Элементы теории вероятностей. Основные определения.

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта, обозначают «*A, B, C*…»

Определение. Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Определение. Вероятностью события *A* называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.

Вероятность события A равна отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта (m) к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий (n).

$$P(A)=\frac{m}{n} \Rightarrow \underset{\text{не взможное событие}}{0} \le P(A) \le \underset{\text{достоверное событие}}{1}$$

Комбинаторика изучает вопросы о том, сколько различных наборов, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из конечного множества элементов.

Способы подсчета количества наборов, удовлетворяющих заданным условиям: непосредственный подсчет, правило суммы, правило произведения, перестановки, сочетания, размещения.

Правило суммы: если элемент *A* можно выбрать *m* способами, а элемент *B* можно выбрать *n* способами (при этом выбор *A* исключает *B* и наоборот), тогда *A* или *B* можно выбрать *(m+n)* способами.

Правило произведения: если элемент *A* можно выбрать m способами, а затем элемент *B* можно выбрать n способами, тогда *A* и *B* можно выбрать *(m*n)* способами.

Перестановками называются наборы, состоящие из одного и того же количества элементов, отличающихся только порядком следования элементов.

Размещениями называются упорядоченные наборы из *m* элементов, выбранных из *n* элементов, которые отличаются друг от друга, как порядком следования, так и составом элементов.

Сочетаниями называются упорядоченные наборы из *m* элементов, выбранных из *n* элементов, которые отличаются друг от друга составом элементов.

	Перестановки	*Сочетания*	*Размещения*
Без повторов	$P_n = n!$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
С повторами	$\left.\begin{array}{l} \overline{P_n} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!...k_p!} \\ k_1+k_2+...+k_p = n \end{array}\right\}$	$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$	$\overline{A_n^m} = n^m$

Повторные испытания. Формула Бернулли.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие *A*, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события *A*.

Допустим, что событие *A* наступает в каждом испытании с вероятностью *P(A)=p*. Определим вероятность того, что в результате *n* испытаний событие *A* наступило ровно *m* раз: $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$.

Отношения между событиями

Определение. События называются несовместными («*или*»), если появление одного из них исключает появление других, в противном случае они – совместны.

Определение. События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

Определение. Событие *A* называется независимым от события *B*, вероятность события *A* не зависит от того, произошло событие *B* или нет. (между ними можно поставить «*и*»)

Определение. Событие *A* называется зависимым от события *B*, если вероятность события *A* меняется в зависимости от того, произошло событие *B* или нет.

Теорема (сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных (появления одного из них) событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \text{ или } B) = P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Следствие: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Теорема (Умножения вероятностей). Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(A\ и\ B)=P\left(A\cap B\right)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$
$$P(A\ и\ B)=P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)\text{- не зависимые события};$$

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1,H_2,...,H_n\Rightarrow P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)=1;$

образующих *полную группу* событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1),P(H_2),...,P(H_n).$

и условные вероятности наступления события A при наступлении события $P(A/H_1),P(A/H_2),...,P(A/H_n).$

Тогда вероятность события A, можно найти по формуле $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+...+P(H_n)P(A/H_n)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i).$

Формула Байеса

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1,H_2,...,H_n,$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1),P(H_2),...,P(H_n).$ Пусть в результате опыта наступило событие A, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1),P(A/H_2),...,P(A/H_n).$ Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1,H_2,...,H_n,$ относительно события A, т.е. условные вероятности $P(H_i/A).$

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}-\text{формула Байеса}.$$

Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется рядом распределения.

Графическое представление этой таблицы называется многоугольником распределения. При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

Случайные величины

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть, как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется рядом распределения.

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности. Формула: $m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(Cx) = CM(x)$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных (справедливо для произвольного числа случайных величин) величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X)M(Y)$.

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин (справедливо для произвольного числа случайных величин) равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X+Y)+M(X)+M(Y)$.

Определение. Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Формула: $D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2=D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2$

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$.

3. Дисперсия суммы или разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Повторные испытания. Формула Бернулли.

Математическое ожидание: $M(X)=np$.

Дисперсия: $D(X)=np\left(1-n\right)=npq$

Элементы математической статистики.

Математическая статистика – наука, изучающая методы исследования закономерностей в массовых случайных явлениях и процессах по данным, полученным из конечного числа наблюдений за ними.

Мода — это наиболее часто встречающийся вариант ряда. Мода применяется, например, при определении размера одежды, обуви, пользующейся наибольшим спросом у покупателей. Модой для дискретного ряда является варианта, обладающая наибольшей частотой.

Медиана — это значение признака, которое лежит в основе ранжированного ряда и делит этот ряд на две равные по численности части.

Выборочным средним называется величина равная среднему арифметическому ряда.

Размахом вариационного ряда называется разность наибольшего и наименьшего значений ряда.

Задачи.

1. В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 13 из них встречается вопрос по оптике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по оптике.

2. На соревнования по толканию ядра приехали 7 спортсменов из России, 7 из Швеции и 6 из Сербии. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что седьмым будет выступать спортсмен из Швеции?

3. Сколько различных способов переставить 10 различных книг на полке?

4. На 10 карточках написаны буквы М , А, Т, Е, М, А, Т, И, К, А. Сколько существует способов переставить эти буквы между собой?

5. Кодовый замок состоит из 6 барабанов, на каждом из которых цифры от 0 до 9. Сколько различных шестизначных числовых кодов существует?

6. Алфавит шифровальщика состоит из 6-ти различных символов, каждое слово состоит из 4 различных символов. Сколько различных слов в арсенале шифровальщика?

7. В студенческой группе 15 студентов и 12 студенток. Требуется отправить 5 студентов и 3 студенток на конференцию в Прагу. Сколько различных комбинаций для формирования делегации существует?

8. В студенческой группе 15 студентов и 12 студенток. Требуется отправить 5 студентов или 3 студенток на конференцию в Прагу. Сколько различных комбинаций для формирования делегации существует?

9. На олимпийские игры в Сочи в 2014 году прибыли команды с 5-ти континентов. На торжественное поднятие флага создаётся делегация из 18 участников. Сколько различных комбинаций для создания такой делегации существует, если от каждого континента должен быть хотя-бы один участник?

10. В случайном эксперименте монету бросают трижды. Какова вероятность, что орел выпадет ровно 1 раз?

11. Перед началом волейбольного матча судья бросает монету, чтобы определить какая команда будет владеть мячом первой. Команда «Байкал» по очереди играет с командами «Амур», «Енисей», «Вилюй», «Иртыш». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах команда «Байкал» будет владеть мячом первой.

11*. Найдите вероятность, что при броске двух кубиков на обоих выпадет число большее трех.

12. Биатлонист стреляет по мишени. Вероятность попадания, в центр мишени, при одном выстреле 0,9. Он стреляет 5 раз. Какова вероятность, что он попал все 5 выстрелов в центр мишени? Округлите до сотых.

13. Биатлонист стреляет по мишени. Вероятность попадания, в центр мишени, при одном выстреле 0,7. Он стреляет 5 раз. Какова вероятность, что не попал ни разу в центр мишени?

14. Биатлонист стреляет по мишени. Вероятность попадания, в центр мишени, при одном выстреле 0,8. Он стреляет 5 раз. Какова вероятность, что он попал ровно один раз в центр мишени?

15. На экзамене школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных. Вероятность того, что вопрос на тему «Тригонометрия» составляет 0,1. Вероятность, что на тему «Внешние углы» 0,15. Вопросов, относящихся одновременно к обоим этим темам, нет. Найдите вероятность, что на экзамене достанется вопрос по одной из этих двух тем.

16. Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течении года 0,1. Какова вероятность, что в течении года хотя бы одна лампа не перегорит?

17. В аэропорту два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате кофе закончится равно 0,35. Вероятность того, что кофе закончиться в обоих автоматах 0,16. Какова вероятность, что кофе останется в обоих автоматах?

18. Вероятность того, что на тесте по физике учащийся решит больше 9 задач равна 0,61. вероятность того, что больше 8 задач равна 0,73. Какова вероятность, что учащийся решит ровно 9 задач?

19. В параллели 51 учащийся. Их случайным образом распределяют на три группы по 17 человек. Какова вероятность, что два друга Сергей и Вадим окажутся в одной группе?

20. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая выпускает 45% всех стекол, вторая 55%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных фар, вторая 3%. Какова вероятность, что случайно купленное стекло бракованное?

21. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что по ошибке исправную, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет заблокирована системой контроля?

22. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 43% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

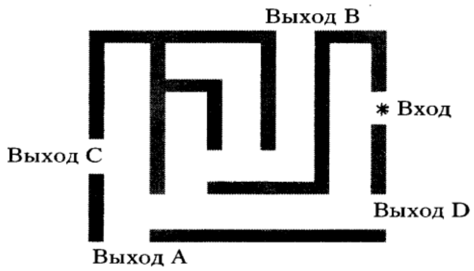
23. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая выпускает 45% всех стекол, вторая 55%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных фар, вторая 3%. Какова вероятность, что случайно купленное бракованное стекло выпущено на первой фабрике?

24. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что по ошибке исправную, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка, заблокированная системой контроля, была исправна.

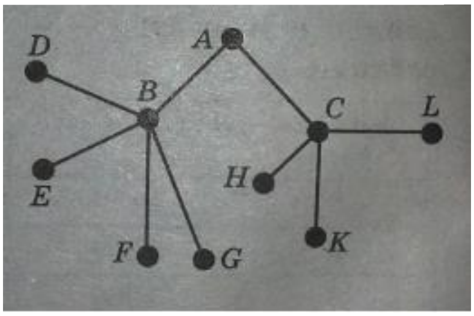
25. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 43% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что положительный результат анализа оказался у здорового пациента.

26. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения цели при первом выстреле равна 0,3, при каждом последующем – 0,4. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,9?

27. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу *А*.



28. Пенсионер гуляет по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Пенсионер начинает прогулку в точке А. Найдите вероятность того, что он придет в точку G.



29. Вероятность того, что новый мобильный телефон выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,3. Если телефон проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в телефоне нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый телефон прослужит больше года, но не больше трёх лет.

30. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

31. В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

32. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов,

направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

33. Телефон передает *sms*-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой следующей попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше 2 попыток.

34. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

35. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «*Шеш-беш*»: гость бросает одновременно 2 игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.

36. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

37. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет следующий раунд?

38. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда А. Какова вероятность того, что команда А не самая сильная, если она прошла в третий раунд?

39. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p=0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1–p$ меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен – 1?

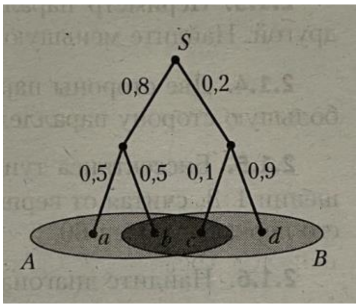
40. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

41. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные

игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 10 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

42. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

43. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c, а событию B благоприятствуют события b, c, d. Найдите вероятность $P(A|B)$ – условную вероятность A при условии B.



44. В таблице показан закон распределения случайной величины X. Найдите неизвестный параметр «a», математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

X	-3	0	2	3
$P(X)$	a	0,1	0,2	0,1

45. Для независимых случайных величин X и Y заданы законы распределения:

X	0	1	2
$P(X)$	0.25	0.35	a

Y	-1	0	1
$P(Y)$	0.24	a	b

Найдите $M(7x-18y+6)=M_1$, $D(2x-3y+6)=D_2$, результат округлите до сотых.

46. Для вариационного ряда: 1,1,1,5,5,5,2,2,3,1,1,4,8,9,7,7,7,7,5,6,4,8,9,5,4,7,5. Укажите моду (M), медиану (M_1), среднее (C) и размах (R).

47. Про случайную величину X известно, что $M(x)=4$, $D(x)= 10$. Оцените при помощи неравенства Чебышева вероятность события «$X<-1$ или $X>=9$».

Ответы:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
0,48	0,35	10!	151200	1000000	360	$C_{15}^{5} \cdot C_{12}^{3}$	$C_{15}^{5} + C_{12}^{3}$	$\overline{C_{5}^{13}}$	0,375
11.	11*.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
0,375	0,25	0,59	0,00243	0,00064	0,25	0,999	0,46	0,12	0,32
20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.
0,039	0,0575	0,3611	15/26	96/575	171/3611	5	0,0625	0,125	0,357
30.	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.
0,25	*решение*	0,43	0,64	1,2	0,11	0,26	0,75	0,2	0,25
40.	41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.
4,8	0,2	0,192	0,7	a=0,6; M=-1.1 D=5.89	a=0.4; b=0.36; M_1=11.89; D_1=7,78	M=5 M_1=5 C=4.78 R=8	0,4		