

Разные задачи. Задача 18

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.
 - а) Докажите, что $AC \perp CD$.
 - б) Найдите углы трапеции.
2. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD=AM$.
 - а) Докажите, что $CD=AB$.
 - б) Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB=10$, $AC=12$, $AM=5$.
3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P , отличной от O , и не проходят через точку O . Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.
 - а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN .
 - б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC=BD$, а $MN=10$.
4. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB .
 - а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.
 - б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1:4.
5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH .
 - а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH .
 - б) Найдите CL , если известно, что $CM=10$, $CH=6$.
6. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD , P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC .
 - а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB .
 - б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q . Найдите отношение $PM:BQ$, если известно, что $AB:AC=1:3$.
7. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D . При этом $\angle ABC = \angle ACD$.
 - а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.
 - б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC=15$, $BC=20$.

8. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC , если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC .

9. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A . Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M .

а) Докажите, что M — середина AB .

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P . Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды AP , если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

10. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D , отличной от A .

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC .

б) Найдите угол BAC , если известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, а точка D лежит на стороне BC , причём $DB:DC = 1:3$.

11. Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

12. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN . Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.

13. Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.

14. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольнике ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

15. Точки D и E — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN , если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

17. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB .

б) Найдите высоту треугольника ABC , проведённую из вершины A .

18. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM:MB=2:1$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = \sqrt{6}$.

19. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

20. Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC , продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N . Точка M — середина основания BC .

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM , если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Ответы:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
60^0 , 120^0	48	50	20	$3\sqrt{5}$	1:1	9:16	90^0	$3\sqrt{13}$	90^0
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
30	5	216	60^0	3,5	49	2,4	$2\sqrt{5}$	113	$2\sqrt{41}$