

ВЫПОЛНЕНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ “ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА”

1. СОДЕРЖАНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Типовой расчет состоит из теоретических вопросов и задач по теме “Линейная и векторная алгебра”. Ответы на теоретические вопросы должны быть даны в письменной форме.

Теоретические вопросы.

1. Дать определение минора и алгебраического дополнения элемента a_{ij} определителя.
2. Записать разложение определителя III порядка по 2 строке, по 3 столбцу.
3. В каких случаях можно утверждать, что определитель равен нулю, не вычисляя его ?
4. Когда можно найти решение системы линейных уравнений по формулам Крамера? Записать эти формулы.
5. Какие линейные операции над векторами проводятся и как? Как проводятся линейные операции над векторами, заданными в координатах?
6. Как определяется проекция вектора на ось, каковы свойства проекций?
7. Каковы определения и свойства скалярного, векторного, смешанного произведения, запись через координаты перемножаемых векторов?
8. Дать определение матрицы и действий над матрицами.
9. Дать определение обратной матрицы и правило нахождения обратной матрицы.
10. Что называется линейным пространством и его базисом. Определение собственного вектора и собственного значения.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

В задачах используются следующие обозначения: n - номер студента по списку, $\alpha\beta\gamma\delta$ - номер группы, $m = \left[\frac{n + \delta}{2} \right] + 1, \ell = \left[\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{5} \right]$.

1. Вычислить определитель 3-го порядка двумя способами

$$\begin{vmatrix} (-1)^n \cdot m & m - 4 \cdot \ell & 2 \\ m - 2 \cdot \ell & m - 3 \cdot \ell & 5 \\ (-1)^n \cdot 2 & -3 & m - 10 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & m-5 & 0 & (-1)^n \\ (-1)^n \cdot 3 & m-7 & (-1)^n & 2 \\ 2 & 3 & -\ell & 4 \\ m-2 \cdot \ell & -2 & \ell-1 & (-1)^n \cdot 3 \end{vmatrix}$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} (-1)^n(m+1)x - (m+3)y = (-1)^n \cdot 2 \\ (-1)^{n+1}(\ell+3)x + (\ell+1)y = (-1)^{n+1} \cdot 2(\ell+m+3) \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (m - (-1)^n \cdot 5)x_1 + 5x_2 + x_3 = 2m \\ (-1)^n \cdot mx_1 + 4x_2 - (-1)^n x_3 = (-1)^n \cdot 4 \\ (m - 3\ell)x_1 + (-1)^n \cdot 3\ell x_2 - 2x_3 = -m \end{cases}$$

а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса;

в) представив систему в виде матричного уравнения.

5. Дано $|\vec{a}|=m+1$, $|\vec{b}|=l+1$.

Найти: а) скалярное произведение векторов

$$\vec{c}=(m-5)\vec{a}+(-1)^n\vec{b}; \vec{d}=(l+(-1)^n+2)\vec{a}+\vec{b}, \text{ если } (\vec{a}, \vec{b})=\pi/3.$$

$$\text{б) модуль векторного произведения } |\vec{c} \times \vec{d}|, \text{ если } (\vec{a}, \vec{b})=\pi/2.$$

6. Дано: $\vec{a}=(m-4)\vec{i}+((-1)^n-l)\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=(-1)^nl\vec{i}+(-1)^n\vec{j}+(m-3)\vec{k}$

Найти: а) скалярное и векторное произведение векторов

$$\vec{c}=(-1)^n(l+1)\vec{a}+(m-l)\vec{b} \text{ и } \vec{d}=\vec{b}+(-1)^n(m+1)\vec{a};$$

$$\text{б) длину и направляющие косинусы вектора } \vec{c};$$

$$\text{в) смешанное произведение } \vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \vec{e}, \text{ где } \vec{e}=3\vec{j}+2\vec{k}.$$

7. Дано: $A((-1)^nm, -l, 0)$; $B((-1)^n2, 3, m-4)$, $C(m-2l, 1, 3)$.

Найти: а) $\cos \angle ABC$, б) $\text{Pr}_{\vec{AC}} \vec{AB}$, в) $S_{\triangle ABC}$,

$$\text{г) объем пирамиды с основанием } \triangle ABC \text{ и вершиной } D(0, (-1)^n, 2).$$

8. Сила $\vec{F}=(-1)^nm\vec{i}-l\vec{j}+3\vec{k}$ приложена в точке $A(m-l, 0, (-1)^n)$.

Найти: а) работу E силы $\vec{F}$ на пути $\vec{AB}$, если $B(-3, (-1)^n, m-5)$;

$$\text{б) величину момента } |\vec{M}| \text{ силы } \vec{F} \text{ относительно точки } O(0,0,0).$$

9. Выполнить проверку решенных задач: № 5, 8 по формуле:

$$(\vec{c} \cdot \vec{d})^2 + (\vec{c} \times \vec{d})^2 - \vec{c}^2 \vec{d}^2 = 0, \text{ положив в № 8 } \vec{c}=\vec{F}, \vec{d}=\vec{AB},$$

$$\text{в № 6, 7 - по формуле: } (\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \vec{e})^2 + (\vec{d}(\vec{c} \cdot \vec{e}) - \vec{c}(\vec{d} \cdot \vec{e}))^2 - (\vec{c} \times \vec{d})^2 \vec{e}^2 = 0, \text{ положив в}$$

$$\text{№ 7 } \vec{c}=\vec{AB}, \vec{d}=\vec{AC}, \vec{e}=\vec{AD}.$$

10. Показать, что векторы $\vec{a}\{2; (-1)^nm; -l; 1\}$, $\vec{b}\{(-1)^n; 3; -2; 1\}$,

$$\vec{c}\{(-1)^{n-1}m-2l; m((-1)^{n-1}l-3); l^2+2m; -(m+l)\}$$

линейно зависимы и найти эту зависимость.