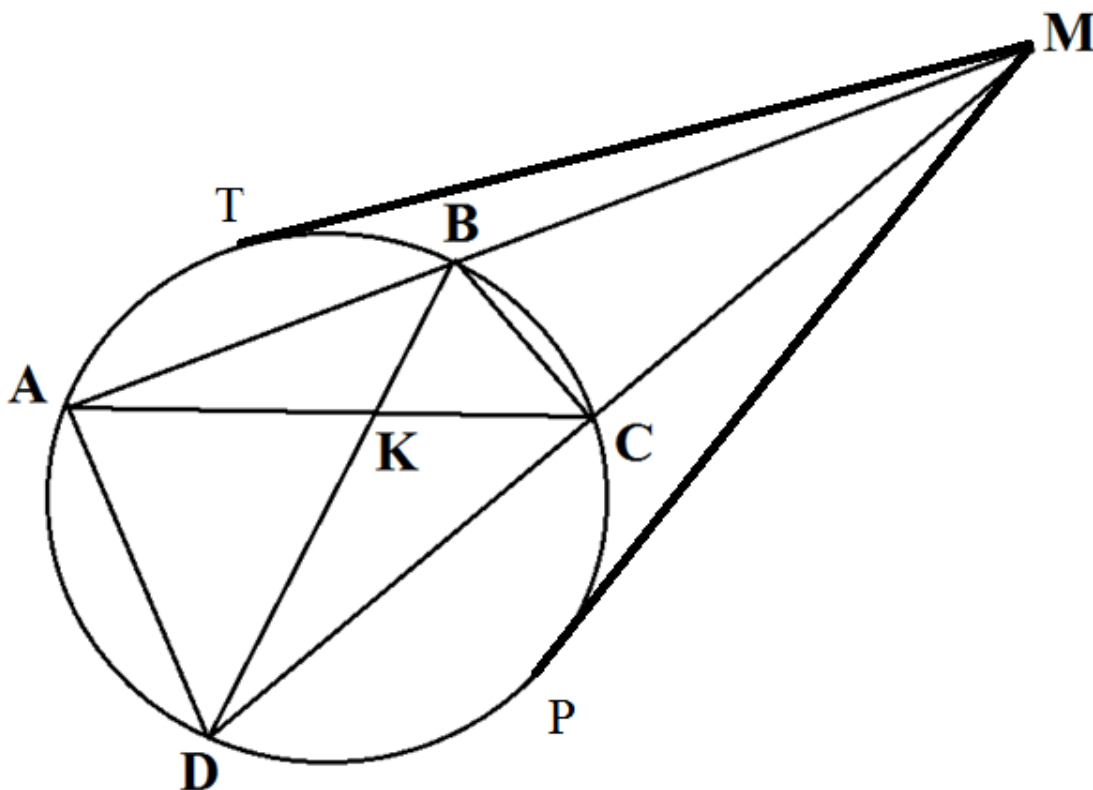


Четыре точки на окружности

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ (в этом порядке следования). Для того, чтобы его вершины были расположены на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих равенств:



- (1) $\angle ABD = \angle ACD$;
- (2) $\angle A + \angle C = 180^\circ$;
- (3) $KA \cdot KC = KB \cdot KD$, K – точка пересечения диагоналей;
- (4) $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, M – точка пересечения прямых AB и CD ;
- (5) $MT = MP$;
- (6) $MT^2 = MP^2 = MB \cdot MA = MC \cdot MD$;

Углы, связанные с окружностью: вписанный, центральный, между секущими, между хордами, между касательной и хордой.

Решение задач 1 группа задач

1. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) такова, что что окружность, описанная около ABD , касается прямой BC . Докажите, что окружность, описанная около $B CD$, касается прямой AD .

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CBD = 58^\circ$, $\angle ABD = 44^\circ$, $\angle ADC = 78^\circ$. Найдите $\angle CAD$.
3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через точки A и B и пересекает прямую BC в точке M , отличной от B и C . Найдите расстояние от точки O до центра окружности, описанной около треугольника ACM .
4. $ABCD$ – вписанный. AB и CD пересекаются в точке K . Точки B, D , и середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?
5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность. Касательные, проведенные к этой окружности в точках B и C , пересекаются в точке P . Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB , и AC . Докажите, что точка пересечения высот ADE является серединой BC .
6. Точка F середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE . Найдите угол CEF .
7. В треугольнике ABC точка A_1, B_1 и C_1 середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, угол BAC равен 60° , а угол BCA равен 45° .
- а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H – лежат на одной окружности.
- б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.
8. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Угол AEC в 5 раз больше угла BAF , а угол ABC равен 72° . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.
9. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M , равноудаленную от точек C и D . K – середина AB . Докажите, что MKD – прямой.
10. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 , K и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1 .
- а) Докажите, что $MK \parallel AC$.
- б) Найдите площадь KBM , если $AC=10, BC=6, AB=8$.
11. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB=BC=1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырехугольника $AKML$, где M – точка пересечения

отрезков BL и CK , можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC .

12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек K и M опущены высоты ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH к AC , если $\angle ABC = 30^\circ$.

13. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность с центром в точке B радиуса AB пересекает прямую AB в точке E ; прямая EC пересекает окружность в точке F , а продолжение стороны AD в точке K .

а) Докажите, что $DK=DF$.

б) Найдите длину KC , если $BF=20$, $DF=21$.

14. Точка I — центр окружности S_1 , вписанной в треугольник ABC , точка O — центр окружности S_2 , описанной около треугольника BIC .

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Найдите косинус угла BAC , если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как 3: 4.

15. Известно, что BM и CN — высоты треугольника ABC , при этом $MN=10$ и $BC=26$. Найдите расстояние между серединами отрезков MN и BC .

16. Основание CD , диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p . Боковая сторона BC равна q . Найдите диагональ AC .

17. Точки A , B , C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что градусные меры меньших дуг AB , BC , CD и AD относятся как 1:3:5:6. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$.

18. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Угол AEC в 5 раз больше угла BAF , а угол ABC равен 72° . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

19. Из точки P , расположенной внутри острого угла с вершиной A , опущены перпендикуляры PB и PC на стороны угла. Известно, что $\angle CBP = 25^\circ$. Найдите угол CAP .

21. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a . Из конца K диаметра KP , параллельного стороне AB , сторона BC видна под углом β . Найдите радиус окружности.

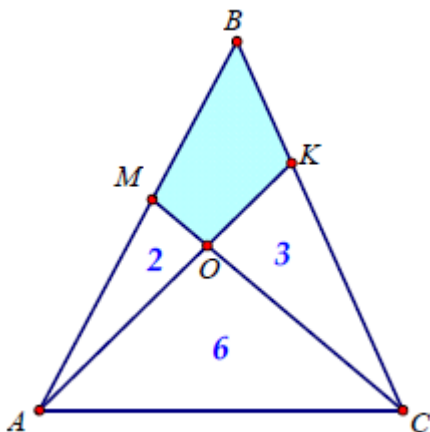
21. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$. Найдите AD .

22. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC . Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найдите угол ABC .

23. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a . Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности, и найдите её радиус.

24. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE , пересекающиеся в точке O . Известно, что $OE = 1$, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E , D и O . Найдите стороны и углы треугольника EDO .

25. Две прямые AK и CM делят треугольник ABC на три треугольника и четырёхугольник. На рисунке цифрами обозначены площади этих треугольников. Найдите площадь четырёхугольника $BМОК$.



26. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH и медиана AM , причем точки A , B , H , M лежат на одной окружности.

а) Докажите, что ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь ABC , Если $AM:BN=4:3$ и $MN=3$.

27. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B . На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot OA$ от прямой OA , а на луче OA взята точка N на расстоянии $3 \cdot OB$ от прямой OB . Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB равна 3.

а) Докажите, что AOB подобен MON .

б) Найдите длину отрезка MN .

2 группа задач

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$. б) Найдите углы трапеции.

2. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P , отличной от O , и не проходят через точку O . Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN .

б) Найдите площадь четырёхугольника $OPMN$, если известно, что $AC = BD$, а $MN = 10$.

4. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB .

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1:4.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH .

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH .

б) Найдите CL , если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD , P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC .

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB .

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q . Найдите отношение $PM:BQ$, если известно, что $AB:AC = 1:3$.

7. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D . При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.

8. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

- а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.
- б) Найдите угол ABC , если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC .
9. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A . Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M .
- а) Докажите, что M — середина AB .
- б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P . Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды AP , если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.
10. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D , отличной от A .
- а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC .
- б) Найдите угол BAC , если известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, а точка D лежит на стороне BC , причём $DB:DC = 1:3$.
11. Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.
- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- б) Найдите его боковые стороны.
12. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN . Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.
- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.
13. Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.
- а) Докажите, что трапеция равнобедренная.
- б) Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.
14. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .
- а) Докажите, что $KT \parallel DE$.
- б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.
15. Точки D и E — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.
- а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.
- б) Найдите MN , если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

17. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB .

б) Найдите высоту треугольника ABC , проведённую из вершины A .

18. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM:MB=2:1$.

Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = \sqrt{6}$.

19. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

20. Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC , продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N . Точка M — середина основания BC .

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM , если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

3 группа задач «Прямоугольный треугольник»

1. Дана гипотенуза c и радиус r вписанной в прямоугольный треугольник окружности. Найти площадь треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.

3. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

4. Дан треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см. Найти расстояние между центрами описанной и вписанной окружности.

5. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противоположного острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?

6. Длина высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 25 см, а радиус вписанной окружности равен 8 см. Найти длину основания треугольника.

7. Внутри прямого угла дана точка M , расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M , отсекает от прямого угла треугольник площадью 100. Найти катеты этого треугольника.
8. На большем катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 см, а длина хорды, соединяющей вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 6 см.

4 группа задач «Параллельные прямые»

1. Доказать, что для трапеции следующие четыре точки: середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон - лежат на одной прямой.
2. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти стороны треугольника.
3. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники, и их вершины последовательно соединены. Найти отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.
4. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.
5. Основания двух правильных треугольников со сторонами a и $3a$ лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно $2a$. Найти расстояние между вершинами треугольников, не принадлежащими данной прямой.
6. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки длиной 4 и 2 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Каковы длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами?