

Теория чисел

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ – множество иррациональных чисел;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел;

Последовательности.

Арифметическая прогрессия.

a_1 – первый член прогрессии, d – разность прогрессии, S_n – сумма первых n членов прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1), S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия. Бесконечные последовательности.

b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии, S_n – сумма первых n членов прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$$0 < q < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1 - q}, (*) \quad |q| < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Разложение на простые множители.

Разложение натурального числа на простые множители:

$$x = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}.$$

Количество натуральных делителей натурального числа:

$$Q = (1 + n_1)(1 + n_2) \dots (1 + n_k).$$

Сумма всех натуральных делителей натурального числа:

$$S = (1 + p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^{n_1}) \cdot (1 + p_2^1 + p_2^2 + \dots + p_2^{n_2}) \cdot \dots \cdot (1 + p_k^1 + p_k^2 + \dots + p_k^{n_k}).$$

Критерии проверки задачи 19

Содержание критерия	Баллы
Верно, получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно, получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно, получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно, получен один из следующих результатов: - обоснованное решение пункта a ; - обоснованное решение пункта b ; - искомая оценка в пункте b ; - пример в пункте b , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	
<i>Максимальный балл</i>	

Новый критерий с 2021

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены ответы в пунктах a , b и c	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте c и обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a и b или обоснованно получен верный ответ в пункте c	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	
<i>Максимальный балл</i>	

Подготовительные задачи

1. Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Верно ли, что $b_{99} \in \mathbb{N}$? [нет]
2. Решите уравнение $3^x + 4^y = 5^z$, $x, y, z \in \mathbb{N}$. [$x=y=z=2$]
3. Числа от 1 до 37 записаны в строку, так, что сумма всех предшествующих чисел делится на следующее за ними число. Какое число может стоять на третьем месте, если на первом месте 37, а на втором -1? [2]
4. Корни x_1, x_2 многочлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x=1$ являются простыми числами. Чему равны a и b ?
5. Корень x_1 многочлена $f(x) = x^2 + px + q$ и его значение при $x=11$ являются простыми числами. Чему равны x_1, x_2, p, q ?
6. Найдите все такие натуральные n , что при вычепкивании первой цифры числа 4^n снова получается число, являющееся натуральной степенью числа 4. [3]
7. Из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 составлены 9 (необязательно различных) девятизначных натуральных чисел (каждая цифра использована ровно по 1 разу в каждом числе). На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться их сумма? [8]
8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из отрезка натурального ряда от 1 до 2024, так чтобы разность любых двух из них не была простым числом? [405]
9. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.
 - а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18, 19 и 20?
 - б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равным 25?
 - в) Найдите наибольшее значение N .
10. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 159. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на

$(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 28, 29 и 30?

б) Среди написанных на доске чисел есть 13. Может ли N быть равным 20?

в) Найдите наибольшее значение N .

11. Есть четыре коробки: в первой коробке 81 камень, во второй — 82, в третьей — 83, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Мог ли в первой коробке оказаться 81 камень, во второй — 78, в третьей — 83, а в четвёртой — 4?

б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 246 камней?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

12. Дано натуральное число. За один ход можно прибавить к этому числу утроенную сумму его цифр или вычесть из этого числа утроенную сумму его цифр так, чтобы в результате получилось натуральное число.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 29?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 31?

в) Какое наименьшее число можно получить из числа 128 за несколько таких ходов?

Основные задачи

1. Решите уравнение в натуральных числах $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$.

2. Ваня задумал простое трехзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может заканчиваться, если последняя цифра (разряд единиц) равна сумме первых двух?

3. Укажите все натуральные числа, у которых 6 натуральных делителей, сумма которых 504.

4. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке не убывания. Если какое-то число, выписанное на

доску, повторяется несколько раз, то на доске остается одно такое число, а остальные, равные ему стираются. Например, если задуманы «1,3,3,4», то на доске будет набор «1,3,4,5,6,7,8,10,11»

а) Приведите пример, задуманных чисел, для которых будет записан набор «1,2,3,4,5,6,7,8»

б) Существует ли пример задуманных чисел, для которых на доске будет набор «1,3,4,5,7,9,10,11,12,13,14,16,18,19,20,22»?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых выписан набор «5,6,8,10,11,13,14,15,16,18,19,21,23,24,29»

5. В живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного) кроликов, но не всех. Первый ученик дает порцию по 100 гр, второй – по 200 гр, третий – по 300 гр., а четвертый – по 400 гр.

а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?

б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили различное количество корма?

в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик насыпал корм ровно четырем кроликам и все кролики получили разное количество корма?

6. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел «-3», среднее арифметическое положительных «4», а отрицательных «-8».

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

7. В течении четверти учитель ставил детям оценки «1,2,3,4,5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять 4-ки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

8. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40, но меньше 100.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
- б) Может ли на доске быть 6 чисел?
- в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

9. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots$ состоит из натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; ... $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; натуральное $n, n > 1$;

- а) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$;
- б) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$;

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 \cdot S_{10}}$?

10. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел «-11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19». Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному из чисел «-11, 12, 13, -14, -15, 17, -18, 19». После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 117?
- в) Какое наименьшее целое не отрицательное число может в результате получиться?

12. У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых возможно и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа детей, имеющих собак,

а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

- а) Может ли в классе быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?
- б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?
- в) какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительных условий пунктов а) и б)?

13. В некотором царстве было несколько (более 2) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было изначально. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь

образованных объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после какого-то деления общее число княжеств было 162?

в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

14. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3. а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни. быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

15. В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.

а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?

б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?

в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

16. На доске написаны числа, каждое из которых не меньше 50, но не более 150. Каждое из чисел a_i уменьшили на $r_i\%$. При этом для каждого i ($1 \leq i \leq n$), либо $r_i=2$, либо a_i уменьшилось на 2.

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$ быть равным 5?

б) Может ли оказаться среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$ больше 2?

в) Пусть на доске написано 30 чисел, сумма которых уменьшилась на 40. Найдите наибольшее значение среднего арифметического $r_1, r_2, \dots, r_n$.

17. Каждое из четырех последовательных натуральных чисел поделили на его первую цифру. Сумма получившихся чисел равна S .
- а) Может ли S быть равной $41\frac{11}{24}$? б) Может ли S быть равной $569\frac{29}{72}$?
- в) Найдите наибольшее целое S , если каждое из исходных чисел было от 400 до 999 включительно.

Тематические подборки

1.1. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше, чем на пять.

- а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?
- б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?
- в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

1.2. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше, чем на пять.

- а) Можно ли купить 30 карандашей?
- б) Можно ли купить 33 карандаша?
- в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

2.1. Учитель пишет примеры на сложение трёх натуральных чисел так, чтобы во всех примерах ответ был один и тот же N , при этом он хочет, чтобы все слагаемые во всех примерах (даже в различных примерах) были различны.

- а) Можно ли написать два таких примера, если $N = 12$?
- б) Можно ли написать 5 таких примеров, если $N = 40$?
- в) Можно ли написать 10 таких примеров, если $N = 40$?

2.2. Учитель пишет примеры на сложение трёх натуральных чисел так, чтобы во всех примерах ответ был один и тот же N , при этом он хочет, чтобы все слагаемые во всех примерах (даже в различных примерах) были различны.

- а) Можно ли написать два таких примера, если $N = 13$?

- б) Можно ли написать 6 таких примеров, если $N = 44$?
- в) Можно ли написать 11 таких примеров, если $N = 44$?

2.3. Учитель пишет примеры на сложение трёх натуральных чисел так, чтобы во всех примерах ответ был один и тот же N , при этом он хочет, чтобы все слагаемые во всех примерах (даже в различных примерах) были различны.

- а) Можно ли написать 10 таких примеров, если $N = 100$?
- б) Можно ли написать 12 таких примеров, если $N = 111$?
- в) Найдите наибольшее возможное число таких троек натуральных чисел, если $N = 111$?

3.1. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному числа $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться? [2-14]

3.2. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному числа $-191, 192, 193, -194, -195, 197, -198, 199$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-191, 192, 193, -194, -195, 197, -198, 199$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 101?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

4.1. а) Приведите пример натурального числа, которое в 12 раз больше суммы своих цифр.

- б) Существует ли число, которое в 11 раз больше суммы своих цифр?
- в) Найдите все натуральные числа, которые в 1812 раз больше суммы своих цифр.

4.2. а) Приведите пример натурального числа, которое в 19 раз больше суммы своих цифр.

- б) Существует ли число, которое в 17 раз больше суммы своих цифр?

в) Найдите все натуральные числа, которые в 1917 раз больше суммы своих цифр.

5.1. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 46, а вместе солдат меньше, чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат одним рядом?

в) Сколько в роте может быть солдат?

5.2. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат одним рядом?

в) Сколько в роте может быть солдат? [2-30]

5.3. Солдат построили не по росту, но с чётким разделением на ряды и шеренги. В каждом ряду выбрали самого высокого, а из всех высоких — самого низкого. В каждой шеренге выбрали самого низкого, а из всех низких — самого высокого. Кто же выше ростом: самый низкий из высоких или самый высокий из низких?

6.1. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [*]

6.2. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх значений средних арифметических.

6.3. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх значений средних арифметических.

6.4. Числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [*]

7.1. В ряд выписаны числа: $1^2, 2^2, \dots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «-» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если $N = 12$?

- б) 0, если $N = 70$?
- в) 0, если $N = 48$?
- г) -3 , если $N = 90$?

7.2. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение?

7.3. Натуральные числа m и n таковы, что и $m^3 + n$, и $m + m^3$ делятся на $m^2 + n^2$. Найдите m и n .

8.1. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 396. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 25 заменили на число 52).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

8.2. На доске было написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

8.3. На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

8.4. На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньшими 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

8.5. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

8.6. На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске не изменилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 30. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 32?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 30. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске. [*]

8.7. На доске написано более 30, но менее 36 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -1 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -3 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

9.1. В результате опроса среди шестиклассников выяснилось, что примерно 56 % опрошенных любят математику (число 56 получено с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 33 % респондентов любят делать домашнюю работу по математике.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 20 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 36 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

9.2. В результате опроса выяснилось, что примерно 58 % опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной (число 58 получено с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 42 % респондентов никогда не отмечали Новый год не дома.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

10.1. Тренер планирует вести спортивные секции для младших и старших школьников: одни будут заниматься футболом, другие — хоккеем, а некоторые могут заниматься и футболом, и хоккеем. Тренер получил указание, согласно которому доля младших школьников среди занимающихся футболом должна быть не меньше $\frac{1}{2}$, а среди занимающихся хоккеем — не меньше $\frac{2}{3}$.

а) Сможет ли тренер выполнить указание, если он планирует набрать в секции 16 младших и 14 старших школьников?

б) Какое наименьшее количество младших школьников могут заниматься у тренера, чтобы указание было выполнено, если он может набрать во все секции 30 школьников?

в) Какую наибольшую долю могут составлять старшие школьники, чтобы указание было выполнено, а число занимающихся в секциях можно изменить?

10.2. За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причём каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более $\frac{5}{11}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{1}{6}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 22 ребёнка?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 22 ребёнка?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

10.3. У каждого ученика в классе дома живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, — и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а и б? [1-23]

11.1. Найдите все натуральные числа a и b , такие, что:

а) $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; в) $\frac{1}{6} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

11.2. Найдите все возможные наборы чисел a , b и c , среди которых есть равные и верно равенство:

а) $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; б) $\frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

11.3. Четыре натуральных числа a , b , c и d таковы, что

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

а) Могут ли все эти числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 7?

в) Найдите все возможные наборы таких чисел, среди которых есть равные.

12.1. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и так действовали до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи членов получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 членов получившейся последовательности, идущих подряд?

12.2. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой 2011, а разность равна 11. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и так действовали до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи членов получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 членов получившейся последовательности, идущих подряд?

12.3. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой 2017, а разность равна 11. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и так действовали до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи членов получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 членов получившейся последовательности, идущих подряд?

13.1. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

- а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?
- б) Докажите, что число её членов меньше 100.
- в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
- г) Приведите пример такой прогрессии с 72-мя членами.

13.2. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых начинается с цифры 9 и не содержит цифры 0.

- а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?
- б) Докажите, что число её членов меньше 100.
- в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
- г) Приведите пример такой прогрессии с 72-мя членами.

13.3. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифр 8 и 9.

- а) Может ли в такой прогрессии быть 6 членов?
- б) Докажите, что число её членов меньше 70.
- в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 32.
- г) Приведите пример такой прогрессии с 32-мя членами.

14.1. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую прогрессию, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности 1, а последний 2046.

- а) Может ли в последовательности быть три члена?
- б) Может ли в последовательности быть четыре члена?
- в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

14.2. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую прогрессию, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности 1, а последний 2017.

- а) Может ли в последовательности быть три члена?
- б) Может ли в последовательности быть четыре члена?
- в) Может ли в последовательности быть меньше 2017 членов?

14.3. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую прогрессию, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности 1, а последний 2020.

- а) Может ли в последовательности быть три члена?
- б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2020 членов?

15.1. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

15.2. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

16.1. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 210 и 350.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

16.2. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 812 и 945.

а) Может ли такая прогрессия состоять из трёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

17.1. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с остальными по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников вместе взятых. Сколько было участников турнира?

17.2. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков, и на сколько?

17.3. В шахматном турнире участвовали учащиеся 10 класса и два ученика 9 класса. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Два девятиклассника набрали вместе 7 очков, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовало в турнире?

17.4. Несколько учащихся 9 «а» и 9 «б» классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали вместе 26

очков, а учащиеся 9 «б» класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира? [*]

17.5. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?

17.6. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчиков и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки?

18.1. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y , удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$. [2-13]

18.2. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y , удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$. [2-28]

19.1. а) Приведите пример такого натурального числа n , что числа n^2 и $(n + 16)^2$ дают одинаковые остатки при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте а свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m , для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n таких, что n^2 и $(n + m)^2$ дают одинаковые остатки при делении на 200? [2-15]

19.2. а) Приведите пример такого натурального числа n , что числа n^2 и $(n + 12)^2$ дают одинаковые остатки при делении на 100.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте а свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m , для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n таких, что n^2 и $(n + m)^2$ дают одинаковые остатки при делении на 100? [*]

20.1. Известно, что a, b, c и d попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$? [2-2]

20.2. Известно, что a, b, c и d попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: $\frac{3a+2c}{b+d} = \frac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b} + \frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 2d$?

20.3. Известно, что a, b, c и d попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{3}{7}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a < 5b$ и $c < 6d$?

20.4. Известно, что a, b, c и d попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2}{3}$?

- б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 2b$ и $c > 5d$?

20.5. Известно, что a, b, c и d попарно различные двузначные числа.

- а) Может ли выполняться равенство: $\frac{2a+3c}{b+d} = \frac{3}{4}$?
- б) Может ли дробь $\frac{2a+3c}{b+d}$ быть в 13 раз меньше, чем сумма $\frac{2a}{b} + \frac{3c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{2a+3c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 3d$?

20.6. Известно, что a, b, c и d попарно различные двузначные числа.

- а) Может ли выполняться равенство: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{4}{11}$?
- б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 13 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b} + \frac{2c}{d}$?
- в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если $a < 3b$ и $c < 4d$?

21.1. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии её следующий член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй разность оказалась на 72 больше, чем в первый раз.
- б) Во второй раз разность оказалась на 1938 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 17 членов?
- в) Во второй раз разность оказалась на 1938 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

21.2. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии её следующий член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
- б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

22.1. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наименьшее количество членов может быть в последовательности? [2-18]

22.2. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 5 раз больше, либо в 5 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1560.

а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

б) Может ли последовательность состоять из четырёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

22.3. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 9 раз больше, либо в 9 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 830.

а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

б) Может ли последовательность состоять из четырёх членов?

в) Какое наименьшее количество членов может быть в последовательности?

23.1. Решите уравнение $x^2 - y^2 = 1951$ в целых числах.

23.2. Решите уравнение $3^n + 8 = x^2$ в целых числах.

23.3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 1951$ не имеет решений в целых числах.

24.1. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

- а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?
- б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

24.2. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

- а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 2?
- б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{4}{3}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 20?

24.3. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

- а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?
- б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 18?

25.1. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

- а) Приведите пример такой последовательности при $n=4$.
- б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 667$?

25.2. Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5=4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться 3 раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?