Параметры

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3-5x}\cdot\ln\left(4x^2-a^2\right)=\sqrt{3-5x}\cdot\ln\left(2x+a\right)$ имеет ровно один корень.

Ответ: $\left(-\frac{6}{5};-\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{5};\frac{6}{5}\right)$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(x^2-7x-y+4\right)\sqrt{x-y+4}=0,\\ y=-x+a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\{-5\},[4;20)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(|x+2|+|x-1|-y\right)\sqrt{10-x-y}=0,\\ y=x+a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\{2\},[4;32)$.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(2x-x^2\right)^2-4\sqrt{2x-x^2}=a^2-4a$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $[0;1],[3;4]$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2-4x^2+8|x|-4=0$ имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\infty;-2),\{0\},(2;+\infty)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+a^2+2x-6a=|6x+2a|$ имеет более двух различных корней.

Ответ: $\left[4-2\sqrt{5};0\right],\left[6;2+2\sqrt{5}\right]$.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-9x^2+a^2}=x^2+3x-a$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $(-\infty;-9),(-9;0)$.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}$ имеет на отрезке $[0;1]$ ровно один корень.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};0\right),\{1\}$.

9. Укажите все значения параметра a, система $\begin{cases} ax^2+ay^2-(2a-5)x+2ay+1=0, \\ x^2+y=xy+x, \end{cases}$ имеет четыре различных решения.

Ответ: $(-\infty;-3),(-3;0),\left(3;\frac{25}{8}\right)$.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=|x-a|-4, \\ 4|y|+x^2+8x=0 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a\in(-5;-4),(-4;-3)$.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|x+\frac{a^2}{x}+1\right|+\left|x+\frac{a^2}{x}-1\right|=2$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(1-(x+2a+1)^2\right)^3-\left(1-(x+2a+1)^2\right)^2=3^{3|x-2a|}-3^{2|x-2a|}$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};0\right\}$.

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x-4|+|y-4|=a, \\ yx=4 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\{3\}, (4;12)$.

Теория чисел

1. Дано натуральное число. За один ход можно прибавить к этому числу утроенную сумму его цифр или вычесть из этого числа утроенную сумму его цифр так. чтобы в результате получилось натуральное число.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 29?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 31?

в) Какое наименьшее число можно получить из числа 128 за несколько таких ходов?

Ответ: а) да; б) нет; в) 2.

2. В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 46 %.

а) Может ли в этом классе быть 9 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 55 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 50.

3. На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных на карточках цифр трёхзначное число A. Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трёх карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно, то же самое, что и Петя).

а) Может ли быть верным равенство $A=B+C$. если $A>150$?

б) Может ли быть верным равенство $A=B+C$, если числа B и C делятся на 9?

в) Найдите наименьшее число A, для которого может быть верным равенство $A=B+C$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 109.

4. Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъёмностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 24 контейнера массой 2 тонны на 15 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 18 контейнеров массой 2 тонны на 13 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 45 контейнеров массой 2 тонны?

Ответ: а) да; б) нет; в) 19.

5. Каждое из четырех последовательных натуральных чисел поделили на его первую цифру. Сумма получившихся чисел ровна S.

а) Может ли S быть равной $41\frac{11}{24}$?

б) Может ли S быть равной $569\frac{29}{72}$?

в) Найдите наибольшее целое S, если каждое из исходных чисел было от 400 до 999 включительно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 478.

6. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a<b$. ни одно из написанных чисел не делится на b-a и ни одно из написанных чисел не является делителем числа b-a.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18.19 и 20?

б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равным 25?

в) Найдите наибольшее значение N.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 33.

7. Есть четыре коробки: в первой коробке 81 камень, во второй — 82. в третьей — 83. а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Мог ли в первой коробке оказаться 81 камень, во второй — 78. в третьей — 83. а в четвёртой — 4?

б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 246 камней?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

Ответ: а) да; б) нет; в) 343.

8. У ювелира есть 38 полудрагоценных камней, масса каждого из которых— целое число граммов, не меньшее 100 (некоторые камни могут иметь равную массу). Эти камни распределили по трём кучам: в первой куче n_1 камней, во второй—n_2 камней, а в третьей—n_3 камней, причём $n_1<n_2<n_3$. Суммарная масса (в граммах) камней в первой куче равна S_1 во второй—S_2, а в третьей—S_3.

а) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$?

б) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$. если масса любого камня не превосходит 108 граммов?

в) Известно, что масса любого камня не превосходит k граммов. Найдите наименьшее целое значение k. для которого может выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 128.

9. Из набора цифр 0. 1. 5. 6. 7. 8 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое — трёхзначное и оба кратны 45.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 6975?

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 8025?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

Ответ: а) да; б) нет; в) 10575.

10. В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ: а) да; б) нет; в) 90.

11. В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно целое и одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29. 32. 40, 91 литров воды соответственно. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

12. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2376. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 6 раз меньше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Ответ: а) да; б) нет; в) 594.

13. Над парами целых чисел проводится операция: из пары $(a;b)$ получается пара $(3a+b;3b+a)$.

а) Можно ли из какой-то пары получить пару (5;-1)?

б) Верно ли, что если пара $(c;d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(c-d;d-c)$ так же может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?

в) Зададим расстояние между парами чисел $(a;b)$ и $(c;d)$ выражением $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

Найдите наименьшее расстояние от пары (9;1) до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции

Ответ: а) да; б) да; в) $\sqrt{2}$.