Классификация по Мирошину: Аналитический, Функциональный, Графический, Замены, Изменение ролей переменных, Переход от общего к частному, Свободные ассоциации, Комбинированные методы, Метод «обратного хода».

В школьном курсе математики используются два базовых понятия «непрерывность» и «дискретность» или «теория функции» и «теория числа».

«Графические (непрерывность и точки разрыва) методы» и «Дискретные (равносильно - следственные преобразования, ограничения на операции) методы».

«Графический» подход (основы для решения)

Свойства функции: монотонность, ограниченность, четность (нечетность), минимакс «экстремум», условный экстремум, симметрия, точки разрыва, область определения, область значений, график параболы, график прямой (модификации с ними).

«Дискретный» подход (основы для решения)

Сводится к квадратному уравнению, неравенству, к линейному уравнению, неравенству, весь методы графического (если функция задана формулой). Ограниченность операций (деление на 0, возведение в четную степень, корень четной степени, ОДЗ).

1. Решить уравнение $(a^2-9)x=a+3$

2. Решите уравнение $\frac{x-a}{x+3}=0$.

3. Решите неравенства $\frac{x-a}{x+3}>0$; $\frac{x-a}{x+3}\ge 0$; $\frac{x-a}{x+3}<0$; $\frac{x-a}{x+3}\le 0$;

4. Решите уравнение $(a+1)x^2-2x+1-a=0$

5. Решить уравнение $\sqrt{x-b}(x+4)=0$

6. Решите неравенства $\sqrt{x-b}(x+4)>0; \sqrt{x-b}(x+4)\ge 0; \sqrt{x-b}(x+4)<0; \sqrt{x-b}(x+4)\le 0;$

7. Решить уравнение $\left|x^2-1\right|+\left|a(x-1)\right|=0$

8. Решите неравенство $(1-b^2)x^2+2bx+1\ge 0$.

9. При каких a уравнение $ax^2-x+3=0$ имеет единственное решение?

10. При каких a уравнение $(a-2)x^2+(4-2a)x+3=0$ имеет единственное решение?

11. Найдите все значения параметра «а», при которых система имеет единственное решение
$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0; \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x; \\ \left(x+y+a\sin^2 z\right)\left((1-a)\ln(1-xy)+1\right)=0. \end{cases}$$

12. Найдите все значения параметра «а», при которых система имеет единственное решение $\begin{cases} xyz+z=a; \\ xyz^2+z=b; \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$

13. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $x+2\left|x-3\right|-3\left|x-a-4\right|=7\left|x-a\right|$ имеет хотя-бы один корень.

14. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых неравенство $7x+3|x+a|-2|x-3|\geq 6$ выполняется для любого значения $x\in[0;7]$.

15. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых система $\begin{cases}\left(x-\sqrt{4-z}\right)^2+\left(y-\sqrt{z}\right)^2=1;\\(x-a)^2+(y-a)^2=9;\end{cases}$ имеет хотя-бы одно решение.

16. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых число 9 является решением неравенства $(x-9)(x-16)\sqrt{a^2-8a\log_8(x-8)-9}\geq 0$, а число 16 не является.

17. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых система $\begin{cases}(x+a-6)^2+(y-a)^2=18,\\\sqrt{x^2+(y-6)^2}+\sqrt{y^2+(x-6)^2}=6\sqrt{2}.\end{cases}$ имеет ровно 2 решения.

18. Найдите все значения параметра «а», при которых уравнение $|2x-a|=|x+3|-1$ имеет единственное решение.

19. Найти количество корней уравнения $(a-2x+x^2)(a+1-|x-1|)=0$ в зависимости от параметра «a»

20. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x-y)(xy-1)\geq 0$.

21. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}\leq 0$

22. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $\left(p-x^2\right)(p+x-2)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leq 1$.

23. Сколько решений имеет система $\begin{cases}|x|+|y|=a,\\x^2+y^2=1\end{cases}$ в зависимости от параметра «a»?

24. При каких положительных значениях параметра «a», система $\begin{cases}\big|4-|x-2|\big|-|y|=0\\x^2+y^2=a^2+4(x-1)\end{cases}$ уравнений имеет ровно четыре решения?

25. Найти все положительные значения параметра «a» при каждом из которых данная система $\begin{cases}x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\leq 0\\x^2-a^2=-y^2\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

26. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$ имеет три различных решения.

Ответ: $(-\infty;-1),(-1;0)$

27. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых система $\begin{cases}\dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0\\y=ax\end{cases}$ уравнений имеет ровно два решения.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{9}\right),\{3\}$

28. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень.

$a^2+13|x+1|+5\sqrt{x^2+2x+5}=2a+3|x-4a-1|$

29. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-1}\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\ln(5x+a)$ имеет единственный корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и $\left[-\frac{1}{4};2\right)$

30. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)$ имеет единственный корень на отрезке $[0;2]$.

Ответ: $\left(\frac{7}{8};\frac{5}{4}\right)$

31. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых система имеет четыре различных решения.

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0; \\ x^2=y^2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3};-1\right),(-1;-0.6),\left(-0.6;-2+\sqrt{2}\right),$

32. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0.$$

Ответ: $(-\infty;-6),(-6;-3),(-3;0),(0;3),(3;6),(6;+\infty)$

33. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-9x^2+a^2}=x^2+3x-a$ имеет три различных решения.

Ответ: $(-\infty;-9),(-9;0)$

34. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}\cdot\cos x$ имеет единственный корень на отрезке $[0;\pi]$.

Ответ: $(-\infty;0),\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$.

35. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $\sqrt{4x-1}\cdot\ln\left(x^2-2x+2-a^2\right)=0$ имеет единственный корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right];\left[\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

36. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение $x\sqrt{x-a}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}$ имеет единственный корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ: $(-\infty;0),\left[2-\sqrt{2};1\right]$.

37. При каких значениях параметра «а» уравнение $\left(x^2-3+\sqrt{2x+a}\right)^2=\left(x^2-3\right)^2+2x+a$ имеет единственный корень на отрезке $[0;2]$.

Ответ: $\left[-4;-2\sqrt{3}\right],(0;+\infty)$

38. При каких значениях параметра «а», неравенство $ax^2-\left(1-a^2\right)x-a>0$ имеет решения, и любое его решение принадлежит множеству $[-2;2]$

Ответ: $a\in[-2;-0.5]$

39. При каких значениях параметра «а», неравенство $\left(a^2-1\right)x^2-2(a-1)x+1>0$ имеет место для любого значения ***x***.

Ответ: $a\in[1;+\infty]$

40. Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня $\left|x^2-a^2\right|=|x+a|\sqrt{x^2-4ax+5a}$

Ответ: $(-\infty;-5),(-5;-1],(0;+\infty)$

41. Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых уравнение имеет хотя-бы два различных корня $|a-2|x^4-2ax^2+|a-12|=0$

Ответ: $\left[\frac{12}{7};3\right],[4;+\infty)$

42. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\{-13\};[-9;3)$.

43. Найти количество корней уравнения $(a-2x+x^2)(a+1-|x-1|)=0$ в зависимости от параметра a.

Ответ: