

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ

Задание 1. Исходя из определения производной вычислить значение $y'(x)$,

если
$$y(x) = \frac{\varphi(x)(x + x_0 + 1)^k (x - k)^m}{(x - x_0 + 1)^{m+1}}, \quad \text{где}$$

$k = \left\lfloor \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} \right\rfloor + 1, m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ - номер группы, n - номер студента по списку, $\varphi(x)$, x_0 находятся в зависимости от номера n по таблице:

n	$\varphi(x)$	x_0	n	$\varphi(x)$	x_0	n	$\varphi(x)$	x_0
1	$\text{tg}(x+2)$	-2	11	$\sin(x+2)$	-2	21	$e^{x+2}-1$	-2
2	$\ln(x-1)$	2	12	$\text{tg}(3x-6)$	2	22	$\sqrt[3]{x-1}-1$	2
3	$e^{x-1}-1$	1	13	$\sqrt{x}-1$	1	23	$\sin(3-3x)$	1
4	$\sqrt[3]{1+x}-1$	0	14	$\ln(1+4x)$	0	24	$\text{tg}7x$	0
5	$\sin(x+1)$	-1	15	$e^{x+1}-1$	-1	25	$\sqrt{2+x}-1$	-1
6	$\text{tg}(2x+4)$	-2	16	$\sqrt{x+3}-1$	-2	26	$\ln(3+x)$	-2
7	$\sqrt{x-1}-1$	2	17	$\sin(2x-4)$	2	27	$e^{x-2}-1$	2
8	$\text{Ln}x$	1	18	$\text{tg}(4x-4)$	1	28	$\text{tg}(3-3x)$	1
9	$e^{3x}-1$	0	19	$\sqrt{1+5x}-1$	0	29	$\sqrt{1+3x}-1$	0
10	$\sqrt{x+2}-1$	-1	20	$\ln(2+x)$	-1	30	$\ln(3+2x)$	-1

Задание 2. Вычислить производную функции $y = \frac{\varphi[\psi(x)]}{\left(\sqrt[m]{x^k} + 1\right)^{(-1)^n}} + \varphi(x)^{\psi(x)}$, где m, k

из задания 1, а функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из таблицы.

n	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	n	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
1	$\ln(x^2-1)$	$\arccos x$	16	e^{x^3}	$\sqrt[3]{\sin x}$
2	$\text{ctg}3x$	$e^{\text{tg}x}$	17	$1+x^2+x^4$	$\sqrt{e^x}$
3	$\text{arctg}(x+1)$	$\sin \sqrt{x}$	18	$\arcsin \sqrt{x}$	$\ln^2 x$
4	$\cos \sqrt{x}$	$\frac{x-1}{x+1}$	19	$\ln \sqrt{x}$	$\arcsin^2 x$
5	$\arcsin x$	$\ln \sqrt{x^2+1}$	20	$3x+\cos x$	$\sqrt{x^2-3}$
6	$\sqrt{x^2+2}$	$\sin x$	21	$\text{arctg} \sqrt{x}$	$\sin \sqrt{x}$
7	$\sin x^2$	$\sqrt{1-x^2}$	22	$1+x^2$	$\sqrt{\ln x}$

8	$\operatorname{tg} x$	$\cos^2 x$	23	$\ln x$	$x + \sqrt{1+x^2}$
9	$\operatorname{arctg}(1-x)$	$\sqrt{x+x^2}$	24	$\sin x + \cos x$	e^{x^2}
10	x^3+3x	e^x	25	x^2	$\ln x+1$
11	$\sin 2x$	$\sqrt{x(2-x)}$	26	$\sqrt{\operatorname{tg} x}$	$\sqrt{x}$
12	$\sqrt[3]{8-x^2}$	$2\sqrt{2} \sin x$	27	$\operatorname{ctg} 2x$	e^x
13	$\arcsin x$	$\ln \sqrt{x}$	28	$\operatorname{arctg} x$	$\sin x^2$
14	a^{4x^2}	$\sqrt{x^2-1}$	29	$e^{\arccos x}$	$\sqrt{x^2-1}$
15	$\lg \sqrt[3]{x}$	$\cos 2x$	30	$\cos \sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{tg} x$

Задание 3. Написать уравнение нормали к $y(x)=f(x)$ в точке x_0 , если:

n	$f(x)$	x_0	n	$f(x)$	x_0	n	$f(x)$	x_0
1	$\frac{4x-x^2}{4}$	2	11	$\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$	64	21	$\frac{x}{x^2+1}$	-2
2	$2x^2+3x-1$	-2	12	$\frac{x^3-2}{x^3+2}$	2	22	$\frac{1}{1+x^2}$	1
3	$x-x^3$	-1	13	$2x^2+3$	-1	23	$\frac{x^2-3x+3}{3}$	3
4	$x^2-8\sqrt{x}-32$	4	14	$\frac{x^{29}+6}{x^4+1}$	1	24	$-2(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x})$	1
5	$x+x\sqrt{x}$	1	15	$\frac{2x+1}{x}$	1	25	$\frac{1+3x^2}{3+x^2}$	1
6	$\sqrt[3]{x^2}-20$	-8	16	$\frac{2(x^8+2)}{3(x^4+1)}$	1	26	$14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+1$	1
7	$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	4	17	$\frac{x^5+1}{x^4+1}$	1	27	$3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$	1
8	$8\sqrt[4]{x}-70$	16	18	$\frac{x^{16}+9}{1-5x^2}$	1	28	$\frac{3x-2x^2}{3}$	1
9	$2x^2-3x+1$	1	19	$3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})$	1	29	$x^2/10+3$	2
10	$\frac{x^2-3x+6}{x^2}$	3	20	$1/(3x+2)$	2	30	$\frac{x^2-2x-3}{4}$	4

Задание 4. Приблизительно с помощью дифференциала вычислить значение $y(x)$ в точке x_0 , если:

n	y(x)	x ₀	n	y(x)	x ₀	n	y(x)	x ₀
1	$\sqrt[3]{x}$	0,98	11	x^{23}	0,998	21	x^7	2,003
2	$\sqrt[3]{x^3 + 7x}$	1,012	12	$\sqrt[4]{x^3}$	15,95	22	$\sqrt{4x-3}$	2,98
3	$\frac{x + \sqrt{5-x^2}}{2}$	0,98	13	x^6	2,007	23	$\sqrt[3]{5x+7}$	4,003
4	$\sqrt[3]{x^2}$	27,17	14	$\sqrt[3]{5x+2}$	4,93	24	$5\sqrt{x^3}$	31,94
5	arcsinx	0,007	15	x^7	1,996	25	Ln(1+4x)	0,007
6	$\sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$	0,97	16	$\sqrt[4]{5x+1}$	2,993	26	x^4	3,998
7	$\sqrt[5]{x}$	31,87	17	$\sqrt{4x+5}$	4,97	27	$\sqrt{1+x+\sin x}$	0,007
8	$\sqrt{x^2 + x + 3}$	1,97	18	$\frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$	1,006	28	$\sqrt[3]{3x+\cos x}$	0,005
9	x^{11}	1,008	19	$\sqrt[3]{13x-1}$	4,97	29	$\sqrt[4]{2x-\sin \frac{\pi x}{2}}$	1,003
10	$\sqrt[3]{3x+8}$	2,97	20	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	8,97	30	$\sqrt{x^2+5}$	1,995

Задание 5. $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ Найти уравнение касательной в точке со значением

$t=t_0$, если $x(t)$, $y(t)$, t_0 , определяются по таблице:

n	x(t)	y(t)	t ₀	n	x(t)	y(t)	t ₀	n	x(t)	y(t)	t ₀
1	$a\sin^3 t$	$a\cos^3 t$	$\pi/3$	11	$a\cos t$	$a\sin t$	$\pi/2$	21	$t-t\sin t$	$t\cos t$	0
2	$\sqrt{3}\cdot\cos t$	$\sin t$	$\pi/3$	12	$\sin^2 t$	$\cos^2 t$	$\pi/6$	22	$1/t^2$	$1/(t^2+1)$	1
3	$a(t-\sin t)$	$a(1-\cos t)$	$\pi/3$	13	$\arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$	$\arccos \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$	1	23	$3\cos t$	$4\sin t$	$\pi/4$
4	$2t-t^2$	$3t-t^3$	1	14	$\frac{t+\ln t}{t^2}$	$\frac{3+2\ln t}{t}$	1	24	$t-t^4$	t^2-t^3	1
5	$\cos t + \sin t$	$\sin 2t$	$\pi/4$	15	$\frac{1+t}{t^2}$	$\frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}$	2	25	t^3+1	t^2+t+1	1
6	$\arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$	$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	-1	16	$a\sin^4 t$	$a\cos^4 t$	$\pi/6$	26	$2\cos t$	$\sin t$	$\pi/3$

7	$t(\text{tcost} - 2\text{sint})$	$t(\text{tsint} + 2\text{cost})$	$\pi/4$	17	$a(\text{tsint} + \text{cost})$	$a(\text{sint} - \text{tcost})$	$\pi/4$	27	2tgt	$2\sin^2 t + \sin 2t$	$\pi/4$
8	$\frac{3at}{1+t^2}$	$\frac{3at^2}{1+t^2}$	2	18	$\frac{t+1}{t}$	$\frac{t-1}{t}$	-1	28	t^3+1	t^2	-2
9	$1+2\ln \text{tgt}$	$\text{tgt} + \text{ctgt}$	$\pi/4$	19	$1-t^2$	$t-t^3$	2	29	sint	e^t	0
10	$\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}$	$\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}$	0	20	$\ln(1+t^2)$	$t-\arctgt$	1	30	sint	$\cos 2t$	$\pi/6$

Задание 6. Найти производную n-го порядка от функции $y=f(x)$, если:

n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)
1	$x e^{ax}$	11	2^{3x+5}	21	a^{2x+3}
2	$\sin 2x + \cos(x+1)$	12	$\sin(x+1) + \cos 2x$	22	$\sin(3x+1) + \cos 5x$
3	$\sqrt[5]{e^{7x-1}}$	13	$\sqrt[3]{e^{2x-1}}$	23	$\sqrt{e^{3x+1}}$
4	$\frac{4x+7}{2x+3}$	14	$\frac{4+15x}{5x+1}$	24	$\frac{11+12x}{6x+5}$
5	$\log_3(5x+2)$	15	$\lg(3x+1)$	25	$\lg(2x+7)$
6	a^{3x}	16	7^{5x}	26	e^{px}
7	$\frac{x}{2(3x+2)}$	17	$\frac{x}{9(4x+9)}$	27	$\frac{3x}{3x+2}$
8	$\lg(x+4)$	18	$\lg(x+1)$	25	$\log_3(x+5)$
9	$\sqrt{x}$	19	$4/x$	29	$\frac{1+x}{1-x}$
10	$\frac{2x+5}{13(3x+1)}$	20	$\frac{5x+1}{13(2x+1)}$	30	$\frac{7x+1}{17(4x+3)}$

Задание 7. Применяя правило Лопиталю, найти $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, если:

n	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	a
1	$x - \arctg x$	x^3	0
2	$\pi - 2\arctg x$	$\ln(1+1/x)$	∞
3	$x - \sin x$	$x - \text{tg} x$	0
4	$\pi - 2\arctg x$	$\ln(x/(x+1))$	∞
5	$\pi - 2\arcsin x$	$\sin 3(x-1)$	1
6	$e^x - e^{-x}$	$\sin x \cos x$	0
7	$1 - \sin(\pi x/2)$	$\ln x$	1
8	$\sin(\pi x/2)$	$\ln(1-x)$	0
9	$x \ln x - x + 1$	$(x-1) \ln x$	1

10	a^2-x^2	$\operatorname{ctg}(\pi x/(2a))$	a
11	$e^{x^2}-1$	$\cos x-1$	0
12	$\ln(\sin 2x)$	$\ln(\sin x)$	0
13	$x \cos x - x \sin x$	$x \sin x$	0
14	$e^{\alpha \sqrt{x}}-1$	$\sqrt{\sin \beta x}$	0
15	a^x-b^x	$x \sqrt{1-x^2}$	0
16	$1-\cos 2x$	$\cos 7x-\cos 3x$	0
17	$\ln x$	$1+2 \ln (\sin x)$	+0
18	$e^{3x}-3x-1$	$\sin ^2 5x$	0
19	$\cos x \ln (x-3)$	$\ln \left(e^x-e^3\right)$	3+0
20	$\operatorname{tg}(\pi x / 2)$	$\ln (1-x)$	1-0
21	$e^x-e^{-x}-2x$	$x-\sin x$	0
22	$e^{2x}-1$	$\arcsin x$	0
23	e^x-1-x	$x\left(e^x-1\right)$	0
24	$(x-2 \pi)^2$	$\operatorname{tg}(\cos x-1)$	2π
25	$\cos x$	$\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}$	$\pi / 2$
26	$1-\sin x$	$(\pi / 2-x)^2$	$\pi / 2$
27	$\operatorname{tg} x-x$	$\sin x-x$	0
28	$1-\sqrt{\cos x}$	$\sin x$	0
29	$\ln x$	x^a	∞
30	$\ln (1+x^2)$	$\ln (\pi / 2-\operatorname{arctg} x)$	∞

Задание 8. Исследовать функцию $y=f(x)$, построить график, если:

n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)
1	$\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	11	$\frac{1}{x}+4x^2$	21	$\sqrt[3]{x^2-2x}$
2	$\frac{x-1}{x+1}$	12	$x^2 e^{-x}$	22	$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x-1}$
3	$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$	13	$x+\frac{\ln x}{x}$	23	$\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$
4	$\frac{1}{1-x^2}$	14	$\frac{x^3}{2(x+1)^2}$	24	$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$
5	$\frac{2x}{1-x^2}$	15	$\frac{1}{e^x-1}$	25	e^{2x-x^2}
6	$-\frac{2(x+1)}{x^2+2x}$	16	$x-2 \operatorname{arctg} x$	26	$(2x-1) e^{\frac{1}{x}}$
7	$\frac{x}{e^x}$	17	$\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$	27	$x^2 e^{\frac{2}{x}}$

8	$\frac{x^2}{(x-1)^2}$	18	$\frac{x^2}{(x+2)^3}$	28	$\frac{2x-3}{(x-2)^2}$
9	$\frac{2x+3}{(x+1)^2}$	19	$x^2 + \frac{1}{x^2}$	29	$\frac{(x+1)^2}{(x+3)^2}$
10	$\frac{x^3}{3-x^2}$	20	$\frac{x^2-1}{x^2+1}$	30	$\frac{1}{xe^x}$

Задание 9. Решить задачу на экстремум.

1. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $t/(t+2)$ –ю часть курса, а забывает $t/18$ –ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса ?
2. Тело массой $m_0=3000$ кг падает с высоты 500 м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k=100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $v_0=0$, ускорение $g=10$ м/с², и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.
3. Из деревянного шара требуется вырезать цилиндр наибольшего объема.
4. Требуется огородить забором прямоугольную площадку площадью 36 м². Какую форму должна иметь площадка, чтобы расход материала был наименьшим ?
5. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R , вырезать такой сектор, чтобы, свернув, получить, воронку наибольшей вместимости.
6. Окно имеет форму прямоугольника с полукругом наверху. Периметр окна равен P . Каково должно быть соотношение между его шириной и высотой, чтобы окно пропускало наибольшее количество света ?
7. Число 12 разделить на две такие части, чтобы сумма удвоенной одной части и квадрата другой была наименьшей.
8. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 м/сек., v_2 м/сек. Движение происходит по двум прямым, образующим угол $\pi/2$, в направлении к вершине этого угла, от которой в начале движения первое тело находилось на рас-

стоянии a м., а второе на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

9. Каким должно быть сопротивление r электронагревательного прибора, включенного в цепь тока сопротивлением R , для того, чтобы в нем выделилось максимальное количество тепла, если $Q=rJ^2$, $J=E/(R+2)$.

10. Из трех тонких одинаковых досок изготовлен желоб с наибольшим поперечным сечением. Определить угол между большим основанием и боковой стороной сечения желоба.

11. В прямоугольном листе картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?

12. Керосиновая цистерна, имеющая форму цилиндра, завершенного конусом, должна быть построена на данном круглом фундаменте и должна иметь заданный объем. При каком угле при вершине осевого сечения конуса для постройки цистерны потребуется наименьшее количество материала?

13. Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобокая трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу, потери на сопротивление трения были наименьшими, т.е. чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшая?

14. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

15. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h . При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность ее пропорциональна bh^2 ?

16. Прямоугольный участок площадью $S=294 \text{ м}^2$ огорожен забором и разделен на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей ?
17. На странице книги печатный текст должен занимать 5 см^2 . Верхнее и нижнее поля должны быть по $a \text{ см}$, правое и левое по $b \text{ см}$. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?
18. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3 , причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон , чтобы полная поверхность была наименьшей?
19. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой $5,6 \text{ м}$. На каком расстоянии должен встать человек ростом (до уровня глаз) $1,6 \text{ м}$, чтобы видеть статую под наибольшим углом?
20. Картина высотой $1,4 \text{ м}$ повешена на стену так, что ее нижний край на $1,8 \text{ м}$ выше глаз человека. На каком расстоянии от стены должен встать человек, чтобы его положение было наиболее благоприятно для осмотра картины (т.е. чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим)?
21. Три пункта А, В и С расположены так, что угол АВС равен 60° . Из пункта А выходит автомобиль, одновременно из В – поезд. Автомобиль движется к В со скоростью 80 км/ч. , поезд – к С со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB=200 \text{ км}$?
22. Сумма высоты h и длины l окружности сечения цилиндрической почтовой посылки не должна превышать 150 см . Вычислить размеры наибольшей по объему цилиндрической посылки, которую можно послать почтой.
23. Цена алмаза, при прочих равных условиях, пропорциональна квадрату его веса. Цена алмаза в 1 карат составляет $a \text{ руб.}$ Какова будет наименьшая стоимость двух алмазов, общим весом 4 карата при тех же условиях?
24. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см . Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
25. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

26. В полукруг радиусом R вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Определить его основание x и высоту y .
27. В результате измерений некоторой величины x получено n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Найти такое число x , чтобы сумма квадратов отклонений данных чисел от x была минимальной.
28. Из зенитного орудия вертикально вверх вылетел снаряд со скоростью $v_0 = 200 \text{ м/с}$. Через сколько времени он достигнет наивысшего положения?
29. Резервуар, который должен иметь квадратное дно и быть открытым сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каково должно быть соотношение между стороной основания и высотой, чтобы было израсходовано наименьшее количество свинца ?
30. Сахарный завод производит x ед. продукции в месяц, суммарные издержки производства $k = x/50 + 15x + 800$. Зависимость между удельной ценой p и количеством x ед. продукции, которое можно продать по этой цене: $p = 50 - x/10$. При каких условиях прибыль будет наибольшей (выручка $a = xp$).