1.1.85.** 4. **1.1.86.** 25. **1.1.87.** 69. **1.1.88.** 72. **1.1.89.** 150. **1.1.90.** 550. **1.1.91.** 96. **1.1.92.** 108. **1.1.93.** 40. **1.1.94.** 60. **1.1.95.** 52. **1.1.96.** 49. **1.1.97.** 6. **1.1.98.** 9. **1.1.99.** 4. **1.1.100.** 9. **1.1.101.** 12. **1.1.102.** 15. **1.1.103.** 6. **1.1.104.** 8.

1.2. Иррациональные уравнения и выражения

1.2.1. 4. **1.2.2.** 3. **1.2.3.** 16. **1.2.4.** 105. **1.2.5.** 4. **1.2.6.** –6. **1.2.7.** 6. **1.2.8.** 3. **1.2.9.** 2. **1.2.10.** –10. **1.2.11.** 2. **1.2.12.** 2. **1.2.13.** –9. **1.2.14.** –5. **1.2.15.** 21. **1.2.16.** 3. **1.2.17.** –4. **1.2.18.** 6. **1.2.19.** 2. **1.2.20.** –8. **1.2.21.** 11. **1.2.22.** –279. **1.2.23.** –2. **1.2.24.** 7. **1.2.25.** 13 500. **1.2.26.** 24 500. **1.2.27.** 11,25. **1.2.28.** 21,25. **1.2.29.** 6000. **1.2.30.** 10 000.

1.3. Степенные уравнения и выражения

1.3.1. 1. **1.3.2.** 2. **1.3.3.** 5. **1.3.4.** 4. **1.3.5.** 49. **1.3.6.** 3. **1.3.7.** 64. **1.3.8.** 7. **1.3.9.** 25. **1.3.10.** 9. **1.3.11.** 1,5. **1.3.12.** 125. **1.3.13.** 243. **1.3.14.** 2,25. **1.3.15.** 45. **1.3.16.** 8. **1.3.17.** 1. **1.3.18.** 2. **1.3.19.** 0,25. **1.3.20.** 1296. **1.3.21.** 4. **1.3.22.** 121. **1.3.23.** 1,5. **1.3.24.** 1. **1.3.25.** 108. **1.3.26.** 3,2. **1.3.27.** 6. **1.3.28.** 0. **1.3.29.** 7. **1.3.30.** 4,5. **1.3.31.** 5. **1.3.32.** 6,5. **1.3.33.** –7. **1.3.34.** 2. **1.3.35.** 8. **1.3.36.** 5. **1.3.37.** 3,5. **1.3.38.** –0,5. **1.3.39.** 1. **1.3.40.** 2,5. **1.3.41.** 20. **1.3.42.** 32. **1.3.43.** 0,5. **1.3.44.** 0,2.

1.4. Тригонометрические уравнения и выражения

1.4.1. –0,5. **1.4.2.** –0,5. **1.4.3.** –0,36. **1.4.4.** 45,08. **1.4.5.** –3. **1.4.6.** –0,2. **1.4.7.** 4. **1.4.8.** 81. **1.4.9.** 3. **1.4.10.** –24. **1.4.11.** –4,76. **1.4.12.** –41. **1.4.13.** –6. **1.4.14.** –44. **1.4.15.** 96. **1.4.16.** 87. **1.4.17.** –45. **1.4.18.** 51. **1.4.19.** 10. **1.4.20.** 35. **1.4.21.** –48. **1.4.22.** –35. **1.4.23.** –28. **1.4.24.** 17. **1.4.25.** 24. **1.4.26.** 1. **1.4.27.** –12. **1.4.28.** –18. **1.4.29.** –30. **1.4.30.** –0,5. **1.4.31.** –7,5. **1.4.32.** 2. **1.4.33.** –12. **1.4.34.** –4. **1.4.35.** –24. **1.4.36.** –38. **1.4.37.** 0,16. **1.4.38.** 0,96. **1.4.39.** 0,6. **1.4.40.** 6,4. **1.4.41.** 0,5. **1.4.42.** 1,5. **1.4.43.** –2. **1.4.44.** –1. **1.4.45.** –3. **1.4.46.** 1. **1.4.47.** 90. **1.4.48.** 45. **1.4.49.** 15. **1.4.50.** 60.

1.5. Логарифмические уравнения и выражения

1.5.1. 3. **1.5.2.** 3. **1.5.3.** –2,5. **1.5.4.** –2. **1.5.5.** 1. **1.5.6.** 3. **1.5.7.** 7. **1.5.8.** –0,5. **1.5.9.** 72. **1.5.10.** 343. **1.5.11.** 9. **1.5.12.** 4. **1.5.13.** –4. **1.5.14.** 4. **1.5.15.** 2. **1.5.16.** 3. **1.5.17.** –1. **1.5.18.** 3. **1.5.19.** 2. **1.5.20.** 2. **1.5.21.** –1. **1.5.22.** 1331. **1.5.23.** 8. **1.5.24.** 7. **1.5.25.** 7. **1.5.26.** 9. **1.5.27.** –348. **1.5.28.** –13. **1.5.29.** 3. **1.5.30.** 4. **1.5.31.** –0,4. **1.5.32.** –11. **1.5.33.** 2. **1.5.34.** 2. **1.5.35.** 8. **1.5.36.** –1,5. **1.5.37.** –3. **1.5.38.** –3. **1.5.30.** 14. **1.5.40.** 54. **1.5.41.** 26.

1.6. Функции и графики

1.6.1. –10. **1.6.2.** –10,5. **1.6.3.** 4. **1.6.4.** –15,5. **1.6.5.** 14,5. **1.6.6.** –15. **1.6.7.** –20. **1.6.8.** –15. **1.6.9.** 16. **1.6.10.** 0,2. **1.6.11.** 31. **1.6.12.** –13. **1.6.13.** 34. **1.6.14.** –13. **1.6.15.** 17. **1.6.16.** 2. **1.6.17.** 1. **1.6.18.** 7. **1.6.19.** –6. **1.6.20.** –5. **1.6.21.** 14. **1.6.22.** 29. **1.6.23.** 11. **1.6.24.** 80. **1.6.25.** 239. **1.6.26.** 15. **1.6.27.** –9. **1.6.28.** 10. **1.6.29.** 2,25. **1.6.30.** 0,375. **1.6.31.** –10. **1.6.32.** 8. **1.6.33.** 2. **1.6.34.** –1,5.

1.7. Вероятность

1.7.1. 0,4. **1.7.2.** 0,48. **1.7.3.** 0,25. **1.7.4.** 0,14. **1.7.5.** 0,5. **1.7.6.** 0,35. **1.7.7.** 0,4. **1.7.8.** 0,32. **1.7.9.** 0,84. **1.7.10.** 0,986. **1.7.11.** 0,008. **1.7.12.** 0,005. **1.7.13.** 0,4. **1.7.14.** 0,2. **1.7.15.** 0,16. **1.7.16.** 0,18. **1.7.17.** 0,25. **1.7.18.** 0,2. **1.7.19.** 0,4. **1.7.20.** 0,16. **1.7.21.** 0,5. **1.7.22.** 0,25. **1.7.23.** 0,08. **1.7.24.** 0,11. **1.7.25.** 0,25. **1.7.26.** 0,375. **1.7.27.** 0,25. **1.7.28.** 0,375. **1.7.29.** 0,5. **1.7.30.** 0,25. **1.7.31.** 0,14. **1.7.32.** 0,07. **1.7.33.** 0,5. **1.7.34.** 0,5. **1.7.35.** 0,16. **1.7.36.** 0,168. **1.7.37.** 0,59049. **1.7.38.** 0,00243. **1.7.39.** 0,25. **1.7.40.** 0,2. **1.7.41.** 0,25. **1.7.42.** 0,25. **1.7.43.** 0,19. **1.7.44.** 0,43. **1.7.45.** 0,12. **1.7.46.** 0,05. **1.7.47.** 0,039. **1.7.48.** 0,028. **1.7.49.** 0,999. **1.7.50.** 0,9991. **1.7.51.** 0,46. **1.7.52.** 0,58. **1.7.53.** 0,0575. **1.7.54.** 0,0494. **1.7.55.** 0,3611. **1.7.56.** 0,5235. **1.7.57.** 5. **1.7.58.** 3. **1.7.59.** 0,28. **1.7.60.** 0,33. **1.7.61.** 0,025. **1.7.62.** 0,017. **1.7.63.** 0,25. **1.7.64.** 0,0625. **1.7.65.** 0,25. **1.7.66.** 0,5. **1.7.67.** 0,08. **1.7.68.** 0,31. **1.7.69.** 4. **1.7.70.** 3. **1.7.71.** 0,2. **1.7.72.** 0,1. **1.7.73.** 5,25. **1.7.74.** 0,6. **1.7.75.** 0,273. **1.7.76.** 0,336. **1.7.77.** 0,2. **1.7.78.** 0,2. **1.7.79.** 0,1. **1.7.80.** 0,8. **1.7.81.** 0,4. **1.7.82.** 0,984. **1.7.83.** 0,75. **1.7.84.** 0,7. **1.7.85.** −1,1. **1.7.86.** 0,2.

2.1. Длины

2.1.1. 29. **2.1.2.** 12. **2.1.3.** 12,5. **2.1.4.** 20. **2.1.5.** 24. **2.1.6.** 13. **2.1.7.** 10. **2.1.8.** 43. **2.1.9.** 36. **2.1.10.** 5. **2.1.11.** 6. **2.1.12.** 10. **2.1.13.** 10. **2.1.14.** 22. **2.1.15.** 126. **2.1.16.** 7. **2.1.17.** 17. **2.1.18.** 33. **2.1.19.** 34. **2.1.20.** 32. **2.1.21.** 15. **2.1.22.** 94. **2.1.23.** 8,5. **2.1.24.** 14. **2.1.25.** 40. **2.1.26.** 16. **2.1.27.** 20. **2.1.28.** 11. **2.1.29.** 10. **2.1.30.** 9,5. **2.1.31.** 17. **2.1.32.** 14.

2.2. Углы

2.2.1. 88. **2.2.2.** 73. **2.2.3.** 26. **2.2.4.** 57. **2.2.5.** 37. **2.2.6.** 64. **2.2.7.** 174. **2.2.8.** 55. **2.2.9.** 75. **2.2.10.** 72. **2.2.11.** 27. **2.2.12.** 42. **2.2.13.** 45. **2.2.14.** 55. **2.2.15.** 56. **2.2.16.** 61. **2.2.17.** 68. **2.2.18.** 36. **2.2.19.** 13. **2.2.20.** 82. **2.2.21.** 1. **2.2.22.** 123. **2.2.23.** 93. **2.2.24.** 151. **2.2.25.** 175. **2.2.26.** 117. **2.2.27.** 104. **2.2.28.** 124. **2.2.29.** 45. **2.2.30.** 30. **2.2.31.** 78. **2.2.32.** 48. **2.2.33.** 124. **2.2.34.** 116. **2.2.35.** 48. **2.2.36.** 64. **2.2.37.** 63. **2.2.38.** 8. **2.2.39.** 72. **2.2.40.** 38. **2.2.41.** 18. **2.2.42.** 60. **2.2.43.** 174. **2.2.44.** 32. **2.2.45.** 110. **2.2.46.** 40. **2.2.47.** 33. **2.2.48.** 56. **2.2.49.** 106.

2.3. Тригонометрия

2.3.1. 0,1. **2.3.2.** 0,75. **2.3.3.** 1,5. **2.3.4.** 2,4. **2.3.5.** 0,75. **2.3.6.** 0,8. **2.3.7.** 0,28. **2.3.8.** 0,75. **2.3.9.** 0,8. **2.3.10.** 0,5. **2.3.11.** 3. **2.3.12.** 2,7. **2.3.13.** 4. **2.3.14.** 5. **2.3.15.** 4. **2.3.16.** 4. **2.3.17.** 15. **2.3.18.** 32. **2.3.19.** 4. **2.3.20.** 12. **2.3.21.** 0,7. **2.3.22.** 0,7. **2.3.23.** 8. **2.3.24.** 20. **2.3.25.** 30. **2.3.26.** 12. **2.3.27.** 24. **2.3.28.** 16. **2.3.29.** 1,5. **2.3.30.** 10,2. **2.3.31.** 0,7. **2.3.32.** 0,55. **2.3.33.** −0,4. **2.3.34.** −0,37. **2.3.35.** −3. **2.3.36.** −8. **2.3.37.** −2,5. **2.3.38.** −0,25. **2.3.39.** 0,6. **2.3.40.** 0,5. **2.3.41.** −0,96. **2.3.42.** 3. **2.3.43.** 9. **2.3.44.** 18. **2.3.45.** 16,5. **2.3.46.** 2. **2.3.47.** 12. **2.3.48.** 0,6. **2.3.49.** 9.

2.4. Площади

2.4.1. 56. **2.4.2.** 36. **2.4.3.** 121. **2.4.4.** 400. **2.4.5.** 12. **2.4.6.** 30. **2.4.7.** 25. **2.4.8.** 64. **2.4.9.** 26,25. **2.4.10.** 127,5. **2.4.11.** 48. **2.4.12.** 234. **2.4.13.** 84. **2.4.14.** 192. **2.4.15.** 1. **2.4.16.** 4. **2.4.17.** 6. **2.4.18.** 1,5. **2.4.19.** 36. **2.4.20.** 45. **2.4.21.** 512. **2.4.22.** 264,5. **2.4.23.** 99. **2.4.24.** 59,5. **2.4.25.** 84. **2.4.26.** 27. **2.4.27.** 10. **2.4.28.** 78. **2.4.29.** 22. **2.4.30.** 36. **2.4.31.** 24. **2.4.32.** 22. **2.4.33.** 49. **2.4.34.** 50. **2.4.35.** 20. **2.4.36.** 12. **2.4.37.** 0,25. **2.4.38.** 625.

2.5. Стереометрия

2.5.1. 60. **2.5.2.** 60. **2.5.3.** 60. **2.5.4.** 0,8. **2.5.5.** 5. **2.5.6.** 13. **2.5.7.** 3. **2.5.8.** 13. **2.5.9.** 2. **2.5.10.** 1. **2.5.11.** 14. **2.5.12.** 8. **2.5.13.** 24. **2.5.14.** 32. **2.5.15.** 6. **2.5.16.** 12. **2.5.17.** 13. **2.5.18.** 60. **2.5.19.** 78. **2.5.20.** 110. **2.5.21.** 6. **2.5.22.** 21. **2.5.23.** 5. **2.5.24.** 260. **2.5.25.** 72,25. **2.5.26.** 144. **2.5.27.** 156,25. **2.5.28.** 256. **2.5.29.** 80. **2.5.30.** 5,5. **2.5.31.** 289. **2.5.32.** 400. **2.5.33.** 18. **2.5.34.** 35. **2.5.35.** 120. **2.5.36.** 12. **2.5.37.** 40. **2.5.38.** 400. **2.5.39.** 10. **2.5.40.** 6. **2.5.41.** 108. **2.5.42.** 150. **2.5.43.** 26. **2.5.44.** 52. **2.5.45.** 7. **2.5.46.** 5. **2.5.47.** 12. **2.5.48.** 8. **2.5.49.** 84. **2.5.50.** 288. **2.5.51.** 336. **2.5.52.** 1200. **2.5.53.** 360. **2.5.54.** 720. **2.5.55.** 24. **2.5.56.** 99. **2.5.57.** 9. **2.5.58.** 91. **2.5.59.** 800. **2.5.60.** 1152. **2.5.61.** 19. **2.5.62.** 41. **2.5.63.** 2. **2.5.64.** 38. **2.5.65.** 9. **2.5.66.** 121. **2.5.67.** 40. **2.5.68.** 51. **2.5.69.** 6. **2.5.70.** 8. **2.5.71.** 216. **2.5.72.** 162. **2.5.73.** 18. **2.5.74.** 300. **2.5.75.** 60. **2.5.76.** 2. **2.5.77.** 48. **2.5.78.** 1296. **2.5.79.** 6. **2.5.80.** 4. **2.5.81.** 224. **2.5.82.** 16. **2.5.83.** 119. **2.5.84.** 3,5. **2.5.85.** 11. **2.5.86.** 126. **2.5.87.** 1. **2.5.88.** 45. **2.5.89.** 90. **2.5.90.** 40. **2.5.91.** 81. **2.5.92.** 18. **2.5.93.** 35. **2.5.94.** 42. **2.5.95.** 6. **2.5.96.** 49. **2.5.97.** 21. **2.5.98.** 6. **2.5.99.** 364,5. **2.5.100.** 343. **2.5.101.** 1000. **2.5.102.** 50.

2.5.103. 325. **2.5.104.** 252. **2.5.105.** 3. **2.5.106.** 52. **2.5.107.** 99. **2.5.108.** 6. **2.5.109.** 240. **2.5.110.** 1500. **2.5.111.** 144. **2.5.112.** 5. **2.5.113.** 4. **2.5.114.** 13,5. **2.5.115.** 1,125. **2.5.116.** 315. **2.5.117.** 260. **2.5.118.** 64. **2.5.119.** 125.

3.1. Геометрический и физический смысл производной

3.1.1. 1,5. **3.1.2.** 5,5. **3.1.3.** 0. **3.1.4.** 3. **3.1.5.** 1,5. **3.1.6.** 0,25. **3.1.7.** −1. **3.1.8.** −0,25. **3.1.9.** 4. **3.1.10.** −2; 4. **3.1.11.** 6. **3.1.12.** 4. **3.1.13.** 12. **3.1.14.** −19. **3.1.15.** 14. **3.1.16.** 2. **3.1.17.** 9. **3.1.18.** 7. **3.1.19.** −3. **3.1.20.** 6. **3.1.21.** 8. **3.1.22.** 9. **3.1.23.** 2. **3.1.24.** 7. **3.1.25.** 34. **3.1.26.** 4. **3.1.27.** 4.

3.2. Техника дифференцирования

3.2.1. 3. **3.2.2.** 0,25. **3.2.3.** 8. **3.2.4.** 32. **3.2.5.** −8. **3.2.6.** −16. **3.2.7.** −3. **3.2.8.** 1,6. **3.2.9.** 12. **3.2.10.** 45. **3.2.11.** 5,4. **3.2.12.** −95. **3.2.13.** −130. **3.2.14.** 21. **3.2.15.** 31. **3.2.16.** 0,25. **3.2.17.** 3. **3.2.18.** −9,75. **3.2.19.** −0,25. **3.2.20.** 0,25. **3.2.21.** 2,5. **3.2.22.** 2,25. **3.2.23.** 10,5. **3.2.24.** 3. **3.2.25.** 18. **3.2.26.** 27. **3.2.27.** 13. **3.2.28.** −37. **3.2.29.** −2. **3.2.30.** 4,5. **3.2.31.** 3. **3.2.32.** 2,25. **3.2.33.** 12. **3.2.34.** 5. **3.2.35.** −68. **3.2.36.** −12. **3.2.37.** 2. **3.2.38.** 4. **3.2.39.** −5. **3.2.40.** −4. **3.2.41.** 1. **3.2.42.** 1. **3.2.43.** −2,5. **3.2.44.** 2. **3.2.45.** 1. **3.2.46.** 0. **3.2.47.** −1. **3.2.48.** 4.

3.3. Исследование функций

3.3.1. 3. **3.3.2.** 2. **3.3.3.** 3. **3.3.4.** 4. **3.3.5.** 2. **3.3.6.** 1. **3.3.7.** 1. **3.3.8.** 3. **3.3.9.** 3. **3.3.10.** 4. **3.3.11.** 5. **3.3.12.** 1. **3.3.13.** 1. **3.3.14.** 5. **3.3.15.** 6. **3.3.16.** 3. **3.3.17.** −3. **3.3.18.** −3. **3.3.19.** 3. **3.3.20.** 4. **3.3.21.** 1. **3.3.22.** 0. **3.3.23.** −5. **3.3.24.** 8. **3.3.25.** 48. **3.3.26.** 51. **3.3.27.** 6. **3.3.28.** −22. **3.3.29.** −30. **3.3.30.** 15. **3.3.31.** 6,25. **3.3.32.** 256. **3.3.33.** 54. **3.3.34.** −253. **3.3.35.** 4. **3.3.36.** 11. **3.3.37.** 64. **3.3.38.** 144. **3.3.39.** 4. **3.3.40.** 15. **3.3.41.** 23. **3.3.42.** 14. **3.3.43.** 24. **3.3.44.** 25. **3.3.45.** 0. **3.3.46.** 11. **3.3.47.** 0. **3.3.48.** −2,25. **3.3.49.** 43. **3.3.50.** −42. **3.3.51.** 21. **3.3.52.** −35,5. **3.3.53.** 11,2. **3.3.54.** 10,2. **3.3.55.** 7. **3.3.56.** 12. **3.3.57.** −6. **3.3.58.** −8. **3.3.59.** 4. **3.3.60.** 6. **3.3.61.** 0. **3.3.62.** −10.

3.4. Первообразная

3.4.1. 40,5. **3.4.2.** −5. **3.4.3.** 16. **3.4.4.** 41,5. **3.4.5.** −241. **3.4.6.** 17. **3.4.7.** 42. **3.4.8.** −67,25. **3.4.9.** −14. **3.4.10.** −98,2. **3.4.11.** 14,5. **3.4.12.** −25,5. **3.4.13.** −15. **3.4.14.** 17. **3.4.15.** −19. **3.4.16.** −6. **3.4.17.** −45. **3.4.18.** −2,6. **3.4.19.** 3. **3.4.20.** −22. **3.4.21.** 10. **3.4.22.** 9. **3.4.23.** 3. **3.4.24.** 5. **3.4.25.** −1. **3.4.26.** 4. **3.4.27.** 36. **3.4.28.** 13,5. **3.4.29.** 9. **3.4.30.** 12,5. **3.4.31.** 24. **3.4.32.** −16,5.

4.1. Уравнения

4.1.1. а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$. **4.1.2.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$. **4.1.3.** а) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5},\ n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{5}$. **4.1.4.** а) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{2\pi k}{5},\ n,k\in\mathbb{Z}$; б) 15. **4.1.5.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $2\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$. **4.1.6.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\pi+\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+2\pi l$; $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi m,\ l,m\in\mathbb{Z}$. **4.1.7.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$. **4.1.8.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}$. **4.1.9.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\pi+2\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi$. **4.1.10.** а) $\pm\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$. **4.1.11.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; 2π; $\frac{13\pi}{6}$. **4.1.12.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$. **4.1.13.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) -4π; $-\frac{10\pi}{3}$; -3π; $-\frac{8\pi}{3}$. **4.1.14.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$. **4.1.15.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$. **4.1.16.** а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$. **4.1.17.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$. **4.1.18.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$. **4.1.19.** а) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) -10π. **4.1.20.** а) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) -9π. **4.1.21.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{2}$; $\frac{27\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{2}$; $\frac{31\pi}{4}$. **4.1.22.** а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) 7π; $\frac{29\pi}{4}$; 8π;

$\frac{33\pi}{4}$. **4.1.23.** а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{31\pi}{6}$. **4.1.24.** а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{3}$. **4.1.25.** а) 1; $\log_3 6$; б) $\log_3 6$. **4.1.26.** а) 1; $\log_2 7$; б) $\log_2 7$.

4.2. Неравенства и системы неравенств

4.2.1. $\left(-5;-2\sqrt{5}\right]$, 0, $\left[2\sqrt{5};5\right)$. **4.2.2.** $(-\infty;0]$, $(\log_3 2;1)$. **4.2.3.** $(-\infty;\log_7 4)$, $(1;\log_7 9]$. **4.2.4.** $(-1;3]$. **4.2.5.** 0, $(1;2)$. **4.2.6.** 0, $(1;\log_2 3)$. **4.2.7.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};-1\right]$, 0, $\left[1;\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **4.2.8.** $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)$, $(8;32)$. **4.2.9.** -2, $[1;+\infty)$. **4.2.10.** $\left[0;\frac{1}{6}\right)$, 6. **4.2.11.** 2. **4.2.12.** 6. **4.2.13.** $[-3;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;3]$. **4.2.14.** $[-\log_2 5;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $[3;+\infty)$. **4.2.15.** $\left(0;\frac{1}{8}\right]$, $\left[\frac{1}{4};\log_5 2\right]$. **4.2.16.** $[-2;-1)$, $\left[-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;1)$. **4.2.17.** $(-2;-1]$, $[8;+\infty)$. **4.2.18.** $(-3;-2]$, $[6;+\infty)$. **4.2.19.** $(-\infty;-3]$, $\left[-\sqrt{6};-2\right)$. **4.2.20.** $(-\infty;-4]$, $\left[-2\sqrt{3};-3\right)$. **4.2.21.** 2, $(-\infty;\log_3 7)$. **4.2.22.** $(-\infty;3)$, $\log_2 10$. **4.2.23.** 2. **4.2.24.** $\frac{1}{4}$, $[1;+\infty)$.

4.3. Уравнения и неравенства с параметром

4.3.1. 5. **4.3.2.** $a>0$: $x=\frac{6a+3+\sqrt{32a+9}}{2}$; $a\in\left[-\frac{9}{32};0\right]$: $x=\frac{6a+3\pm\sqrt{32a+9}}{2}$; при прочих a корней нет. **4.3.3.** ±1; $\pm\sqrt{7}$. **4.3.4.** $a\in[-2;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\sqrt[3]{4}\right)$. **4.3.5.** $a\in(1;7]$. **4.3.6.** $a\in\left(\frac{1}{2};4+\sqrt{6}\right)$. **4.3.7.** $-2<a<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<a<2$. **4.3.8.** $-\sqrt{5}<a<-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$. **4.3.9.** $a=\frac{4}{5}$; $a>\frac{5}{6}$. **4.3.10.** $a\leqslant-\frac{57}{16}$. **4.3.11.** $-6<a\leqslant1$; $a=8$; $9\leqslant a<10$. **4.3.12.** $a\leqslant-5$; $a=5$; $a\geqslant11$. **4.3.13.** $1<a<2$. **4.3.14.** $-5\leqslant a<5\sqrt{2}-10$. **4.3.15.** $-5\sqrt{5}<a\leqslant-5$; $5\leqslant a<5\sqrt{5}$. **4.3.16.** $-\frac{7}{4}\leqslant a\leqslant8$. **4.3.17.** $1-\sqrt{10}<a<-2$; $a=0$. **4.3.18.** $1\leqslant a<2$. **4.3.19.** $0<a\leqslant1$. **4.3.20.** $0<a\leqslant1$. **4.3.21.** $-1\leqslant a<0$. **4.3.22.** $1\leqslant a<49$. **4.3.23.** $a=-3$; $a=1{,}5$. **4.3.24.** $a=1$; $a=3$. **4.3.25.** $a=\pi$. **4.3.26.** $a=\pi$.

4.4. Планиметрия

4.4.1. б) 13 или $\frac{130}{3}$. **4.4.2.** $\frac{7}{2}$ или $\frac{51}{26}$. **4.4.3.** $\sqrt{2}$ или $\sqrt{6}$. **4.4.4.** б) $3\pm2\sqrt{2}$. **4.4.5.** б) $6\sqrt{7}-9\sqrt{3}$ или $6+3\sqrt{3}$. **4.4.6.** б) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **4.4.7.** б) $\frac{25}{24}$ или $\frac{25}{12}$. **4.4.8.** б) $\frac{30}{13}$ или 10. **4.4.9.** б) 4 или $\frac{260}{59}$. **4.4.10.** б) 2 или 5. **4.4.11.** б) 17,5 или 42,5. **4.4.12.** б) 11,2. **4.4.13.** б) 96. **4.4.14.** б) 3. **4.4.15.** б) $\frac{116}{7}$. **4.4.16.** б) $\frac{115}{6}$. **4.4.17.** б) $\sqrt{10}$. **4.4.18.** б) 30. **4.4.19.** б) 37,5. **4.4.20.** б) $\sqrt{2}$. **4.4.21.** б) 2. **4.4.22.** б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

4.5. Стереометрия

4.5.1. $2\operatorname{arctg}\frac{60}{91}$. **4.5.2.** $\operatorname{arctg}\frac{17}{40}$. **4.5.3.** $\frac{120}{13}$. **4.5.4.** $\frac{24}{5}$. **4.5.5.** 6. **4.5.6.** $\frac{36}{5}$. **4.5.7.** 4. **4.5.8.** 30°. **4.5.9.** $2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **4.5.10.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **4.5.11.** $\arccos\frac{12\sqrt{7}}{35}$. **4.5.12.** $\operatorname{arctg}\frac{6}{5}$. **4.5.13.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{32}$. **4.5.14.** 90°. **4.5.15.** $\operatorname{arctg}3$. **4.5.16.** $\frac{\sqrt{193}}{5}$. **4.5.17.** 80. **4.5.18.** б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}}{3}$. **4.5.19.** б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$. **4.5.20.** б) $8+2\sqrt{2}$. **4.5.21.** б) 44. **4.5.22.** б) $\arccos\frac{14}{55}$. **4.5.23.** б) 30°. **4.5.24.** б) $\frac{12}{5}$. **4.5.25.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **4.5.26.** $2\sqrt{3}$.

4.6. Арифметика и алгебра

4.6.1. 585. **4.6.2.** 68 или 86. **4.6.3.** 2, 6, 42, 1806. **4.6.4.** (2; 1), (1; 2), (2; 2). **4.6.5.** (2; 3), (3; 5; 7). **4.6.6.** 1 и 4131. **4.6.7.** 1 и 875. **4.6.8.** $a = 3$, $b = 2$; $a = 7$, $b = 2$. **4.6.9.** а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$. **4.6.10.** а) 23; б) 2645. **4.6.11.** а) да; б) нет; в) 26. **4.6.12.** а) например, 15 раз число 19 и число 78; б) нет; в) 1650. **4.6.13.** а) да; б) нет; в) 18,5. **4.6.14.** а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$. **4.6.15.** а) да; б) да; в) 15. **4.6.16.** а) например, 2529; б) нет; в) число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел). **4.6.17.** а) да; б) нет; в) 20. **4.6.18.** а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$. **4.6.19.** а) да; б) нет; в) $\frac{10}{17}$. **4.6.20.** а) да; б) нет; в) $\frac{77}{134}$. **4.6.21.** а) да; б) нет; в) 9657 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 24 числа). **4.6.22.** а) да; б) нет; в) 6877 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

4.7. Экономические задачи

4.7.1. 500. **4.7.2.** 12,5 %. **4.7.3.** $p = 9$. **4.7.4.** 10. **4.7.5.** 80,5 млн руб. **4.7.6.** 20,25 млн руб. **4.7.7.** 5. **4.7.8.** 10. **4.7.9.** 20. **4.7.10.** 25. **4.7.11.** 3. **4.7.12.** 0,8 млн руб. **4.7.13.** 106 млн руб. **4.7.14.** 73 млн руб. **4.7.15.** 7,5 млн руб. **4.7.16.** 8,25 млн руб.

Тренировочный вариант 1

1. 66. **2.** 6. **3.** 0,14. **4.** 0,55. **5.** 87. **6.** 5. **7.** 23. **8.** 60. **9.** 90. **10.** −10. **11.** 3. **12.** а) $\pm\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi + \arcsin\frac{1}{3}$. **13.** б) $\frac{16\sqrt{39}}{13}$. **14.** $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right] \cup \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. **15.** 18 млн руб. **16.** б) 75,5. **17.** $a = 0$, $a = \pm 1$, $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.** а) −66, −18; б) −56; в) 2, 12.

Тренировочный вариант 2

1. 14. **2.** 10. **3.** 0,11. **4.** 0,75. **5.** 24. **6.** 4. **7.** −2. **8.** 120. **9.** 15. **10.** 8. **11.** 9. **12.** а) $\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi + \arcsin\frac{1}{4}$. **13.** б) $\frac{32\sqrt{5}}{5}$. **14.** $\left[-\frac{10}{9}; \frac{10}{9}\right] \cup \left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$. **15.** 27 млн руб. **16.** б) 46. **17.** $a = 0$, $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. **18.** а) −78, −18; б) −40; в) 2, 8.

Тренировочный вариант 3

1. 38. **2.** 156. **3.** 0,5. **4.** 0,7. **5.** 88. **6.** 81. **7.** 21. **8.** 90. **9.** 54. **10.** 15. **11.** 8. **12.** а) $-\arcsin\frac{2}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\pi - \arcsin\frac{2}{5} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arcsin\frac{2}{5}$. **13.** б) $\frac{125\sqrt{5}}{\sqrt{87}}$. **14.** $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right] \cup \left\{-\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right\} \cup \left[\frac{7}{5}; +\infty\right)$. **15.** 22 млн руб. **16.** б) 23. **17.** $a = 0$, $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \pm 1$. **18.** а) −100, −20; б) −34; в) 4, 6.

Тренировочный вариант 4

1. 44. **2.** 30. **3.** 0,25. **4.** 0,8. **5.** 21. **6.** 4. **7.** 3. **8.** 120. **9.** 68. **10.** 12. **11.** 5. **12.** а) $\arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi - \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi - \arcsin\frac{1}{5}$. **13.** б) $32{,}8\sqrt{10}$. **14.** $\left[-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right] \cup \left\{-\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right\}$. **15.** 25 млн руб. **16.** б) 68,5. **17.** $a = 0$, $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \pm 3$. **18.** а) -40, -16; б) -64; в) 3, 7.

Тренировочный вариант 5

1. 74. **2.** 164. **3.** 0,25. **4.** 0,9. **5.** 9. **6.** 9. **7.** -19. **8.** 60. **9.** 90. **10.** -16. **11.** 8. **12.** а) $-\arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\pi + \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\pi + \arcsin\frac{3}{4}$. **13.** б) $\frac{32\sqrt{10}}{5}$. **14.** $(-\infty; -3] \cup \left\{-\frac{4}{7}; \frac{4}{7}\right\} \cup [3; +\infty)$. **15.** 33 млн руб. **16.** б) 31,5. **17.** $a = 0$, $a = \pm 4$. **18.** а) -27, -15; б) -44; в) 3, 5.

Тренировочный вариант 6

1. 5. **2.** 8. **3.** 0,15. **4.** 0,5. **5.** 1,5. **6.** -56. **7.** 7. **8.** 0,0025. **9.** 18. **10.** 2. **11.** $-4{,}5$. **12.** а) 2, 3; б) 2. **13.** б) 18π. **14.** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup (1; +\infty)$. **15.** 16 400 руб. **16.** б) 49. **17.** $-1 - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1 + \sqrt{2}$. **18.** а) да; б) нет; в) 5.

Тренировочный вариант 7

1. 2. **2.** 280. **3.** 0,4. **4.** $-0{,}1$. **5.** 2,5. **6.** -172. **7.** 18. **8.** 0,045. **9.** 15. **10.** 1,5. **11.** 9,1. **12.** а) -3, 2; б) 2. **13.** б) 68π. **14.** $(-\infty; -1{,}5) \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. **15.** 18 000 руб. **16.** б) 36,75. **17.** $2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **18.** а) да; б) нет; в) 2.

Тренировочный вариант 8

1. 5,5. **2.** 168. **3.** 0,2. **4.** 1. **5.** 5. **6.** 92. **7.** 1. **8.** 0,03. **9.** 19. **10.** -2. **11.** 5,25. **12.** а) -1, 3; б) -1. **13.** б) $46{,}8\pi$. **14.** $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup (3; +\infty)$. **15.** 15 400 руб. **16.** б) 36,75. **17.** $2 - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2 + \sqrt{2}$. **18.** а) да; б) нет; в) 4.

Тренировочный вариант 9

1. 8. **2.** 56. **3.** 0,3. **4.** 0,2. **5.** 1,5. **6.** -80. **7.** 8. **8.** 0,005. **9.** 21. **10.** $-1{,}5$. **11.** 7,1. **12.** а) -2, 2; б) -2. **13.** б) 10π. **14.** $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **15.** 20 400 руб. **16.** б) 12,25. **17.** $-2 - 2\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -2 + 2\sqrt{2}$. **18.** а) да; б) нет; в) 3.

Тренировочный вариант 10

1. 9,5. **2.** 336. **3.** 0,15. **4.** $-1{,}1$. **5.** 0. **6.** 46. **7.** 5. **8.** 0,018. **9.** 24. **10.** $-0{,}5$. **11.** 13,5. **12.** а) $-\frac{1}{3}$, 5; б) 5. **13.** б) 20π. **14.** $(-\infty; -2{,}5) \cup [5; +\infty)$. **15.** 15 800 руб. **16.** б) 85,75. **17.** $3 - 2\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$. **18.** а) да; б) нет; в) 2.

Тренировочный вариант 11

1. 15. **2.** 0,5. **3.** 0,35. **4.** 0,2. **5.** 14. **6.** 121. **7.** 3,5. **8.** 25. **9.** 21. **10.** -10. **11.** -7. **12.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) -3π; -2π; $-\frac{9\pi}{4}$. **13.** б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **14.** $[-4;\,1]\cup\{2\}$. **15.** 5. **16.** $\operatorname{arctg}\frac{7}{17}$. **17.** При $a=2$ решения $x=0$ и $x=\pm\arcsin\frac{3}{4}$. **18.** а) Да, например, 1, 2, 3, 4, 8 и 9; б) нет; в) 87.

Тренировочный вариант 12

1. 21. **2.** 13,5. **3.** 0,1. 4. 0,2. **5.** -13. **6.** 5. **7.** $-0{,}5$. **8.** 40. **9.** 23. **10.** $-10{,}5$. **11.** -11. **12.** а) $\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$. **13.** б) 1,5. **14.** $[-1;\,1]\cup\{4\}$. **15.** 3. **16.** $\operatorname{arctg}\frac{17}{31}$. **17.** При $a=1$ решения $x=0$ и $x=\pm\frac{\pi}{6}$. **18.** а) Да, например, 1, 2, 3, 4, 6, 11 и 12; б) нет; в) 107.

Тренировочный вариант 13

1. 1,2. **2.** 665,5. **3.** 0,15. **4.** 0,5. **5.** 13. **6.** 8. **7.** 4,5. **8.** 12,5. **9.** 28. **10.** 4. **11.** -10. **12.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{2}$. **13.** б) $2\sqrt{3}$. **14.** $[-2;\,3]\cup\{6\}$. **15.** 8. **16.** $\operatorname{arctg}\frac{7}{23}$. **17.** При $a=3$ единственное решение $x=0$. **18.** а) Да, например, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 15 и 16; б) нет; в) 67.

Тренировочный вариант 14

1. 4,8. **2.** 864. **3.** 0,3. **4.** 0,1. **5.** -6. **6.** 3. **7.** $-6{,}5$. **8.** 37,5. **9.** 27. **10.** $-15{,}5$. **11.** -4. **12.** а) $\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $4\pi-\arccos\frac{1}{4}$; $4\pi+\arccos\frac{1}{4}$. **13.** б) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **14.** $[4;\,9)\cup\{11\}$. **15.** 12. **16.** $\operatorname{arctg}\frac{49}{31}$. **17.** При $a=0$ единственное решение $x=0$. **18.** а) Да, например, 1, 2, 3, 4, 5 и 6; б) нет; в) 139.

Тренировочный вариант 15

1. 1,2. **2.** 1372. **3.** 0,4. **4.** 0,8. **5.** 10. **6.** 4. **7.** $-0{,}5$. **8.** 75. **9.** 26. **10.** 14,5. **11.** -3. **12.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) -6π; -5π; $-\frac{13\pi}{2}$. **13.** б) 1,5. **14.** $[2;\,3]\cup\{9\}$. **15.** 5. **16.** $\operatorname{arctg}\frac{71}{49}$. **17.** При $a=3$ единственное решение $x=0$. **18.** а) Да, например, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 23 и 24; б) нет; в) 153.

Тренировочный вариант 16

1. 26,5. **2.** 5. **3.** 0,5. **4.** 0,384. **5.** -5. **6.** 6. **7.** -25. **8.** 30. 9. 17. **10.** -15. **11.** -1. **12.** а) 4; $-1{,}5$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-1{,}5$; $\frac{2\pi}{3}$. **13.** б) $4\sqrt{2}$. **14.** $\left(-\infty;\,-\sqrt{2}\right]\cup\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\,0\right)\cup\left(0;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\,+\infty\right)$. **15.** 5. **16.** б) $\frac{7\sqrt{19}}{38}$. **17.** -3; $-\frac{1}{2}-\sqrt{6}$. **18.** а) Да; б) нет; в) $\frac{317}{53}$.

Тренировочный вариант 17

1. 51,5. **2.** 37. **3.** 0,5. **4.** 0,336. **5.** 6. **6.** 2. **7.** 6. **8.** 135. **9.** 15. **10.** -20. **11.** 6. **12.** а) 4; 7; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 7; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$. **13.** б) $12\sqrt{2}$. **14.** $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]\cup\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)\cup\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. **15.** 11. **16.** $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. **17.** -2; $\frac{1}{2}-\sqrt{6}$. **18.** а) Да; б) нет; в) $\frac{961}{169}$.

Тренировочный вариант 18

1. 24,5. **2.** 8. **3.** 0,375. **4.** 0,273. **5.** -9. **6.** 2. **7.** 0. **8.** 45. **9.** 16. **10.** -15. **11.** -3. **12.** а) 3; -2; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) -2; $-\frac{5\pi}{6}$. **13.** б) $24\sqrt{3}$. **14.** $(-\infty; -2\,]\cup\left[-\frac{1}{2}; 0\right)\cup\left(0; \frac{1}{2}\right]\cup[2; +\infty)$. **15.** 25. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **17.** -2; $-\frac{\sqrt{7}}{2}$. **18.** а) Да; б) нет; в) $\frac{941}{149}$.

Тренировочный вариант 19

1. 27,5. **2.** 20. **3.** 0,375. **4.** 3. **5.** 9. **6.** 2. **7.** 28. **8.** 75. **9.** 16. **10.** 16. **11.** 10. **12.** а) 8; -12; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 8; $\frac{19\pi}{6}$. **13.** б) 6. **14.** $(-\infty; -6\,]\cup\left[-\frac{1}{6}; 0\right)\cup\left(0; \frac{1}{6}\right]\cup[6; +\infty)$. **15.** 56. **16.** $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. **17.** -1; $2-2\sqrt{2}$. **18.** а) Да; б) нет; в) $\frac{931}{139}$.

Тренировочный вариант 20

1. 34,5. **2.** 40. **3.** 0,0625. **4.** 0,6. **5.** -4. **6.** 2. **7.** -10. **8.** 45. **9.** 18. **10.** 0,2. **11.** -5. **12.** а) 1; $-\frac{1}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{1}{4}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$. **13.** б) 40. **14.** $\left(-\infty; -5\sqrt{5}\right]\cup\left[-\frac{\sqrt{5}}{25}; 0\right)\cup\left(0; \frac{\sqrt{5}}{25}\right]\cup\left[5\sqrt{5}; +\infty\right)$. **15.** 66. **16.** $\frac{7\sqrt{13}}{26}$. **17.** -1; $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4}$. **18.** а) Да; б) нет; в) $\frac{307}{43}$.

Тренировочный вариант 21

1. 76,5. **2.** 1. **3.** 0,096. **4.** 0,08. **5.** 4. **6.** 2. **7.** -3. **8.** 50. **9.** -4. **10.** 31. **11.** -6. **12.** а) $-1-\sqrt{3}$; $-1-\sqrt{5}$; б) $-1-\sqrt{5}$. **13.** б) $\arcsin\left(\frac{12\sqrt{7}}{70}\right)$. **14.** $(0; 0{,}01\,]$. **15.** 18,75. **16.** б) 24. **17.** $\left[\frac{4}{3}; 12\right]$. **18.** а) Да; б) нет; в) $99\cdot 58=5742$.

Тренировочный вариант 22

1. 7. **2.** 2. **3.** 0,032. **4.** 0,31. **5.** 4. **6.** -2. **7.** 2. **8.** 100. **9.** 7. **10.** -13. **11.** 5. **12.** а) $-2-\sqrt{3}$; $-1-\sqrt{7}$; б) $-1-\sqrt{7}$. **13.** б) $\arcsin\left(\frac{60\sqrt{3}}{13\sqrt{589}}\right)$. **14.** $(0; 100)$. **15.** 15. **16.** б) 24. **17.** $\left[\frac{3}{8}; 6\right]$. **18.** а) Да; б) нет; в) $99\cdot 49=4851$.

Тренировочный вариант 23

1. 59. **2.** 5. **3.** 0,0189. **4.** 0,005. **5.** 4. **6.** 2. **7.** 0. **8.** 200. **9.** 8. **10.** 34. **11.** 2. **12.** а) $-2-\sqrt{5}$; $-1-\sqrt{5}$; б) $-2-\sqrt{5}$. **13.** б) $\arcsin\left(\dfrac{84\sqrt{3}}{25\sqrt{481}}\right)$. **14.** $\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5}{12}; +\infty\right)$. **15.** 37,5. **16.** б) 20. **17.** $\left[\dfrac{5}{4}; 80\right]$. **18.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 59 = 5841$.

Тренировочный вариант 24

1. 58. **2.** 3. **3.** 0,24. **4.** 0,5. **5.** 4. **6.** -9. **7.** 0. **8.** 400. **9.** 4. **10.** -13. **11.** $-29{,}25$. **12.** а) $-1-\sqrt{6}$; $-1-\sqrt{7}$; б) $-1-\sqrt{6}$. **13.** б) $\arcsin\left(\dfrac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{91}}\right)$. **14.** $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{8}; +\infty\right)$. **15.** 30. **16.** б) 60. **17.** $\left[\dfrac{4}{9}; 36\right]$. **18.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 50 = 4950$.

Тренировочный вариант 25

1. 51,5. **2.** 3. **3.** 0,0064. **4.** 1. **5.** 4. **6.** -10. **7.** 1. **8.** 300. **9.** 5. **10.** 17. **11.** $-36{,}25$. **12.** а) $-2\sqrt{5}+1$; б) $-2\sqrt{5}+1$. **13.** б) $\arcsin\left(\dfrac{180\sqrt{3}}{41\sqrt{1159}}\right)$. **14.** $[-6; 0) \cup [1; +\infty)$. **15.** 10. **16.** б) 48. **17.** $\left[\dfrac{4}{9}; 54\right]$. **18.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 50 = 4950$.

Тренировочный вариант 26

1. 25. **2.** 24. **3.** 0,288. **4.** 5,25. **5.** 2. **6.** 22. **7.** 2. **8.** 60. **9.** 27. **10.** 2. **11.** -17. **12.** а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2}$; $-\dfrac{13\pi}{6}$. **13.** б) $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$. **14.** $(-1; 2] \cup [3; +\infty)$. **15.** 24 млн руб. **16.** б) $48\sqrt{3}$. **17.** $k \leqslant -4$; $k \geqslant 5$. **18.** а) Да; б) нет; в) 5.

Тренировочный вариант 27

1. 135,2. **2.** 36. **3.** 0,357. **4.** 0,15. **5.** -4. **6.** 12. **7.** 4. **8.** 40. **9.** 32. **10.** 1. **11.** -24. **12.** а) $\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{2}$; $-\dfrac{5\pi}{2}$; -3π. **13.** б) $\arccos\left(\dfrac{3}{13}\right)$. **14.** $(-0{,}5; 0) \cup [0{,}5; 1] \cup (2; 2{,}5)$. **15.** 20,5 млн руб. **16.** б) $504\sqrt{35}$. **17.** $-5 < k < 3$. **18.** а) Да; б) нет; в) 4.

Тренировочный вариант 28

1. 9,375. **2.** 144. **3.** 0,384. **4.** 0,1. **5.** 2. **6.** 41. **7.** 6. **8.** 30. **9.** 38. **10.** 7. **11.** -12. **12.** а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) 4π; $\dfrac{8\pi}{3}$; $\dfrac{10\pi}{3}$. **13.** б) $\arccos\left(\dfrac{1}{17}\right)$. **14.** $(-4; -3) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2; -1)$. **15.** 38 млн руб. **16.** б) $120\sqrt{15}$. **17.** $k \leqslant -\sqrt{2}$; $k \geqslant 1$. **18.** а) Да; б) нет; в) 7.

Тренировочный вариант 29

1. 31,25. **2.** 36. **3.** 0,1539. **4.** 0,2. **5.** -4. **6.** 27. **7.** -1. **8.** 50. **9.** 37. **10.** -6. **11.** -14. **12.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{31\pi}{6}$; 4π; 5π. **13.** б) $\arccos\left(\dfrac{53}{71}\right)$. **14.** $[3; +\infty)$. **15.** 28 млн руб. **16.** б) $360\sqrt{2}$. **17.** $k \leqslant -1$; $k \geqslant \sqrt{5}$. **18.** а) Да; б) нет; в) 6.

Тренировочный вариант 30

1. 8,45. **2.** 7,2. **3.** 0,2304. **4.** 4. **5.** 2. **6.** 5. **7.** 1. **8.** 40. **9.** 31. **10.** -5. **11.** -27. **12.** а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\pi$; -2π. **13.** б) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$. **14.** $[1{,}44; 1{,}5]$. **15.** 33,5 млн руб. **16.** б) $\frac{3000\sqrt{7}}{7}$. **17.** $k \leqslant -3$; $k \geqslant \sqrt{13}$. **18.** а) Да; б) нет; в) 4.

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 1

12 а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{4}{\sin x} + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{4}{\sin x} + 4 = 0$ при условии $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{4}{\sin x} + 4 = 0;$$

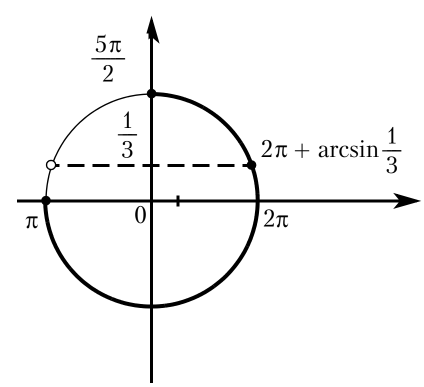
$$\frac{(1 - \sin^2 x - 4\sin x + 4\sin^2 x)}{\sin^2 x} = 0;$$

$$\frac{3\sin^2 x - 4\sin x + 1}{\sin^2 x} = 0;$$

$$\frac{(3\sin x - 1)(\sin x - 1)}{\sin^2 x} = 0;$$

$$(3\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \text{ при условии } \sin x \neq 0 \text{ и } \cos x \neq 0.$$

Значит, $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{3}$. Условию $\cos x \neq 0$ удовлетворяет только $\sin x = \frac{1}{3}$, откуда $x = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим число $2\pi + \arcsin\frac{1}{3}$.

Ответ: а) $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi + \arcsin\frac{1}{3}$.

13 В n-угольной пирамиде $SA_1A_2...A_n$ с вершиной S тангенс двугранного угла при каждом ребре основания равен 0,75.

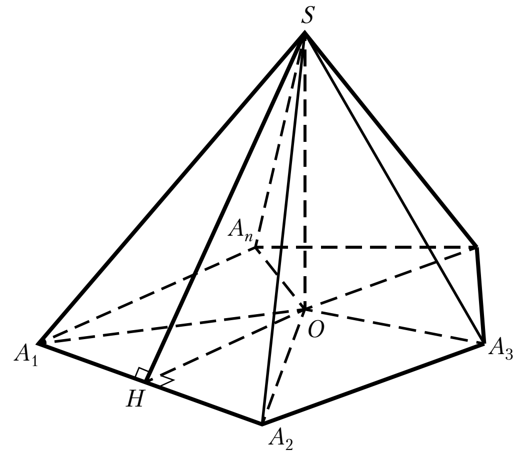
а) Докажите, что площадь полной поверхности пирамиды относится к площади основания как $9:4$.

б) Найдите объём пирамиды, если в основании лежит ромб, диагонали которого относятся как $2:3$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 20.

Решение.

а) Так как двугранные углы при рёбрах основания пирамиды равны, то в основание пирамиды можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием высоты пирамиды. Тогда площадь основания пирамиды может быть вычислена по формуле $S_{\text{осн}} = pr$, где p — полупериметр основания, r — радиус вписанной в основание окружности.

Пусть SO — высота пирамиды $SA_1A_2...A_n$. Из точки O опустим перпендикуляр OH на сторону AA_1 (OH — радиус вписанной в основание пирамиды окружности). Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AH \perp A_1A_2$. Значит, угол SHO является линейным углом двугранного угла при ребре A_1A_2, то есть $\operatorname{tg}\angle SHO = 0{,}75$.



В прямоугольном треугольнике SHO:

$$SO = OH \cdot \operatorname{tg}\angle SHO = \frac{3}{4}r,$$

$$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \frac{5}{4}r,$$

где r — радиус вписанной в основание окружности.

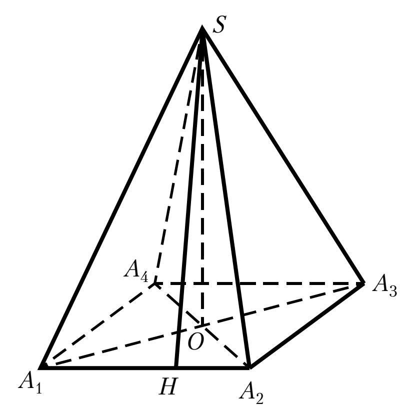
Аналогично высоты остальных боковых граней пирамиды, проведённые к сторонам основания, равны $\frac{5}{4}r$. Поэтому площадь боковой поверхности можно вычислить по формуле $S_{\text{бок}} = p \cdot \frac{5}{4}r$, где p — полупериметр основания, r — радиус вписанной в основание окружности.

Площадь полной поверхности пирамиды:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = pr + p \cdot \frac{5}{4}r = \frac{9}{4}pr.$$

Получаем: $\frac{S_{\text{полн}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{9}{4}$.

б) Так как площадь полной поверхности пирамиды относится к площади её основания как $9:4$, то площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади её основания как $5:4$, получаем: $S_{\text{осн}} = \frac{4}{5}S_{\text{бок}} = 16$.



Основанием пирамиды является ромб $A_1A_2A_3A_4$, диагонали которого относятся как $2:3$, тогда: $A_2A_4 = 4x$, $A_1A_3 = 6x$. Получаем:

$$S_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{2}A_2A_4 \cdot A_1A_3 = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 6x = 16,$$

откуда $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

В прямоугольном треугольнике A_1OA_2:

$$OH = \frac{A_1O \cdot OA_2}{A_1A_2} = \frac{3x \cdot 2x}{x\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{39}}{13}.$$

В прямоугольном треугольнике SOH:

$$SO = OH \cdot \operatorname{tg}\angle SHO = \frac{4\sqrt{39}}{13} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{39}}{13}.$$

Получаем: $V = \frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3A_4} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{13} = \frac{16\sqrt{39}}{13}$.

Ответ: б) $\frac{16\sqrt{39}}{13}$.

14 Решите неравенство $\left|9x^2-9|x|+2\right| \geqslant 3\left|3x^2-4|x|+1\right|$.

Решение.

Обе части неравенства неотрицательны, поэтому неравенство

$$\left|9x^2-9|x|+2\right| \geqslant 3\left|3x^2-4|x|+1\right|$$

равносильно неравенству $(9x^2-9|x|+2)^2 \geqslant 9(3x^2-4|x|+1)^2$.

$$(9x^2-9|x|+2)^2-9(3x^2-4|x|+1)^2 \geqslant 0;$$
$$(9x^2-9|x|+2-9x^2+12|x|-3)(9x^2-9|x|+2+9x^2-12|x|+3) \geqslant 0;$$
$$(3|x|-1)(18x^2-21|x|+5) \geqslant 0;$$
$$(3|x|-1)^2(6|x|-5) \geqslant 0.$$

Получаем: $|x|=\frac{1}{3}$ или $|x| \geqslant \frac{5}{6}$, значит, $x=\frac{1}{3}$; $x=-\frac{1}{3}$; $x \geqslant \frac{5}{6}$ или $x \leqslant -\frac{5}{6}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right] \cup \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 5 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 4000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Если площадь первого поля разделить между картофелем и свёклой в отношении $a:b$, то в этом случае фермер получит доход

$$\frac{5a}{a+b}\cdot 400\cdot 4000+\frac{5b}{a+b}\cdot 300\cdot 5000 = 8\,000\,000-\frac{1\,500\,000b}{a+b} \leqslant 8\,000\,000 \text{ рублей.}$$

Таким образом, выгоднее всё первое поле отдать под картофель.

Если площадь второго поля разделить между картофелем и свёклой в отношении $a:b$, то в этом случае фермер получит доход

$$\frac{5a}{a+b}\cdot 300\cdot 4000+\frac{5b}{a+b}\cdot 400\cdot 5000 = 10\,000\,000-\frac{4\,000\,000a}{a+b} \leqslant 10\,000\,000 \text{ рублей.}$$

Таким образом, выгоднее всё второе поле отдать под свёклу.

Отдав первое поле под картофель, а второе под свёклу, фермер сможет получить наибольший доход:

$$5\cdot 400\cdot 4000+5\cdot 400\cdot 5000 = 18\,000\,000 \text{ (рублей).}$$

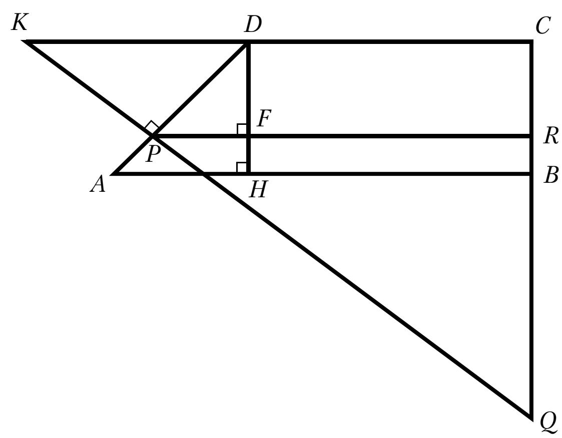
Ответ: 18 млн рублей.

16 Основания AB и CD прямоугольной трапеции $ABCD$ равны соответственно 11 и 7, а меньшая боковая сторона BC равна 4. На стороне AD отмечена точка P так, что $AP:PD = 1:3$. Через точку P проведена прямая, перпендикулярная стороне AD и пересекающая прямые CD и BC соответственно в точках K и Q.

а) Докажите, что площадь треугольника DPK относится к площади трапеции $ABCD$ как $1:4$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CDPQ$.

Решение.



а) Проведём высоту DH трапеции $ABCD$, тогда $AH = AB - CD$, а $DH = CB$. В прямоугольном треугольнике ADH катеты $AH = 4$ и $DH = 4$, получаем: $AD = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$. Так как $AP:PD = 1:3$, получаем: $DP = \frac{3}{4}AD = 3\sqrt{2}$.

Треугольник ADH равнобедренный, прямая KP перпендикулярна прямой AD, следовательно, прямоугольный треугольник DPK равнобедренный с катетом $3\sqrt{2}$ и площадью 9.

Так как площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{11+7}{2} \cdot 4 = 36$, а площадь треугольника DPK равна 9, то $\frac{S_{DPK}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

б) Через точку P проведём прямую, параллельную основаниям трапеции и пересекающую сторону BC в точке R, а высоту DH — в точке F. Площадь четырёхугольника $CDPQ$ будет равна сумме площадей треугольника PQR и трапеции $PDCR$.

Из подобия треугольников PDF и ADH получаем: $PF = \frac{3}{4}AH = 3$, $DF = \frac{3}{4}DH = 3$. Следовательно, $PR = PF + FR = 3 + 7 = 10$.

Площадь трапеции $PDCR$:

$$S_{PDCR} = \frac{CD + PR}{2} \cdot DF = 25{,}5.$$

Прямоугольный треугольник PQR равнобедренный с катетом 10 и площадью 50.

Площадь четырёхугольника $PDCQ$:

$$S_{PDCQ} = 25{,}5 + 50 = 75{,}5.$$

Ответ: б) 75,5.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2}{4}+a^2}+\sqrt{xa}=\dfrac{x^2}{4}+a^2+xa, \\ xa\left(\dfrac{x^2}{4}+a^2\right)-xa-\dfrac{x^2}{4}-a^2+1 \geqslant 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Пусть $f=\dfrac{x^2}{4}+a^2$, $g=xa$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{f}+\sqrt{g}=f+g, \\ fg-f-g+1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{f}+\sqrt{g}=f+g, \\ (f-1)(g-1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим неравенство, рассмотрев следующие случаи:

1) $f>1$ и $q>1$. Тогда $\sqrt{f}<f$ и $\sqrt{g}<g$, поэтому уравнение $\sqrt{f}+\sqrt{g}=f+g$ не имеет решений, следовательно, и система не имеет решений.

2) $0<f<1$ и $0<g<1$. Тогда $\sqrt{f}>f$ и $\sqrt{g}>g$, поэтому уравнение $\sqrt{f}+\sqrt{g}=f+g$ не имеет решений, следовательно, и система не имеет решений.

3) $f=\dfrac{x^2}{4}+a^2=1$. Тогда $\sqrt{f}=f$, и уравнение примет вид $\sqrt{g}=g$, откуда $g=xa=0$ или $g=xa=1$. Получаем: $\dfrac{x^2}{4}+a^2=1$ и $xa=0$, откуда либо $a=0$, $x=\pm 2$, либо $a=\pm 1$, $x=0$; или $\dfrac{x^2}{4}+a^2=1$ и $xa=1$, откуда либо $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\sqrt{2}$, либо $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\sqrt{2}$. Следовательно, при $a=0$, $a=-1$, $a=1$, $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ система имеет решения.

4) $f=\dfrac{x^2}{4}+a^2=0$. Тогда $a=x=0$, $g=ax=0$. Следовательно, при $a=0$ система имеет решение.

5) $g=ax=0$, тогда $a=0$ или $x=0$, а уравнение примет вид $\sqrt{f}=f$, где $f=\dfrac{x^2}{4}+a^2$. При $a=0$ получаем уравнение $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{x^2}{4}$, и система имеет три решения: $x=0$, $x=-2$, $x=2$. При $x=0$ получаем уравнение $\sqrt{a^2}=a^2$, корни которого $a=-1$, $a=1$, $a=0$.

6) $g=ax=1$. Тогда $a\neq 0$, $x\neq 0$, $\sqrt{g}=g$, а уравнение примет вид $\sqrt{f}=f$, где $f=\dfrac{x^2}{4}+a^2$. При $a=\dfrac{1}{x}$ получаем уравнение $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{x^2}=1$, и система имеет два решения: $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$. При $x=\sqrt{2}$ получаем $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а при $x=-\sqrt{2}$ получаем $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, система имеет решения при $a=-1$, $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $a=0$, $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $a=1$.

Ответ: $a=0$, $a=\pm 1$, $a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

18 Известно, что квадратное уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все значения, которые может принимать a, если $b = 65$.

б) Найдите все значения, которые может принимать a, если $a + b = 52$.

в) Найдите все натуральные числа, которые могут быть корнями уравнения, если $b^2 - a^2 = 380$.

Решение.

Будем считать, что уравнение имеет натуральные корни c и d, где $c < d$.

а) По теореме Виета

$$a = -(c + d),\ 65 = b = cd,$$

откуда $c = 1$, $d = 65$ или $c = 5$, $d = 13$. В первом случае $a = -(1 + 65) = -66$, во втором $a = -(5 + 13) = -18$.

б) По теореме Виета

$$a = -(c + d),\ b = cd, \text{ тогда}$$
$$52 = a + b = -(c + d) + cd = (c - 1)(d - 1) - 1, \text{ откуда}$$
$$(c - 1)(d - 1) = 53.$$

Поскольку 53 — простое число, из последнего равенства следует, что $c - 1 = 1$, $d - 1 = 53$, откуда $a = -(c + d) = -(2 + 54) = -56$.

в) По условию верно равенство

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19.$$

Заметим, что целые числа a и b имеют одинаковую четность, следовательно, целые числа $b - a$ и $b + a$ также имеют одинаковую четность. Так как корни квадратного уравнения натуральные числа, то $a = -(c + d) < 0$, следовательно, $b - a > b + a$. Поэтому из последнего равенства следует, что $b - a = 2 \cdot 5 \cdot 19 = 190$, $b + a = 2$ или $b - a = 2 \cdot 19 = 38$, $b + a = 2 \cdot 5 = 10$.

В первом случае исходное уравнение принимает вид

$$x^2 - 94x + 96 = 0,$$

но это уравнение не имеет натуральных корней.

Во втором случае исходное уравнение принимает вид

$$x^2 - 14x + 24 = 0.$$

Это уравнение имеет натуральные корни $c = 2$ и $d = 12$.

Ответ: а) -66, -18; б) -56; в) 2, 12.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{\left(2^{x^2-6x+10}-4\right)\left(25^{x-2}-25\right)}{3^{7x-26}-9}=0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 15; \log_3 20]$.

Решение.

а) Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^{x^2-6x+10}=0,\\ 25^{x-2}-25=0,\end{array}\right.\\ 3^{7x-26}-9\neq 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-6x+8=0,\\ x-2=1,\end{array}\right.\\ 7x-26\neq 2;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=4,\\ x=3,\end{array}\right.\\ x\neq 4.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что $x=2$, $x=3$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $[\log_5 15; \log_3 20]$.

Так как $2=\log_5 25=\log_3 9$, то

$$\log_5 15<\log_5 25=2=\log_3 9<\log_3 20,$$

т. е. $2\in[\log_5 15; \log_3 20]$.

Так как $3=\log_3 27$, то $3=\log_3 27>\log_3 20$, т. е. $3\notin[\log_5 15; \log_3 20]$.

Ответ: а) 2, 3; б) 2.

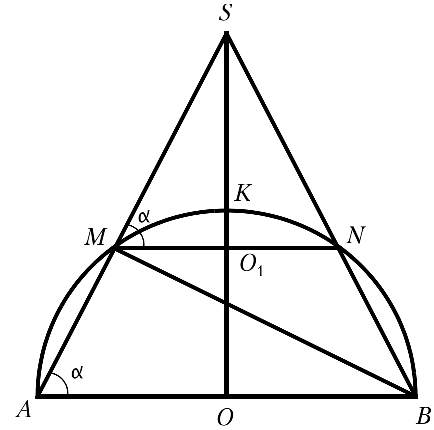
13 Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $3:4$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $7:18$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 15.

Решение.

а) Рассмотрим осевое сечение SAB конуса. Пусть поверхность полусферы пересекает образующие SA и SB конуса в точках M и N соответственно, а высоту SO конуса — в точке K. Обозначим через O_1 точку пересечения хорды MN с высотой SO.



Обозначим $AO=3x$, $SO=4x$, $\angle MAO=\angle SMO_1=\alpha$. В прямоугольном треугольнике ASO: $SA=5x$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике AMB: $AM=AB\cos\alpha=\dfrac{18x}{5}$. Тогда $SM=SA-AM=\dfrac{7x}{5}$.

Отсюда следует, что $SM:MA=7:18$.

б) Так как радиус окружности основания $AO=3x=15$, то $x=5$, поэтому $SM=\dfrac{7x}{5}=7$, $SO=4x=20$, $SK=SO-OK=5$.

В прямоугольном треугольнике SMO_1: $\sin\alpha=\dfrac{SO_1}{SM}$, отсюда

$$SO_1=SM\sin\alpha=7\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{5}=5{,}6.$$

Тогда $KO_1=SO_1-SK=5{,}6-5=0{,}6$.

Внутри конуса находится сферический сегмент радиусом AO, высота которого равна KO_1. Найдём площадь поверхности данного сферического сегмента:

$$2\pi\cdot AO\cdot KO_1=2\pi\cdot 15\cdot 0{,}6=18\pi.$$

Ответ: б) 18π.

14 Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{3x-2}{4x-3}}+\sqrt{\dfrac{4x-3}{x-1}}>2\sqrt[4]{\dfrac{3x-2}{x-1}}$.

Решение.

Обе части неравенства $\sqrt{\dfrac{3x-2}{4x-3}}+\sqrt{\dfrac{4x-3}{x-1}}>2\sqrt[4]{\dfrac{3x-2}{x-1}}$ неотрицательны, поэтому это неравенство равносильно неравенству $\left(\sqrt{\dfrac{3x-2}{4x-3}}-\sqrt{\dfrac{4x-3}{x-1}}\right)^2>\left(2\sqrt[4]{\dfrac{3x-2}{x-1}}\right)^2$.

$$\left(\sqrt{\frac{3x-2}{4x-3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}\right)^2+2\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}>4\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}};$$

$$\left(\sqrt{\frac{3x-2}{4x-3}}\right)^2-2\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+\left(\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}\right)^2>0;$$

$$\left(\sqrt{\frac{3x-2}{4x-3}}-\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}\right)^2>0.$$

Левая часть полученного неравенства положительна при всех допустимых значениях переменной x, кроме тех, при которых $\sqrt{\dfrac{3x-2}{4x-3}}-\sqrt{\dfrac{4x-3}{x-1}}=0$. Следовательно, допустимые значения переменной x должны удовлетворять всем трём неравенствам:

$$\frac{3x-2}{4x-3}\geqslant 0,\quad \frac{4x-3}{x-1}\geqslant 0,\quad \frac{3x-2}{x-1}\geqslant 0.$$

Решение неравенства $\dfrac{3x-2}{4x-3}\geqslant 0$: $x\leqslant\dfrac{2}{3}$ или $x>\dfrac{3}{4}$. Решение неравенства $\dfrac{4x-3}{x-1}\geqslant 0$: $x\leqslant\dfrac{3}{4}$ или $x>1$. Решение неравенства $\dfrac{3x-2}{x-1}\geqslant 0$: $x\leqslant\dfrac{2}{3}$ или $x>1$.

Все значения переменной x, удовлетворяющие всем трём неравенствам: $x\leqslant\dfrac{2}{3}$ или $x>1$.

При $x\leqslant\dfrac{2}{3}$, $x>1$ найдем значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\frac{3x-2}{4x-3}}-\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}=0:$$

$\dfrac{3x-2}{4x-3}=\dfrac{4x-3}{x-1}$, $13x^2-19x+9=0$, дискриминант отрицательный, следовательно, действительных корней уравнение не имеет.

Таким образом получаем, что $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right]\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right]\cup(1;+\infty)$.

15 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 40 квадратных метров и номера «люкс» площадью 50 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 520 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 1200 рублей в сутки, а номер «люкс» — 1600 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение.

На площади 200 квадратных метров можно разместить 5 стандартных номеров или 4 номера «люкс». В первом случае номера будут приносить отелю $5\cdot 1200=6000$ рублей, а во втором $4\cdot 1600=6400$ рублей в сутки. Поэтому стандартных номеров должно быть не более четырёх, иначе предприниматель мог бы заменить 4 таких номера на 3 номера «люкс» и заработать больше. Рассмотрим все варианты.

Если в отеле нет стандартных номеров, то в нём можно разместить 10 номеров «люкс», площадь которых $10 \cdot 50 = 500$ квадратных метров, и зарабатывать $10 \cdot 1600 = 16\,000$ рублей в сутки.

Если в отеле один стандартный номер, то в нём ещё можно разместить 9 номеров «люкс», площадь которых $1 \cdot 40 + 9 \cdot 50 = 500$ квадратных метров, и зарабатывать $1 \cdot 1200 + 9 \cdot 1600 = 15\,600$ рублей в сутки.

Если в отеле два стандартных номера, то в нём ещё можно разместить 8 номеров «люкс», площадь которых $2 \cdot 40 + 8 \cdot 50$ квадратных метров, — неудачно, потому что осталась площадь 40 квадратных метров, равная площади одного стандартного номера.

Если в отеле три стандартных номера, то в нём ещё можно разместить 8 номеров «люкс», площадь которых $3 \cdot 40 + 8 \cdot 50 = 520$ квадратных метров, и зарабатывать $3 \cdot 1200 + 8 \cdot 1600 = 16\,400$ рублей в сутки.

Если в отеле четыре стандартных номера, то в нём ещё можно разместить 7 номеров «люкс», площадь которых $4 \cdot 40 + 7 \cdot 50 = 510$ квадратных метров, и зарабатывать $4 \cdot 1200 + 7 \cdot 1600 = 16\,000$ рублей в сутки.

Таким образом, наибольшая заработанная в сутки сумма денег равна 16 400 рублям.

Ответ: 16 400 руб.

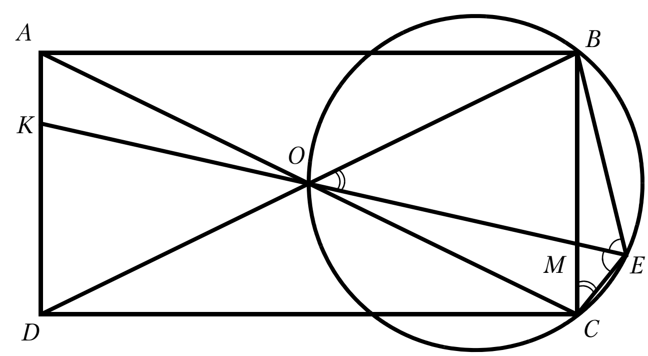
16 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют со стороной CD угол $30°$. Точка E расположена вне прямоугольника так, что $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle BOE = \angle BCE$.

б) Найдите длину отрезка прямой OE, расположенного внутри прямоугольника $ABCD$, если $BE = 20$, $CE = 12$.

Решение.

а) Угол COB является внешним углом для треугольника DOC, поэтому $\angle COB = \angle COD + \angle CDO = 60°$. Отсюда следует, что в выпуклом четырёхугольнике $COBE$ сумма противоположных углов BEC и BOC равна $180°$. Значит, около четырёхугольника $COBE$ можно описать окружность. Углы BOE и BCE являются вписанными в эту окружность и опираются на одну и туже дугу BE, поэтому $\angle BOE = \angle BCE$.



б) Пусть прямая EO пересекает стороны AD и BC соответственно в точках K и M.

Из треугольника BCE по теореме косинусов найдём

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos 120°} = 28.$$

По свойству диагоналей прямоугольника $OC = OB$, тогда получаем, что вписанные углы BEO и CEO опираются на равные хорды, поэтому они равны, значит, EM — биссектриса угла BEC.

По свойству биссектрисы треугольника BCE получаем: $\frac{BM}{CM} = \frac{BE}{CE} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$. Следовательно, $BM = \frac{5}{8}BC = \frac{35}{2}$, $CM = \frac{3}{8}BC = \frac{21}{2}$.

По формуле биссектрисы треугольника найдём EM:

$$EM = \frac{2BE \cdot EC \cdot \cos\frac{1}{2}\angle BEC}{BE + BC} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}}{20 + 12} = \frac{15}{2}.$$

По теореме о пересекающихся хордах окружности $EM \cdot MO = BM \cdot MC$,

$$MO = \frac{BM \cdot MC}{EM} = \frac{35 \cdot 21 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 15} = \frac{49}{2}.$$

Так как треугольники AOK и COM равны, то $OK = MO$, значит, $MK = 2MO = 49$.

Замечание.

Вывод формулы биссектрисы ME треугольника BCE:

пусть $\angle BEC = \alpha$, $BE = c$, $CE = b$, $ME = l$,

$$S_{BCE} = S_{BEM} + S_{CEM},$$

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}cl\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$bc\sin\alpha = cl\sin\frac{\alpha}{2} + bl\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$2bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\alpha}{2}(c+b),$$

$$l = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Ответ: б) 49.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$y + a - 1 = \sqrt{(a+1)^2 - x^2 + 2ax - a^2}$$

удовлетворяют неравенству $|x + y - 1| \leqslant 2$.

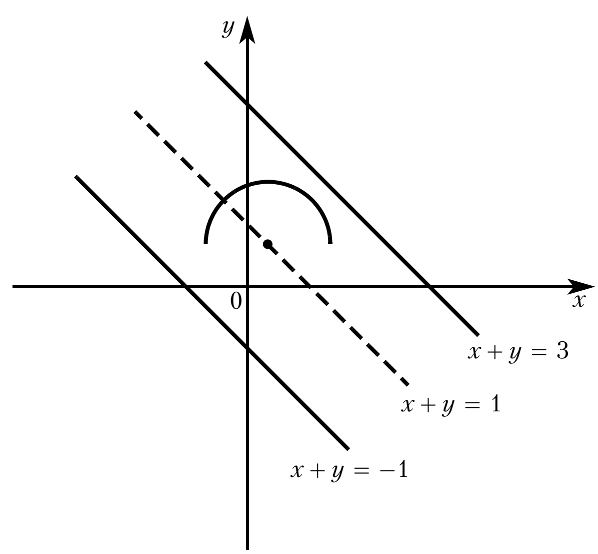
Решение.

Уравнение $y + a - 1 = \sqrt{(a+1)^2 - x^2 + 2ax - a^2}$ равносильно системе:

$$\begin{cases} (y-(1-a))^2 = a^2 + 2a + 1 - x^2 + 2ax - a^2, \\ y - (1-a) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-(1-a))^2 + x^2 - 2ax + a^2 = a^2 + 2a + 1, \\ y - (1-a) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-(1-a))^2 + (x-a)^2 = (a+1)^2, \\ y - (1-a) \geqslant 0. \end{cases}$$



На координатной плоскости xOy эта система задаёт: при $a = -1$ точку $(-1; 2)$, координаты которой удовлетворяют неравенству $|x + y - 1| \leqslant 2$; при $a \neq -1$ полуокружность с центром в точке $(a; 1-a)$ и радиусом $|a+1|$. Центр этой окружности лежит на прямой $y = 1 - x$. Концы полуокружности имеют координаты $(a - |a+1|; 1-a)$ и $(a + |a+1|; 1-a)$.

Неравенство $|x + y - 1| \leqslant 2$ задаёт на координатной плоскости xOy полосу $-1 \leqslant x + y \leqslant 3$. Чтобы все точки полуокружности лежали внутри этой полосы, необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, левый конец полуокружности лежал внутри полосы, во-вторых, чтобы расстояние от центра полуокружности до прямой $x + y = 3$ было не меньше $|a+1|$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} a \neq -1, \\ -1 \leqslant 1 - |a+1| \leqslant 3, \\ \dfrac{|a+1-a-3|}{\sqrt{2}} \geqslant |a+1|; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq -1, \\ |a+1| \leqslant 2, \\ |a+1| \leqslant \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq -1, \\ |a+1| \leqslant \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$a \in \left[-1-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(-1; -1+\sqrt{2}\right].$$

При $a = -1$ уравнение имеет решение $(-1; 2)$, удовлетворяющее неравенству $|x + y - 1| \leqslant 2$, следовательно, при $a \in \left[-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\right]$ все решения уравнения $y + a - 1 = \sqrt{(a+1)^2 - x^2 + 2ax - a^2}$ удовлетворяют неравенству $|x + y - 1| \leqslant 2$.

Ответ: $-1 - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1 + \sqrt{2}$.

18 Назовем числовое множество хорошим, если его можно разбить на три подмножества с одинаковой суммой элементов.

а) Является ли множество $\{1, 2, 3, \ldots, 26, 27\}$ хорошим?

б) Существует ли такое натуральное число n, что множество $\{2, 4, \ldots, 2^{99}, 2^{100}, n\}$ является хорошим?

в) Сколько всего хороших подмножеств у множества $\{3, 5, 6, 8, 9, 11, 14\}$?

Решение.

а) Да, например, его можно разбить на три подмножества:

$$\{1, 5, 9, 10, 14, 18, 19, 23, 27\},$$
$$\{2, 6, 7, 11, 15, 16, 20, 24, 25\},$$
$$\{3, 4, 8, 12, 13, 17, 21, 22, 26\},$$

сумма элементов каждого из которых равна 126. (Этот пример строится следующим образом: разбиваем исходное множество на три девятки последовательно идущих чисел, из каждой девятки в первое подмножество записываем первое, пятое и девятое числа, во второе — второе, шестое и седьмое, в третье — третье, четвертое и восьмое.)

б) Предположим, что такое натуральное n существует, и рассмотрим разбиение множества $\{2, 4, \ldots, 2^{99}, 2^{100}, n\}$ на три подмножества с одинаковой суммой элементов. Одно из этих подмножеств не содержит ни n, ни 2^{100}, поэтому сумма его элементов не превосходит 2^{100}:

$$2 + 4 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} = 2^{100} - 2 < 2^{100}.$$

Таким образом, сумма элементов выбранного подмножества меньше суммы элементов подмножества, содержащего число 2^{100}. Противоречие. Не существует такого натурального числа n, чтобы множество $\{2, 4, \ldots, 2^{99}, 2^{100}, n\}$ являлось хорошим.

в) Пусть $A = \{3, 5, 6, 8, 9, 11, 14\}$, B — его хорошее подмножество, $S(X)$ — сумма элементов множества X. Из условия получаем, что $S(B)$ делится на 3. Множество A содержит четыре числа, имеющие остаток 2 от деления на 3, и три числа, кратные 3. Поэтому содержит либо три числа, имеющие остаток 2 от деления на 3, либо не содержит ни одного из этих чисел. Последнее невозможно, поскольку B должно содержать хотя бы четыре числа.

Заметим, что $S(B) = 42$ или $S(B) = 51$: больше, чем 51, сумма быть не может, поскольку $S(B) \leqslant S(A) - 5 = 51$. Кроме того, если число 14 принадлежит B, то $S(B) = 3 \cdot 14 = 42$ или $S(B) = 3 \cdot (14 + 3) = 51$ ($S(B)$ тогда равна утроенной сумме элементов подмножества, содержащего 14), а если число 14 не принадлежит B, то $S(B) = 3 \cdot (11 + 3) = 42$ или $S(B) = (11 + 6) = 51$ ($S(B)$ тогда равна утроенной сумме элементов подмножества, содержащего 11; при этом $\frac{S(B)}{3}$ не может равняться 11, чтобы это понять, достаточно рассмотреть подмножество, содержащее 9).

Итак, $S(B) = 42$ или $S(B) = 51$. При этом $S(A) = 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + 11 + 14 = 56$.

Значит:

$B = \{3, 6, 8, 11, 14\}$: $\{3; 14\}$, $\{6, 11\}$ и $\{8, 9\}$ — разбиение на три подмножества с одинаковой суммой элементов;

$B = \{3, 6, 8, 11, 14\}$: $\{14\}$, $\{3, 11\}$ и $\{6, 8\}$ — подходящее разбиение;

$B = \{3, 5, 9, 11, 14\}$: $\{14\}$, $\{3, 11\}$ и $\{5, 9\}$ — подходящее разбиение;

$B = \{5, 6, 8, 9, 14\}$: $\{14\}$, $\{5, 9\}$ и $\{6, 8\}$ — подходящее разбиение;

$B = \{3, 5, 6, 8, 9, 11\}$: $\{5, 9\}$, $\{3, 11\}$ и $\{6, 8\}$ — подходящее разбиение.

Получили: у множества $\{3, 5, 6, 8, 9, 11, 14\}$ пять хороших подмножеств.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

12 а) Решите уравнение $(0{,}5)^{\sin 2x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$(0{,}5)^{\sin 2x} = (0{,}5)^{-\sqrt{2}\sin x};\quad 2\sin x\cdot\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0;\quad \sqrt{2}\sin x\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) = 0.$$

Значит, $\sqrt{2}\sin x = 0$ или $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$.

Решая уравнение $\sin x = 0$, получаем $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решая уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получаем $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Найдём корни уравнения, удовлетворяющие двойному неравенству $-\frac{7\pi}{2} \leqslant x \leqslant -2\pi$.

В первом случае получаем: $-\frac{7\pi}{2} \leqslant \pi n \leqslant -2\pi$; $-3{,}5 \leqslant n \leqslant -2$, где $n \in \mathbb{Z}$; откуда $n = -3$ и $n = -2$; $x = -3\pi$ и $x = -2\pi$.

Во втором случае получаем: $-\frac{7\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant -2\pi$; $-1{,}875 \leqslant n \leqslant -1{,}125$, $n \in \mathbb{Z}$, — нет целых значений n,

$-\frac{7\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant -2\pi$; $-1{,}625 \leqslant n \leqslant -0{,}875$, $n \in \mathbb{Z}$, откуда $n = -1$, $x = -\frac{9\pi}{4}$.

Корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$: -3π; -2π; $-\frac{9\pi}{4}$.

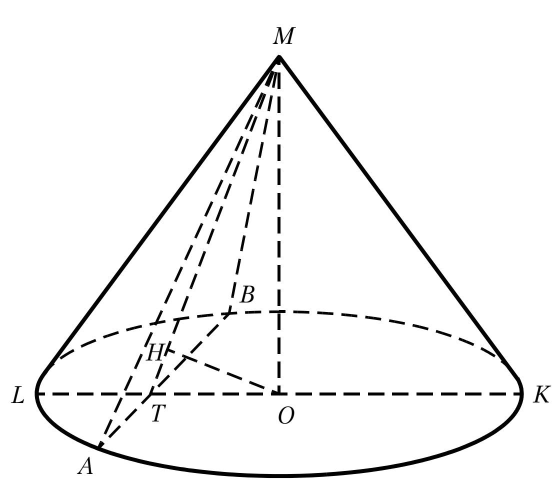
Ответ: а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -3π; -2π; $-\frac{9\pi}{4}$.

13 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $6\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

Решение.



а) Равнобедренный треугольник MLK — осевое сечение конуса.

На LK построим точку T так, чтобы отрезки MT и MK были перпендикулярны. Через точку T проведём хорду AB перпендикулярно диаметру LK. По теореме о трёх перпендикулярах отрезки AB и MK перпендикулярны. Значит образующая MK перпендикулярна плоскости MAB и треугольник NAB — искомое сечение.

В треугольнике MTK угол K равен 30°, $MK = 6\sqrt{3}$, следовательно, $MT = 6$, $TK = 12$. В треугольнике MTB сторона $TB = \sqrt{MT^2 - MB^2} = 6\sqrt{2}$, сторона $MT = 6$, получаем, что угол TMB больше угла MBT, то есть больше $45°$. Поскольку $\angle AMB = 2\angle TMB$, получаем, что угол AMB больше $90°$ и треугольник AMB тупоугольный.

б) Плоскости MLK и MAB перпендикулярны и пересекаются по прямой MT. В треугольнике MTK высота $MO = 3\sqrt{3}$, отрезок $TO = 3$.

Опустим перпендикуляр OH на прямую MT. Выразим площадь треугольника MOT двумя способами:

$$\frac{1}{2}\cdot MO\cdot OT = \frac{1}{2}\cdot MT\cdot OH,$$

откуда $OH = \dfrac{MO\cdot OT}{MT} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: б) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

14 Решите неравенство $\sqrt{8-2x-x^2}\cdot\left(\dfrac{1}{2x+9} - \dfrac{1}{x+10}\right) \geqslant 0$.

Решение.

Левая часть принимает неотрицательные значения в двух случаях.

1) Если $8 - 2x - x^2 = 0$, тогда $x = -4$ и $x = 2$.

2) Если

$$\begin{cases} 8-2x-x^2 > 0, \\ \dfrac{1}{2x+9} - \dfrac{1}{x+10} \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -(x+4)(x-2) > 0, \\ \dfrac{-x+1}{(2x+9)(x+10)} \geqslant 0, \end{cases} \text{ тогда } -4 < x \leqslant 1.$$

Таким образом, получаем, что $-4 \leqslant x \leqslant 1$ и $x = 2$.

Ответ: $[-4;\ 1] \cup \{2\}$.

15 19 марта планируется взять кредит в банке на сумму 900 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 18-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 19-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 19-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 1,035 млн руб.?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n месяцев. Долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 19-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$900;\ 900\cdot\frac{n-1}{n};\ 900\cdot\frac{n-2}{n};\ \ldots;\ \frac{900}{n};\ 0.$$

Последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$945;\ 945\cdot\frac{n-1}{n};\ 945\cdot\frac{n-2}{n};\ \ldots;\ \frac{945}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$45+\frac{900}{n};\ \frac{45(n-1)+900}{n};\ \frac{45(n-2)+900}{n};\ \ldots;\ \frac{45+900}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$900 + 45\left(\frac{n+\ldots+1}{n}\right) = 900 + 22{,}5(n+1) \text{ (тыс. рублей)}.$$

По условию, $900 + 22{,}5(n+1) = 1035$, откуда $n = 5$.

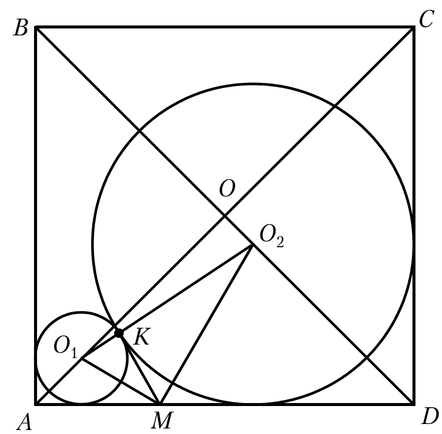
Ответ: 5.

16 Внутри квадрата $ABCD$ с центром O расположены две окружности: окружность с центром O_1, лежащим на диагонали AC, вписана в угол BAD, а окружность с центром O_2, лежащим на диагонали BD, вписана в угол ADC. Эти окружности касаются внешним образом в точке K. Общая касательная, проведённая к ним в точке K, пересекает сторону AD в точке M.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника O_1MO_2.

б) Найдите угол OMO_2, если радиусы первой и второй окружностей относятся как $4:9$.

Решение.



а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому MO_1 и MO_2 — биссектрисы смежных углов AMK и DMK. Значит, $\angle O_1MO_2 = 90°$. Из точек O и M отрезок O_1O_2 виден под прямым углом, поэтому эти точки лежат на окружности с диаметром O_1O_2. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника O_1MO_2.

б) Пусть сторона квадрата равна $2a$, а радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны $4r$ и $9r$ соответственно. Тогда

$$O_1O_2 = O_1K + O_2K = 4r + 9r = 13r,$$
$$OO_1 = OA - O_1A = a\sqrt{2} - 4r\sqrt{2},$$
$$OO_2 = OD - O_2D = a\sqrt{2} - 9r\sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2$, то есть

$$169r^2 = \left(a\sqrt{2} - 4r\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2} - 9r\sqrt{2}\right)^2,$$
$$25r^2 - 52ar + 4a^2 = 0;$$

причём $r \leqslant a$. Отсюда находим, что $r = \frac{2}{25}a$, а $4r = \frac{8}{25}a$ и $9r = \frac{18}{25}a$. Тогда

$$\operatorname{tg}\angle OO_1O_2 = \frac{OO_2}{OO_1} = \frac{a\sqrt{2} - 9r\sqrt{2}}{a\sqrt{2} - 4r\sqrt{2}} = \frac{a - 9r}{a - 4r} = \frac{a - \frac{18}{25}a}{a - \frac{8}{25}a} = \frac{7}{17}.$$

Вписанные углы OMO_2 и OO_1O_2 опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle OMO_2 = \angle OO_1O_2 = \operatorname{arctg}\frac{7}{17}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{7}{17}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$5\cos^2 x + \left(2a - \frac{1}{2a}\right)|\sin x| = 2a^2 - 3a + 3$$

имеет ровно три решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите эти решения.

Решение.

Если x — решение данного уравнения, то число $-x$ — тоже решение. Отсюда следует, что если данное уравнение имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, симметричном относительно нуля, нечётное число решений, то одно из этих решений обязано быть $x = 0$. Тогда получаем:

$$5 = 2a^2 - 3a + 3;\quad 2a^2 - 3a - 2 = 0,\text{ откуда } a = 2 \text{ или } a = -\frac{1}{2}.$$

При каждом из этих значений a дробь $\frac{1}{2a}$ определена, а уравнение имеет смысл. Осталось выяснить, действительно ли при этих значениях a уравнение имеет три решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пусть $a = 2$. Тогда

$$5\cos^2 x + \frac{15}{4}|\sin x| = 5;\quad 5 - 5\sin^2 x + \frac{15}{4}|\sin x| = 5,$$

откуда $|\sin x| = 0$ или $|\sin x| = \frac{3}{4}$. Имеется 3 решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $x = 0$ и $x = \pm\arcsin\frac{3}{4}$.

Пусть $a = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$5\cos^2 x = 5;\quad |\cos x| = 1.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x = 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: при $a = 2$ решения $x = 0$ и $x = \pm\arcsin\frac{3}{4}$.

18 На доске в первой строке написано два последовательных натуральных числа n и $n+1$, а во второй — по одному разу те и только те натуральные числа, которые являются делителями какого-либо числа из первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 6 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

в) Сколько существует таких чисел $n > 2000$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

Решение.

а) Да. Например, если в первой строке написаны числа 8 и 9, то во второй строке написано ровно 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 8 и 9.

б) Из чисел n и $n+1$ одно обязательно чётное, поэтому во второй строке обязательно написаны по крайней мере четыре различных числа: 1, 2, n и $n+1$. Если число n чётное, то во второй строке также написано число $\frac{n}{2}$, которое меньше n и больше 2 при $n > 4$. Если число n нечётное, то во второй строке также написано число $\frac{n+1}{2}$, которое меньше n и больше 2 при $n > 4$. Противоречие.

в) Если некоторое натуральное число m не является квадратом никакого натурального числа, то у него чётное количество делителей, так как каждому делителю $d < \sqrt{m}$ числа можно сопоставить делитель $\frac{m}{d} > \sqrt{m}$ — тогда все делители числа m разобьются на пары. Если некоторое натуральное число m является квадратом натурального числа k, то у него нечётное количество делителей, так как каждому делителю $d < \sqrt{m}$ числа можно сопоставить делитель $\frac{m}{d} > \sqrt{m}$ — тогда все делители числа m, кроме k, разобьются на пары.

Числа n и $n+1$ имеют ровно один общий делитель — число 1. Оба числа n и $n+1$ не могут одновременно быть квадратами натуральных чисел. Если ни одно из чисел n и $n+1$ не является квадратом натурального числа, то каждое из них имеет чётное количество делителей, а потому во второй строке будет написано нечётное количество чисел. Наконец, если ровно одно из чисел n и $n+1$ является квадратом натурального числа, то одно из них имеет чётное количество делителей, а другое — нечётное. Значит, в этом случае во второй строке будет написано чётное количество чисел.

Следовательно, во второй строке будет написано чётное количество чисел тогда и только тогда, когда n или $n+1$ является квадратом натурального числа. Поскольку наибольший квадрат, меньший 2000, равен $44^2 = 1936$, существует ровно 44 числа , которые являются квадратом натурального числа, и ровно 43 таких числа $n < 2000$, для которых $n+1$ является квадратом натурального числа. Значит, количество искомых чисел равно 87.

Ответ: а) Да, например, 1, 2, 3, 4, 8 и 9; б) нет; в) 87.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 16

12 а) Решите уравнение $(2x^2-5x-12)(2\cos x+1)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Решение.

а) $2x^2-5x-12=0$ или $2\cos x+1=0$.
Корни первого уравнения $x=4$ и $x=-1{,}5$.
Корни второго уравнения $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

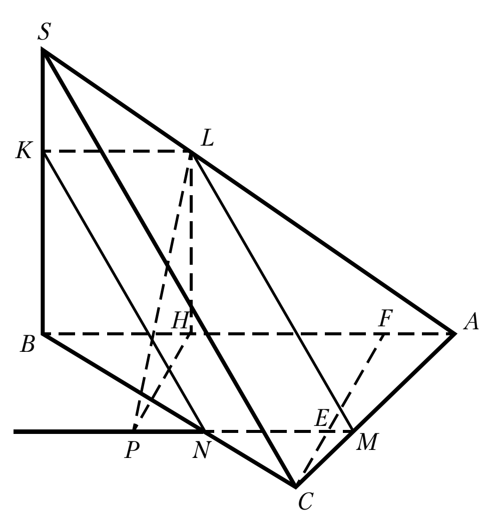
б) $4>\pi$, поэтому корень не принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
$-\frac{\pi}{2}<-1{,}5<\pi$, поэтому корень принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
Из корней $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ принадлежит корень $x=\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $4;\ -1{,}5;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-1{,}5;\ \frac{2\pi}{3}$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B. Грани ABC и ABS равновелики. На рёбрах BS, AS и CA отмечены точки K, L и M соответственно, так, что $SK:KB=1:2$, $SL:LA=1:2$, $CM:MA=1:2$.

а) Докажите, что плоскость KLM наклонена к плоскости основания пирамиды под углом 45°.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KLM, если площадь грани ABS равна 9.

Решение.



а) ТреугольникиBSA и KSL подобны, следовательно, прямая KL параллельна прямой AB и $KL=\frac{1}{3}AB$. Значит, прямая KL параллельна плоскости ABC.

Так как прямая KL лежит в плоскости KLM и параллельна плоскостиABC,, то линия пересечения плоскостей KLM и ABC параллельна прямой KL. На ребре BC отметим точку N так, что $CN:NB=1:2$, тогда $MN=\frac{1}{3}AB$, и отрезки MN и KL равны и параллельны.

Таким образом, сечение пирамиды, проходящее через точки K, L и M — это параллелограмм $KLMN$.

Пусть LH — перпендикуляр, опущенный из точки L на ребро AB. В треугольнике ABS: прямая LH параллельна прямой BS и $LH = \frac{2}{3}BS$, а так как BS — перпендикуляр к плоскости основания пирамиды, то LH —перпендикуляр к этой плоскости.

Пусть LP — высота параллелограмма $KLMN$, опущенная из точки L на прямую, содержащую сторону MN. Тогда по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, прямая HP перпендикулярна прямой MN, получаем LPH — линейный угол двугранного угла между плоскостью KLM и плоскостью основания.

Треугольники ABC и ABS равновелики, их высоты SB и CF, опущенные на общую сторону AB, равны. Отрезок$LH = \frac{2}{3}SB$. Точка E — точка пересечения высоты CF и отрезка MN, тогда $PH = CE = \frac{2}{3}CF$. Значит, равны и отрезки LP и PH.

Поэтому $\operatorname{tg}\angle HP = \frac{LH}{HP} = 1$.

Следовательно, $\angle HP = 45°$.

б) $S_{KLMN} = MN \cdot LP = \frac{1}{3}AB \cdot LH \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}S_{ABC} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: б) $4\sqrt{2}$.

14 Решите неравенство $\log^2_{0,5} x^2 + 8|\log_{0,5} x^2| \geqslant 9$.

Решение.

Пусть $|\log_{0,5} x^2| = t$, тогда получаем неравенство $t^2 + 8t - 9 \geqslant 0$, откуда $t \leqslant 9$ или $t \geqslant 1$.

Неравенство $|\log_{0,5} x^2| \leqslant -9$ не имеет решений.

Решим неравенство $|\log_{0,5} x^2| \geqslant 1$. Получаем, что $\log_{0,5} x^2 \geqslant 1$ или $\log_{0,5} x^2 \leqslant -1$.

В первом случае $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Во втором случае $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Таким образом, $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

15 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 13 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10 %, т. е. увеличивается в 1,1 раза. Тогда через три года сумма на вкладе «А» равна $1{,}1^3 S = 1{,}331S$. Аналогично на вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1{,}13^2\left(1 + \frac{n}{100}\right)S = 1{,}2769\left(1 + \frac{n}{100}\right)S,$$

где n — целое число процентов.

По условию требуется найти наименьшее целое решение неравенства

$$1{,}2769\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}331S; \quad n > 100\cdot\frac{1{,}331-1{,}2769}{1{,}2769} = 100\cdot 0{,}0424... = 4{,}24...,$$

откуда $n = 5$.

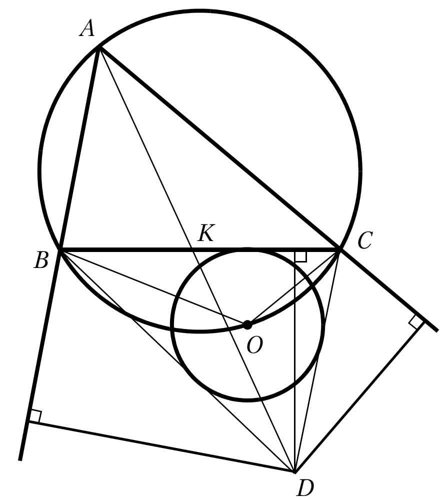
Ответ: 5.

16 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D. Центр окружности, вписанной в треугольник BCD, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $\angle BDC = 60°$.

б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC, если $AB = 4$ и $AC = 10$.

Решение.



а) Пусть $\angle BAC = \alpha$. O. — центр окружности, вписанной в треугольник BCD. Тогда

$$\angle BDC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle BDC = 90° + \frac{1}{2}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 135° - \frac{\alpha}{4}.$$

По свойству вписанного четырёхугольника

$$\angle BAC + \angle BOC = 180°,$$

или $\alpha + 135° - \frac{\alpha}{4} = 180°$, откуда $\alpha = 60°$.

Тогда $\angle BDC = 90° - \frac{1}{2}\cdot 60° = 60°$.

б) По теореме косинусов

$$CB = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos 60°} = 2\sqrt{19}.$$

Точка D равноудалена от прямых AB, BC и AC, поэтому AD — биссектриса угла BAC.

Пусть AD пересекается с BC в точке K.

Тогда, по свойству биссектрисы, $\frac{BK}{KC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Пусть угол между прямыми BC и AD равен β.

По теореме синусов из треугольника ABK получим: $\frac{BK}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin\beta}$,

откуда $\sin\beta = \frac{7}{2\sqrt{19}}$.

Ответ: $\frac{7\sqrt{19}}{38}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение $(x; y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + ay^2 + x + 2 - a = 0, \\ ax^2 + 3y^2 + y + 2 - a = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $|x+y| > 2$.

Решение.

Пусть $(x; y)$ — решение данной системы, удовлетворяющее неравенству $|x+y| > 2$, тогда $(y; x)$ — тоже её решение, удовлетворяющее неравенству $|x+y| > 2$. Поскольку по условию такое решение единственное, то эти пары должны совпадать. Следовательно, единственным решением данной системы, удовлетворяющим неравенству $|x+y|>2$, могут быть только пары вида $(x;x)$, причём $|x|>1$.

Подставив $y=x$ в любое из уравнений системы, найдём все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2(a+3)+x+2-a=0$ имеет решения, единственное из которых удовлетворяет неравенству $|x|>1$.

1) Пусть $a=-3$. Тогда получаем уравнение $x+5=0$; $\quad x=-5$. Значит, $a=-3$ удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть $a\neq-3$, тогда уравнение $(a+3)x^2+x+2-a=0$ — квадратное. Под условие задачи подходят следующие случаи:

а) один его корень лежит левее -1, а второй на отрезке $[-1;\,1]$;

б) один его корень лежит правее 1, а второй на отрезке $[-1;\,1]$;

в) оно имеет единственный корень $x=\dfrac{-1}{2a+6}$ и при этом $\left|\dfrac{-1}{2a+6}\right|>1$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x)=(a+3)x^2+x+2-a=0,\ a\neq-3.$$

Заметим, что $f(-1)=4>0$ и $f(1)=6>0$. Это означает, что при $a+3>0$ корни уравнения находятся по одну сторону от числа -1 и по одну сторону от числа 1 (либо не существуют), а при $a+3<0$ корни уравнения находятся вне отрезка $[-1;\,1]$ (либо не существуют). Следовательно, при любом значении a пункты а) и б) не могут быть выполнены.

Условие в) равносильно системе

$$\begin{cases}1-4(a+3)(2-a)=0,\\ \left|-\dfrac{1}{2a+6}\right|>1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-\frac{1}{2}-\sqrt{6},\\ a=-\frac{1}{2}+\sqrt{6},\end{array}\right.\\ \left|-\dfrac{1}{2a+6}\right|>1;\end{cases}\qquad a=-\frac{1}{2}-\sqrt{6}.$$

Ответ: $a=-3$; $a=-\frac{1}{2}-\sqrt{6}$.

18 Пусть $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число, равное $100a+10b+c$, где a, b и c — десятичные цифры, $a\neq0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $\overline{abc}+\overline{cba}=1696$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $7\cdot\overline{abc}=5\cdot\overline{cba}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\overline{abc}:\overline{cba}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 5?

Решение.

а) Да. Действительно, если $a=9$, $b=4$ и $c=7$, то $\overline{abc}+\overline{cba}=947+749=1696$.

б) Предположим, что $7\cdot\overline{abc}=5\cdot\overline{cba}$, где a, b и c — попарно различные ненулевые десятичные цифры. Тогда $\overline{abc}$ делится на 5 и, следовательно, $c=5$. Значит, число $7\cdot\overline{abc}$ является нечётным, поэтому число $5\cdot\overline{cba}$ и цифра a также нечётны.

Имеем $2500=5\cdot500<5\cdot\overline{cba}<5\cdot600=3000$. Поэтому $2500<7\cdot\overline{abc}<3000$ и $300<\overline{abc}<500$. Учитывая нечётность цифры a, отсюда получаем, что $a=3$.

Следовательно, $0=7\cdot\overline{abc}-5\cdot\overline{cba}=7(10b+305)-5(10b+503)=20b-380$. Тогда $b=19$, что невозможно.

в) Пусть a, b и c — попарно различные ненулевые десятичные цифры, среди которых есть цифра 5. Имеем $\overline{abc}:\overline{cba}=\dfrac{100a+10b+c}{100c+10b+a}=1+\dfrac{99\cdot(a-c)}{100c+10b+a}$.

Если $c \geqslant 2$, то $\dfrac{99\cdot(a-c)}{100c+10b+a} < \dfrac{99\cdot 7}{213} < 4$ и $\overline{abc}:\overline{cba} < 5$.

Если $c = 1$ и $a = 5$, то $\dfrac{99\cdot(a-c)}{100c+10b+a} = \dfrac{99\cdot 4}{10b+105} < 4$ и $\overline{abc}:\overline{cba} < 5$.

Остаётся рассмотреть случай $c = 1$ и $b = 5$. В этом случае $\dfrac{99\cdot(a-c)}{100c+10b+a} = \dfrac{99a-99}{a+150} = 99 - \dfrac{99\cdot 151}{a+150} \leqslant 99 - \dfrac{99\cdot 151}{159} = \dfrac{792}{159}$ и $\overline{abc}:\overline{cba} \leqslant \dfrac{951}{159}$, где последнее неравенство обращается в равенство при $a = 9$, $b = 5$ и $c = 1$.

Поскольку $\dfrac{951}{159} > 5$, наибольшее значение, которое может принимать дробь $\overline{abc}:\overline{cba}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 5, равно $\dfrac{951}{159} = \dfrac{317}{53}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\dfrac{317}{53}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 21

12 а) Решите уравнение $(x^2+2x-2)\left(\log_3(x^2-5)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{5}-x\right)\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5; -2{,}8]$.

Решение.

а) При условии, что $x < -\sqrt{5}$, получаем:

$$x^2+2x-2 = 0 \text{ или } \log_3(x^2-5)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{5}-x\right) = 0.$$

Корни первого уравнения $x = -1-\sqrt{3}$ и $x = -1+\sqrt{3}$ (не удовлетворяет условию $x < -\sqrt{5}$).

Корень второго уравнения $x = -1-\sqrt{5}$.

Значит, $x = -1-\sqrt{3}$ или $x = -1-\sqrt{5}$.

б) $-1{,}8 < -\sqrt{3} < -1{,}7$, поэтому $-2{,}8 < -1-\sqrt{3} < -2{,}7$, а значит, корень $x = -1-\sqrt{3}$ не принадлежит отрезку $[-3{,}5; -2{,}8]$;

$-2{,}3 < -\sqrt{5} < -2{,}2$, поэтому $-3{,}3 < -1-\sqrt{5} < -3{,}2$, а значит, корень $x = -1-\sqrt{5}$ принадлежит отрезку $[-3{,}5; -2{,}8]$.

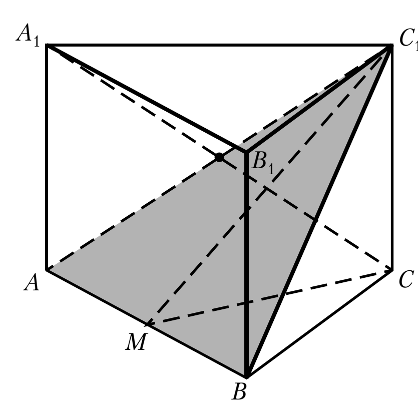
Ответ: а) $-1-\sqrt{3}$; $-1-\sqrt{5}$; б) $-1-\sqrt{5}$.

13 Дана правильная треугольная призма $ABCDA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCDA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды ABA_1C_1 равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью ABC_1, если $AB = 8$ и $AA_1 = 6$.

Решение.



а) Поскольку $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, четырёхугольник AA_1CC_1 — прямоугольник, а его диагонали AC_1 и A_1C пересекаются в некоторой точке и делятся ей пополам. Отсюда получаем, что отрезок A_1C делится плоскостью ABC_1 пополам. Следовательно, высоты пирамид A_1ABC_1 и $CABC_1$, проведённые из их вершин A_1 и C к общему основанию ABC_1, равны. Поэтому объёмы этих пирамид также равны. Аналогично, получаем, что равны и объёмы пирамид AA_1BC_1 и $B_1A_1BC_1$.

Поскольку объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ складывается из трёх равных объёмов пирамид ABA_1C_1, $CABC_1$ и $B_1A_1BC_1$, получаем, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды ABA_1C_1 равно $3:1$.

б) Объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен произведению площади её основания ABC на высоту AA_1. Площадь основания ABC равна $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$.

Значит, объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $16\sqrt{3}\cdot 6 = 96\sqrt{3}$. По доказанному в пункте а), объём пирамиды A_1ABC_1 равен $\frac{1}{3}\cdot 96\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$.

По теореме Пифагора для треугольников ACC_1, BCC_1 и BAA_1 имеем:

$$AC_1 = BC_1 = BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = 10.$$

Треугольник ABC_1 — равнобедренный. Пусть M — середина AB, тогда $AM = 4$, по теореме Пифагора $C_1M = \sqrt{{AC_1}^2 - AM^2} = 2\sqrt{21}$. Площадь треугольника ABC_1 равна $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CM_1 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot \sqrt{21} = 8\sqrt{21}$.

Пусть h — высота пирамиды A_1ABC_1, проведённая к основанию ABC_1. Объём пирамиды A_1ABC_1 равен трети произведения площади её основания ABC_1 на высоту h, проведённую к этому основанию. Отсюда получаем, что $h = \frac{3\cdot 32\sqrt{3}}{8\sqrt{21}} = \frac{12\sqrt{7}}{7}$.

Синус искомого угла равен отношению высоты пирамиды A_1ABC_1, проведённой к основанию ABC_1, к длине отрезка BA_1. Следовательно, искомый угол равен $\arcsin\left(\frac{h}{BA_1}\right) = \arcsin\left(\frac{12\sqrt{7}}{70}\right)$.

Ответ: б) $\arcsin\left(\frac{12\sqrt{7}}{70}\right)$.

14 Решите неравенство $3^{\lg x} + 6\frac{2}{3}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 2^{0,5(\lg x - 6)} \leqslant 2^{\lg x}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$3^{\lg x} + \frac{20}{3}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 2^{0,5\lg x}\cdot 2^{-3} \leqslant 2^{\lg x};$$

$$3^{\lg x} + \frac{20}{3\cdot 8}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 2^{0,5\lg x} \leqslant 2^{\lg x};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} + \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{0,5\lg x} \leqslant 1.$$

Откуда получаем, что $\left(\frac{3}{2}\right)^{0,5\lg x} \leqslant \frac{2}{3}$; $0,5\lg x \leqslant -1$; $0 < x \leqslant 0,01$.

Ответ: $(0; 0,01]$.

15 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 60 % (до $t_1 = 1{,}6t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $12\,000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

Решение.

Заметим, что налоговые сборы составляют $f(t) = t(12\,000 - 2t) = 12\,000t - 2t^2$ рублей при $t < 6000$. Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. При этом $f(t_0) = f(1{,}6t_0)$, значит, функция $f(t)$ достигает своего максимума при $t = \dfrac{2{,}6t_0}{2}$. Поскольку $1{,}3t_0$ составляет 81,25 % от $1{,}6t_0$, государству следует понизить налог на 18,75 %.

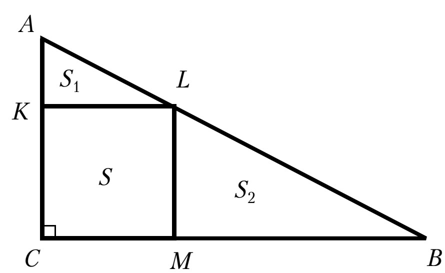
Ответ: 18,75.

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\dfrac{AC \cdot AB}{AC + BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 8 и 18 соответственно.

Решение.



а) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, и $KL = x$. Треугольники AKL и ACB подобны по двум углам. Отсюда $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{KL}{CB}$, $\dfrac{b-x}{b} = \dfrac{x}{a}$ и $x = \dfrac{a \cdot b}{a+b}$.

б) Обозначим через S, S_1 и S_2 площади квадрата $KLMC$ и треугольников AKL и LMB соответственно. Используя обозначения и результат из доказательства пункта а), получаем $S_1 = \dfrac{1}{2}(b-x)x = \dfrac{ab^3}{2(a+b)^2}$,

$S_2 = \dfrac{1}{2}(a-x)x = \dfrac{a^3b}{2(a+b)^2}$ и $S = x^2 = \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2} = 2\sqrt{S_1S_2} = 2\sqrt{8 \cdot 18} = 24.$

Ответ: б) 24.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $[-1; 1]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x} - 16^x + 2 \cdot (4a)^x \geqslant 0$.

Решение.

Разделим обе части неравенства на положительное выражение $(4a)^x$ и обозначим $t = \left(\dfrac{a}{4}\right)^x$, $t > 0$. Получим: $3t - \dfrac{1}{t} + 2 \geqslant 0$; $\dfrac{3t^2 + 2t - 1}{t} \geqslant 0$.

Значит, $t \geqslant \dfrac{1}{3}$, то есть $\left(\dfrac{a}{4}\right)^x \geqslant \dfrac{1}{3}$.

При $a > 4$ получаем: $x \geqslant \log_{\frac{a}{4}} \dfrac{1}{3}$. Любое число из промежутка $[-1; 1]$ будет являться решением неравенства, если $\log_{\frac{a}{4}} \dfrac{1}{3} \leqslant -1$. Значит, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{4}{a}$, то есть $a \in (4; 12]$.

При $0 < a < 4$ получаем: $x \leqslant \log_{\frac{a}{4}} \frac{1}{3}$. Любое число из промежутка $[-1; 1]$ будет являться решением неравенства, если $\log_{\frac{a}{4}} \frac{1}{3} \geqslant 1$. Значит, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{a}{4}$, то есть $\frac{4}{3} \leqslant a < 4$.

При $a = 4$ неравенство верно при всех x.

Ответ: $\frac{4}{3} \leqslant a \leqslant 12$.

18 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a + b$, где a и b — десятичные цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

Решение.

а) Да. Действительно, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 9$ и $d = 4$, то $12 \cdot 94 - (21 \cdot 49) = 99$.

б) Докажем, что это невозможно. Имеем:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = (10a + b) \cdot (10c + d) - (10b + a) \cdot (10d + c) = 99 \cdot (ac - bd).$$

Значит, если $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 693$, то $99 \cdot (ac - bd) = 693 = 99 \cdot 7$ и $ac - bd = 7$. Если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7, то одно из произведений ac или bd делится на 7, а значит, и другое произведение тоже делится на 7. Это невозможно, так как в этом случае среди цифр a, b, c и d есть по крайней мере две цифры 7.

в) Как показано выше, имеем $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc} = 99 \cdot (ac - bd)$. Рассмотрим все возможные случаи, когда среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7.

Если цифры 5 и 7 — это a и c, то $ac - bd \leqslant 5 \cdot 7 - 1 \cdot 2 = 33$.

Если цифры 5 и 7 — это b и d, то $ac - bd \leqslant 8 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = 37$.

Если цифра 5 — это a или c, а цифра 7 — это b или d, то $ac - bd \leqslant 5 \cdot 9 - 7 \cdot 1 = 38$.

Если цифра 7 — это a или c, а цифра 5 — это b или d, то $ac - bd \leqslant 7 \cdot 9 - 5 \cdot 1 = 58$.

Значит, наибольшее возможное значение выражения $\overline{ab} \cdot \overline{cd} - \overline{ba} \cdot \overline{dc}$ равно $99 \cdot 58 = 5742$, оно достигается, например, при $a = 7$, $b = 5$, $c = 9$ и $d = 1$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $99 \cdot 58 = 5742$.

12 а) Решите уравнение $4\cdot 256^{\sin x} - 65\cdot 16^{\sin x} + 16 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $4\cdot\left(16^{\sin x}\right)^2 - 65\cdot 16^{\sin x} + 16 = 0$.

Значит, $16^{\sin x} = 16$ или $16^{\sin x} = \frac{1}{4}$.

Решая первое уравнение, получаем $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решая второе уравнение, получаем $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Найдём корни уравнения, удовлетворяющие двойному неравенству $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\pi$.

В первом случае получаем: $-\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant -\pi$; $-1{,}5 \leqslant n \leqslant -\frac{3}{4}$, где $n \in \mathbb{Z}$; откуда $n = -1$; $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Во втором случае получаем: $-\frac{5\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant -\pi$; $-\frac{4}{3} \leqslant n \leqslant -\frac{7}{12}$, где $n \in \mathbb{Z}$; откуда $n = -1$; $x = -\frac{13\pi}{6}$.

В третьем случае получаем: $-\frac{5\pi}{2} \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant -\pi$; $-\frac{5}{6} \leqslant n \leqslant -\frac{1}{12}$, где $n \in \mathbb{Z}$; нет решений.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

13 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AH^2 = AC^2 + AD^2 - AB^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 4$ и $AC = AD = 3$.

Решение.

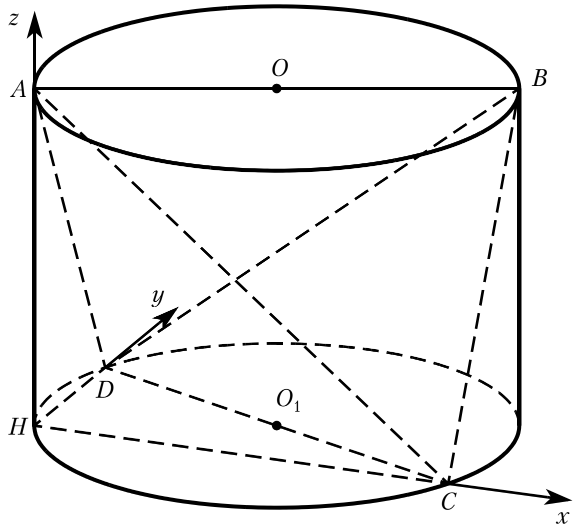
а) По условию данный цилиндр является прямым. Значит, его образующая AH перпендикулярна к плоскости основания и, следовательно, перпендикулярна отрезкам HC и HD. Отсюда по теореме Пифагора получаем $AC^2 = AH^2 + HC^2$ и $AD^2 = AH^2 + HD^2$.

Угол CHD — вписанный, опирающийся на диаметр CD. Значит, этот угол прямой. По теореме Пифагора имеем $AB^2 = CD^2 = HC^2 + HD^2$.

Следовательно,

$$AC^2 + AD^2 - AB^2 = \left(AH^2 + HC^2\right) + \left(AH^2 + HD^2\right) - AB^2 = 2AH^2.$$

б) Введём декартову систему координат $Hxyz$ с началом координат в точке $H(0; 0; 0)$ из решения пункта а), осью Hz в направлении луча HC, осью Hy в направлении луча HD и осью Hz в направлении луча HA.



По доказанному в пункте а) имеем

$$2AH^2 = AC^2 + AD^2 - AB^2 = 3^2 + 3^2 - 4^2 = 2.$$

Получаем $AH = 1$, $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 2\sqrt{2}$ и $HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 2\sqrt{2}$.

Точки A, C, D и центр нижнего основания O_1 имеют координаты $(0; 0; 1)$, $\left(2\sqrt{2}; 0; 0\right)$, $\left(0; 2\sqrt{2}; 0\right)$ и $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0\right)$ соответственно. Значит, центр O верхнего основания имеет координаты $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1\right)$, а точка B — координаты $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1\right)$.

Плоскость ABC имеет в декартовых координатах $Hxyz$ уравнение $\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}} + z = 1.$

Плоскость ABC имеет в декартовых координатах $Hxyz$ уравнение $-\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}} + z = 1$. Значит, векторы $\vec{u}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right)$ и $\vec{v}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right)$ перпендикулярны к плоскостям ABC и ABD соответственно.

Косинус угла α между плоскостями ABC и ABD равен модулю косинуса угла φ между векторами $\vec{u}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right)$ и $\vec{v}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right)$. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{3}{5}$ и $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Ответ: б) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

14 Решите неравенство $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

Решение.

Так как $\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$, то $\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}$, и неравенство принимает вид $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$.

Поскольку $\sqrt{2}+1 > 1$, то $\frac{6x-6}{x+1} \leqslant x$; $\frac{x^2-5x+6}{x+1} \geqslant 0$; $\frac{(x-2)(x-3)}{x+1} \geqslant 0$.

Значит, $x \in (-1;\, 2] \cup [3;\, +\infty)$.

Ответ: $(-1;\, 2] \cup [3;\, +\infty)$.

15 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 100 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 200 центнеров картофеля и получить 1200000 рублей, либо 300 центнеров свеклы и получить 1500000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под свеклу. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 150 центнеров картофеля и получить 900000 рублей, либо 100 центнеров свеклы и получить 500000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под картофель. В этом случае фермер сможет заработать $10 \cdot 300 \cdot 5000 + 10 \cdot 150 \cdot 6000 = 24\,000\,000$ (рублей).

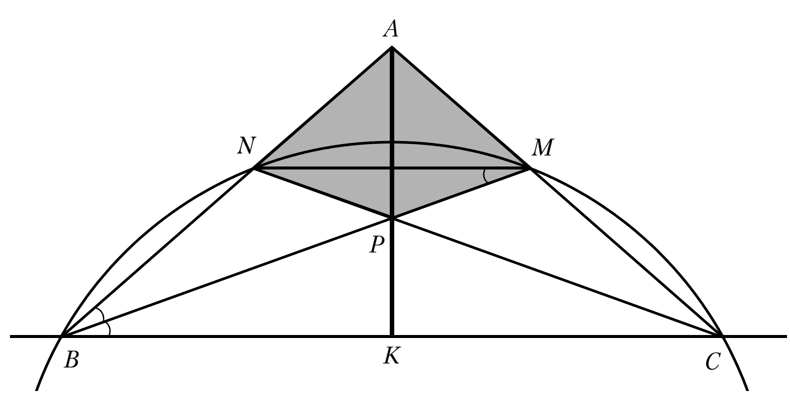
Ответ: 24 млн рублей.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 1 : 2$, а $BN = 12$.

Решение.



а) Вписанные углы NCM и MBN опираются на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Поскольку $\frac{1}{2}\angle ACB = \angle MCN = \angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$, получаем $\angle ACB = \angle ABC$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

б) Поскольку $\angle BCN = \angle MCN = \angle MBN = \angle BMN$, то $BN = NM = MC = 12$ и прямая MN параллельна прямой BC. Отрезок BC равен 24.

Пусть AK — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC. Прямая AK проходит через точку P — центр вписанной окружности.

Треугольник ANM подобен треугольнику ABC, следовательно,

$$\frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$AB = 2BN = 24,$$
$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{24^2 - 12^2} = 12\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AK\cdot BC = \frac{1}{2}PK\cdot(AB + AC + BC),$$

$$PK = \frac{AK\cdot BC}{AB + AC + BC} = \frac{12\sqrt{3}\cdot 24}{24 + 24 + 24} = 4\sqrt{3}, \quad AP = AK - PK = 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

В четырёхугольнике $AMPN$ диагонали AP и MN перпендикулярны, поэтому его площадь равна

$$S_{AMPN} = \frac{1}{2}AP\cdot MN = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{3}\cdot 12 = 48\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $48\sqrt{3}$.

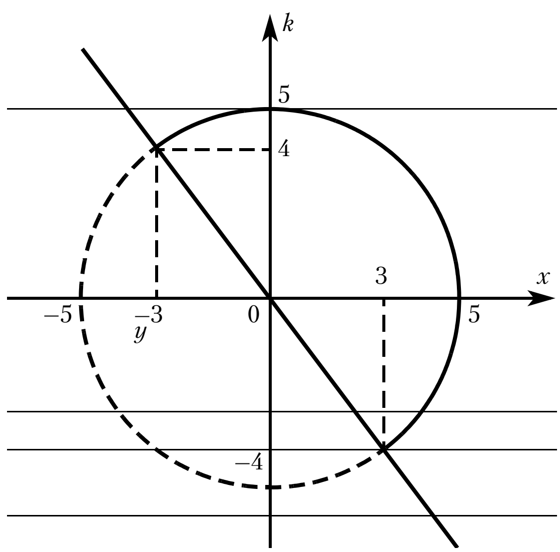
17 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 25)\sqrt{4x + 3k} \leqslant 0$ имеет не более двух решений.

Решение.

При любом значении k число $x = -\frac{3k}{4}$ является решением данного неравенства, поскольку в этом случае $\sqrt{4x + 3k} = 0$ и неравенство верно.

Заметим, что любое решение неравенства, кроме указанного выше, должно удовлетворять неравенству $x > -\frac{3k}{4}$.

Изобразим на плоскости Oxk все решения данного неравенства. Это будут точки $(x; k)$, для которых либо $4x + 3k = 0$, либо $4x + 3k > 0$ и $x^2 + k^2 - 25 \leqslant 0$.



Неравенству удовлетворяют все точки, лежащие на прямой AB и внутри полукруга, ограниченного хордой AB (включая точки границы).

Найдём координаты точек A и B, решив систему

$$\begin{cases} x^2 + k^2 = 25, \\ 4x + 3k = 0. \end{cases}$$

Получим $x = -3$, $k = 4$ или $x = 3$, $k = -4$.

Неравенство имеет единственное решение, если $k \leqslant -4$ или $k > 5$.

При $k = 5$ неравенство имеет ровно два решения: $x = 0$ и $x = -\frac{15}{4}$.

При остальных значениях k неравенство имеет бесконечное число решений.

Ответ: $k \leqslant -4$; $k \geqslant 5$.

18 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 1980$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 350$ и $S_{n+2} = 625$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 625$?

Решение.

а) Да. Например, если $a_1 = 5$ и $d = a_2 - a_1 = 130$, то $S_6 = 6a_1 = 15d = 1980$.

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ — искомая бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, а $d = a_2 - a_1$ — её разность. Тогда по формуле суммы арифметической прогрессии имеем $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ и $S_{n+2} = (n+2) \cdot a_1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot d$. Значит, если n нечётно, то S_n делится на n и S_{n+2} делится на $n+2$, а если n чётно, то S_n делится на $\frac{n}{2}$ и S_{n+2} делится на $\frac{n+2}{2}$. Поскольку $S_{n+2} = 625 = 5^4 \geqslant \frac{(n+2)(n+3)}{2} \leqslant \frac{(n+2)^2}{2}$, отсюда получаем, что число $n + 2 < 25\sqrt{2} < 40$ и может равняться 5 или 5^2 в первом случае и 10 во втором случае. Тогда n может равняться 3, 23 или 8. Приходим к противоречию, так как тогда ни n, ни $\frac{n}{2}$ не являются делителями числа $S_n = 350$.

в) Как показано выше, если n нечётно, то S_n делится на n, а если n чётно, то S_n делится на $\frac{n}{2}$. Поскольку $S_n = 625 = 5^4$, отсюда получаем, что n может равняться 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4 в первом случае и 2, 10, $2 \cdot 5^2$, $2 \cdot 5^3$, $2 \cdot 5^4$ во втором случае. Кроме того, имеем $S_n = 625 = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \geqslant \frac{n(n+1)}{2} > \frac{n^2}{2}$. Отсюда получаем, что $n < 25\sqrt{2} < 40$.

Для $n = 1$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 625$ и $d = 1$. Для $n = 2$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 312$ и $d = 1$. Для $n = 5$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 123$ и $d = 1$. Для $n = 10$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 58$ и $d = 1$. Для $n = 25$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 13$ и $d = 1$. Значит, существует ровно 5 искомых натуральных чисел.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «ВЕРОЯТНОСТЬ»

1.7.67. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 3. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно три броска? Ответ округлите до сотых.

Решение.

Ровно три броска случится в двух случаях.

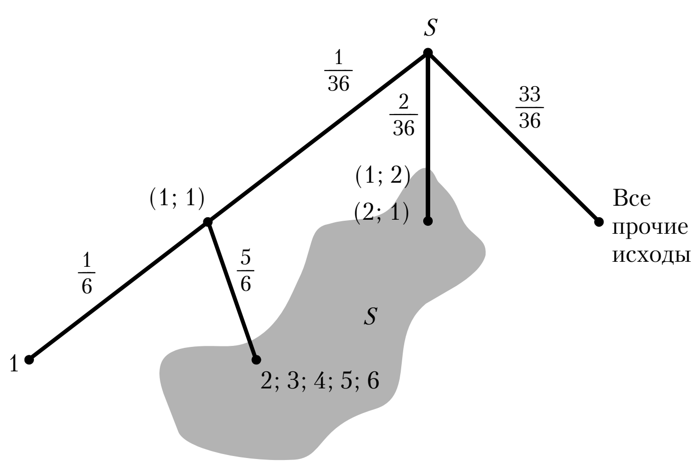
1. При первых двух бросках выпала одна из комбинаций (1; 2) или (2; 1). Вероятность этого равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

2. При первых двух бросках выпали две единицы, а при третьем — любое число очков, которое больше единицы. Вероятность этого события равна $\frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$.

Складывая вероятности этих несовместных событий, получаем вероятность искомого события «потребуется ровно три броска».

$$P(A) = \frac{1}{18} + \frac{5}{216} = \frac{17}{216} \approx 0{,}078.$$

Эксперимент и проведенные рассуждения можно проиллюстрировать деревом.



Ответ: 0,08.

1.7.69. Стрелок в тире стреляет по мишени. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать этому стрелку, чтобы вероятность поражения цели была не менее 0,5?

Решение.

Вероятность события «стрелок промахнулся n раз» равна $0{,}8^n$. Значит, вероятность противоположного события $\overline{A}$ «имея n патронов, стрелок попал в мишень», равна $1 - 0{,}8^n$. Составим неравенство:

$$1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}5, \text{ откуда } n \geqslant \log_{0{,}8} 0{,}5.$$

$$0{,}8^3 = 0{,}512 > 0{,}5, \text{ а } 0{,}8^4 = 0{,}4096 < 0{,}5.$$

Значит, $3 < \log_{0{,}8} 0{,}5 < 4$. Следовательно, стрелку нужно дать не менее 4 патронов.

Другое решение.

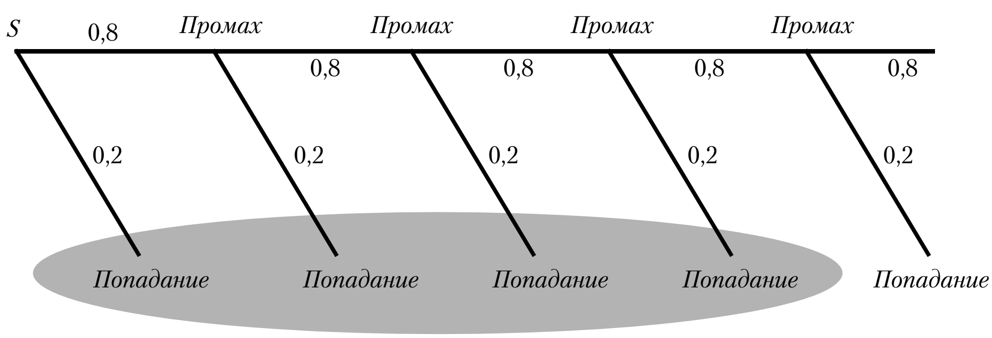
Вероятность попадания при трёх выстрелах равна

$$0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \cdot \frac{1 - 0{,}8^3}{1 - 0{,}8} = 0{,}488 < 0{,}5.$$

Значит, трёх патронов недостаточно. Вероятность попадания при четырёх выстрелах равна

$$0{,}488 + 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}488 + 0{,}1024 > 0{,}5.$$

Значит, четырёх патронов достаточно для поражения мишени с вероятностью 0,5 или выше. Эксперимент можно проиллюстрировать деревом.



Ответ: 4.

1.7.71. В ящике три красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

Решение.

Элементарные события в этом эксперименте можно записать КСККС, СКККС и т.п. Буквы означают красный и синий цвета. Всего элементарных событий $N = C_5^2 = 10$. Все они равновозможны. Событию A «Первый синий появится третьим по счёту» благоприятствуют два элементарных события ККССК и ККСКС. Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

Другое решение.

Вероятность при первой попытке вынуть красный фломастер, равна $\frac{3}{5}$. Если это случилось, то в ящике осталось 2 красных фломастера из 4. Поэтому вероятность достать красный фломастер при второй попытке равна $\frac{2}{4}$. При этом условии третий фломастер окажется синим с вероятностью $\frac{2}{3}$, поскольку в ящике останется 3 фломастера, и 2 из них синие. Пользуясь правилом умножения, находим:

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}2.$$

Эксперимент можно проиллюстрировать деревом. Сделайте это самостоятельно.

Ответ: 0,2.

1.7.73. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Решение.

Вероятность не поразить каждую отдельную мишень одним выстрелом равна 0,4, поэтому вероятность не поразить её двумя независимыми выстрелами равна 0,16. Значит, получается серия из 5 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}84$ и вероятностью неудачи $q = 0{,}16$.

Найдем искомое отношение:

$$\frac{P(\{\text{поражены ровно 3 мишени}\})}{P(\{\text{поражены ровно 2 мишени}\})} = \frac{C_5^3 p^3 q^2}{C_5^2 p^2 q^3} = \frac{10p}{10q} = \frac{0{,}84}{0{,}16} = 5{,}25.$$

Ответ: 5,25.

1.7.75. Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов (шоколадное яйцо с игрушкой внутри). Всего в серии 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс.

У Маши уже есть три разные принцессы. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы, которой раньше не было в Машиной коллекции, ей придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

Решение.

В Машиной коллекции не хватает 7 различных принцесс. Значит, вероятность того, что при следующей покупке Маше попадётся одна из отсутствующих принцесс, равна 0,7. Получается серия независимых испытаний до первого успеха с вероятностью успеха $p = 0{,}7$ и неудачи $q = 0{,}3$. Вероятность того, что успех случится со второй или с третьей попытки, равна

$$qp + q^2p = pq(1 + q) = 0{,}7 \cdot 0{,}3(1 + 0{,}3) = 0{,}273.$$

Ответ: 0,273.

1.7.77. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 6 очков.

Решение.

Поскольку известно, что сумма выпавших очков равна 8, эксперимент состоит из пяти равновозможных элементарных событий

$$(2;\, 6),\ (3;\, 5),\ (4;\, 4),\ (5;\, 3) \text{ и } (6;\, 2).$$

Событию «в первый раз выпала шестёрка» благоприятствует единственное элементарное событие. Искомая вероятность равна $\frac{1}{5}$.

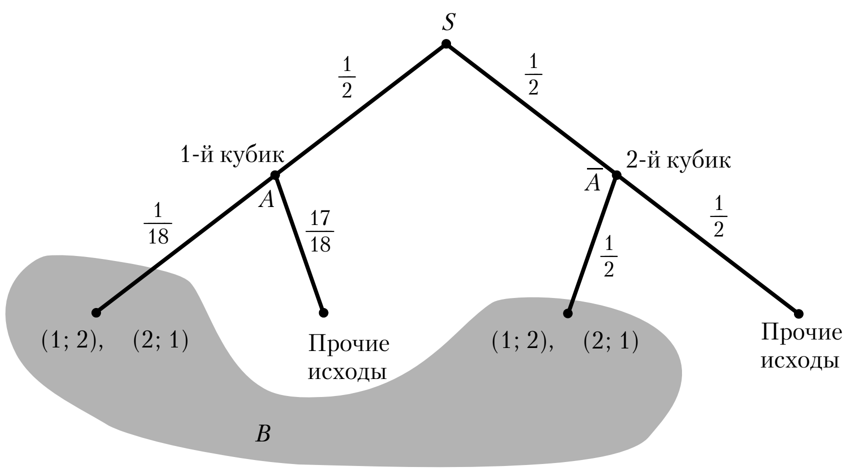
Ответ: 0,2.

1.7.79. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые и симметричные.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Решение.

Построим дерево проведённого случайного опыта. Поскольку кубик выбирался наудачу, вероятности события A «бросали 1-й кубик» и события $\overline{A}$ «бросали 2-й кубик» равны.



Событие B «выпала одна из комбинаций (1; 2) или (2; 1)» показано на рисунке закрашенной областью, и его вероятность равна

$$P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

Требуется найти условную вероятность $P(A|B)$, то есть долю, которую вероятность события $A \cap B$ занимает в вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: 0,1.

1.7.82. За круглый стол на 26 стульев в случайном порядке рассаживаются 24 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки не будут сидеть рядом.

Решение.

Пусть первая девочка заняла какой-то из стульев. Тогда случайный опыт сводится к выбору одного из 25 равновозможных свободных стульев для второй девочки. Из них 23 не соседствуют с местом первой девочки, поэтому искомая вероятность равна $\frac{23}{25} = 0{,}92$.

Ответ: 0,92.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

1. Алгебра 7

1.1. Рациональные уравнения и выражения 7

1.2. Иррациональные уравнения и выражения 15

1.3. Степенные уравнения и выражения 17

1.4. Тригонометрические уравнения и выражения 19

1.5. Логарифмические уравнения и выражения 22

1.6. Функции и графики 24

1.7. Вероятность 30

2. Геометрия 38

2.1. Длины 38

2.2. Углы 39

2.3. Тригонометрия 42

2.4. Площади 44

2.5. Стереометрия 46

3. Начала математического анализа 53

3.1. Геометрический и физический смысл производной 53

3.2. Техника дифференцирования 57

3.3. Исследование функций 59

3.4. Первообразная 67

4. Задачи повышенной сложности 72

4.1. Уравнения 72

4.2. Неравенства и системы неравенств 73

4.3. Уравнения и неравенства с параметром 75

4.4. Планиметрия 77

4.5. Стереометрия 79

4.6. Арифметика и алгебра 81

4.7. Экономические задачи 84

Тренировочные варианты Единого государственного экзамена. Профильный уровень . . . 87
Тренировочный вариант 1 . . . 87
Тренировочный вариант 2 . . . 90
Тренировочный вариант 3 . . . 93
Тренировочный вариант 4 . . . 96
Тренировочный вариант 5 . . . 99
Тренировочный вариант 6 . . . 102
Тренировочный вариант 7 . . . 105
Тренировочный вариант 8 . . . 108
Тренировочный вариант 9 . . . 111
Тренировочный вариант 10 . . . 114
Тренировочный вариант 11 . . . 117
Тренировочный вариант 12 . . . 120
Тренировочный вариант 13 . . . 123
Тренировочный вариант 14 . . . 126
Тренировочный вариант 15 . . . 129
Тренировочный вариант 16 . . . 132
Тренировочный вариант 17 . . . 135
Тренировочный вариант 18 . . . 138
Тренировочный вариант 19 . . . 141
Тренировочный вариант 20 . . . 144
Тренировочный вариант 21 . . . 147
Тренировочный вариант 22 . . . 150
Тренировочный вариант 23 . . . 153
Тренировочный вариант 24 . . . 156
Тренировочный вариант 25 . . . 159
Тренировочный вариант 26 . . . 162
Тренировочный вариант 27 . . . 165
Тренировочный вариант 28 . . . 168
Тренировочный вариант 29 . . . 171
Тренировочный вариант 30 . . . 174

Ответы . . . 177

Приложение 1. Решения заданий с развёрнутым ответом . . . 187
Тренировочный вариант 1 . . . 187
Тренировочный вариант 6 . . . 193
Тренировочный вариант 11 . . . 198
Тренировочный вариант 16 . . . 202
Тренировочный вариант 21 . . . 206
Тренировочный вариант 26 . . . 210

Приложение 2. Решения заданий по теме «Вероятность» . . . 215

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия «Единый государственный экзамен»

МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
Готовимся к итоговой аттестации

Семёнов А. В., **Трепалин** А. С., **Ященко** И. В., **Высоцкий** И. Р., **Титова** Л. А.
Под редакцией **Ященко** И. В.

Генеральный директор *М. Б. Миндюк*
Редактор *Д. П. Локтионов*
Художественный редактор *Е. Ю. Воробьёва*
Компьютерная вёрстка и макет: *Ю. А. Погодина*
Серийное оформление обложки: *М. В. Борисов, Е. В. Лупенко*

Подписано к использованию 24.09.22
Формат 19,0×28,0 см
Гарнитура Petersburg

ООО «Издательство «Интеллект-Центр»
125445, Москва, ул. Смольная, д. 24А, этаж 6, ком. 24
Тел.: (495) 660-34-53
Сайт: https://www.intellectcentre.ru/
Эл. почта: intellect@izentr.ru

Электронное издание данной книги подготовлено
Агентством электронных изданий «Интермедиатор»
Сайт: http://www.intermediator.ru
Телефон: (495) 587-74-81
Эл. почта: info@intermediator.ru