

Задача 17 с развернутым решением. Прикладные задачи на наибольшее и наименьшее значение функции (Каждая задача оценивается в 2 балла: обоснованно получен верный ответ — 2 балла; верная последовательность всех шагов решения при неверном ответе из-за вычислительной ошибки — 1 балл; решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев — 0 баллов).

1. На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P , которая может быть выделена нагрузкой?

2. Генератор постоянного тока имеет ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. К генератору подключён реостат, позволяющий изменять сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, а тепловая мощность, выделяемая в нагрузке, — формулой Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова наибольшая тепловая мощность P (в ваттах), которая может быть выделена нагрузкой?

3. Аккумулятор с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом замкнут на нагрузку с сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, а выделяемая в нагрузке мощность равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшее значение мощности P (в ваттах).

4. Батарея с ЭДС $\varepsilon = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 3$ Ом питает нагрузку сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность, выделяемая в нагрузке, равна $P = I^2 R$. Какова наибольшая тепловая мощность P (в ваттах), выделяемая нагрузкой?

5. Аккумулятор с ЭДС $\varepsilon = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом питает нагреватель сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, тепловая мощность на нагревателе равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшую мощность (в ваттах), которую можно получить на нагревателе, подбирая $R > 0$.

6. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 60$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом подключён к нагрузке сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность нагрузки равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшую мощность P (в ваттах), которую можно выделить в нагрузке.

7. Ветрогенератор моделируют источником с ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом. Мощность, отдаваемая в сеть с сопротивлением R (в омах), равна $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. Какова наибольшая мощность (в ваттах), отдаваемая в сеть?

8. Солнечная батарея имеет ЭДС $\varepsilon = 36$ В и внутреннее сопротивление $r = 4$ Ом. К ней подключают потребитель с сопротивлением R (в омах). Мощность на потребителе равна $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. При каком сопротивлении нагрузки мощность будет наибольшей? В ответе укажите это сопротивление (в омах) и самую наибольшую мощность (в ваттах).

9. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 30$ В и внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом замкнут на реостат с сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность, выделяемая на реостате, равна $P = I^2 R$. При каком сопротивлении R (в омах) мощность будет наибольшей?

10. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 40$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом отдаёт во внешнюю цепь мощность $P(I) = \varepsilon I - I^2 r$, где I — сила тока в цепи (в амперах). При каком значении силы тока I (в амперах) отдаваемая во внешнюю цепь мощность будет наибольшей?

11. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,91$ — коэффициент, зависящий от отношения ширины корабля к длине волны, $\theta_0 = 9^\circ$ — угол наибольшего волнового склона, τ — период волны (в секундах), $T = 14,7$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

12. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,91$, $\theta_0 = 9^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 19,6$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

13. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,88$, $\theta_0 = 8^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 24$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,1568$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

14. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,95$, $\theta_0 = 6^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 18$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,38$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

15. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,84$, $\theta_0 = 7^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 12$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,72$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

16. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,90$, $\theta_0 = 5^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 13,5$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,38$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

17. Амплитуда колебаний радиоприёмного контура описывается формулой $A = k \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $T = 9,8$ мкс — период собственных колебаний контура, $n = 0,0792$, $k > 0$ — постоянный коэффициент, τ — период внешней радиоволны. При каком τ амплитуда будет наибольшей? Ответ дайте в микросекундах.

18. Амплитуда раскачивания подвесного моста под порывами ветра задаётся формулой $A = c \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $T = 4,9$ с — период собственных колебаний моста, $n = 0,0792$, $c > 0$ — постоянный коэффициент, τ — характерный период порывов ветра. Найдите период τ (в секундах), при котором амплитуда наибольшая.

19. К источнику переменного напряжения с амплитудой $U = 220$ В и круговой частотой ω (в радианах в секунду) последовательно подключены резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатор ёмкостью $C = 0,05$ Ф. Амплитуда силы тока в цепи (в амперах) выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

20. В последовательной цепи переменного тока с амплитудой напряжения $U = 120$ В сопротивление резистора равно $R = 15$ Ом, индуктивность катушки $L = 2,5$ Гн, ёмкость конденсатора $C = 0,1$ Ф. Амплитуда силы тока (в амперах) в зависимости от круговой частоты ω (в радианах в секунду) выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

21. Струя воды, вытекающая из сопла со скоростью $v = 12$ метров в секунду, падает на лопасти турбины, которые движутся в том же направлении со скоростью u (в метрах в секунду), причём $0 \leq u \leq v$. Мощность, передаваемая струёй лопастям, выражается формулой $N(u) = 2\rho S u(v - u)^2$, где ρ — плотность воды, S — площадь поперечного сечения струи. При какой скорости u (в метрах в секунду) передаваемая мощность будет наибольшей?

22. Лампа висит над центром круглого стола на высоте h (в метрах) от его поверхности. Освещённость точки края стола, удалённой от центра на $a = 3\sqrt{2}$ м, выражается формулой

$$E(h) = \frac{Jh}{(h^2 + a^2)\sqrt{h^2 + a^2}},$$

где J — сила света лампы. На какой высоте h (в метрах) надо повесить лампу, чтобы освещённость края стола была наибольшей?

23. Из круглого бревна диаметром $d = 30$ см выпиливают балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h (в сантиметрах), причём $b^2 + h^2 = d^2$. Прочность балки на изгиб пропорциональна величине $W = \frac{bh^2}{6}$. При какой ширине b (в сантиметрах) прочность балки будет наибольшей?

24. Расход топлива автомобилем на один километр пути (в литрах) зависит от скорости v (в километрах в час) по формуле

$$f(v) = 0,001 v + \frac{1,6}{v}.$$

При какой скорости v (в километрах в час) расход топлива на один километр пути будет наименьшим?

25. Сила тяги двигателя транспортного средства убывает с ростом скорости v (в метрах в секунду) по закону $F(v) = 180 - 0,15 v^2$ (в ньютонах), а полезная мощность равна $N(v) = F(v) \cdot v$. При какой скорости v (в метрах в секунду) полезная мощность будет наибольшей?

26. Концентрация лекарственного препарата в крови (в миллиграммах на литр) через t часов после приёма выражается формулой $c(t) = 5 t e^{-0,5t}$, где $t > 0$. Через сколько часов после приёма концентрация препарата в крови будет наибольшей?

27. В боковой стенке высокого сосуда, наполненного водой до уровня $H = 1,8$ м, на глубине h (в метрах) от поверхности воды проделано малое отверстие. Дальность полёта струи вдоль горизонтального дна выражается формулой $L(h) = 2\sqrt{h(H - h)}$. При какой глубине h (в метрах) дальность полёта струи будет наибольшей?

28. Количество вещества, получаемого в химическом реакторе за единицу времени, моделируется функцией $v(x) = \frac{200x}{(x+5)^2}$, где $x > 0$ — расход сырья. При каком расходе сырья скорость образования продукта наибольшая и чему она равна?
29. Прибыль фирмы (в тысячах рублей) при объёме выпуска x (в сотнях изделий) задаётся формулой $P(x) = \frac{480x}{(x+6)^2}$, где $x > 0$. Найдите объём выпуска, при котором прибыль наибольшая, и саму наибольшую прибыль.
30. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+2}$ часть курса, а забывает $\frac{t}{18}$ часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена наибольшая часть курса?
31. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты 500 м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения; коэффициент пропорциональности $k = 100$ килограммов в секунду. Считая начальную скорость $v_0 = 0$, ускорение свободного падения $g = 10$ метров на секунду в квадрате и пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите наибольшую кинетическую энергию тела.
32. Из деревянного шара радиуса R требуется вырезать цилиндр наибольшего объёма. Найдите размеры этого цилиндра.
33. Требуется огородить забором прямоугольную площадку площадью 36 квадратных метров. Какую форму должна иметь площадка, чтобы расход материала был наименьшим?
34. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R , вырезают сектор так, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости. Найдите угол этого сектора.
35. Окно имеет форму прямоугольника с полукругом наверху. Периметр окна равен P . Каким должно быть соотношение между шириной окна и его высотой, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?
36. Число 12 разделите на две такие части, чтобы сумма удвоенной одной части и квадрата другой была наименьшей.
37. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 метров в секунду по двум прямым, образующим угол $\frac{\pi}{2}$, в направлении к вершине этого угла. В начале движения первое тело находилось от вершины на расстоянии a м, а второе — на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?
38. Каким должно быть сопротивление r электронагревательного прибора, включённого в цепь с сопротивлением R , чтобы в приборе выделилось наибольшее количество теплоты, если $Q = rJ^2$, где $J = \frac{E}{R+r}$?

39. Из трёх одинаковых тонких досок ширины a изготовлен жёлоб с наибольшим поперечным сечением. Определите угол между большим основанием и боковой стороной сечения жёлоба.
40. В прямоугольном листе картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивают открытую прямоугольную коробку. Какой должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объём коробки был наибольшим?
41. Керосиновая цистерна, имеющая форму цилиндра, завершённого конусом, должна быть построена на данном круглом фундаменте радиуса R и иметь заданный объём V . При каком угле при вершине осевого сечения конуса для постройки цистерны потребуется наименьшее количество материала?
42. Водный канал должен иметь заданную глубину h и заданную площадь поперечного сечения S . Поперечное сечение канала — равнобокая трапеция. Каким должен быть угол наклона её боковых сторон, чтобы потери на трение при движении воды были наименьшими, то есть чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшей?
43. Суточные расходы при плавании судна состоят из постоянной части, равной a рублей, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости с коэффициентом k . При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?
44. Из круглого бревна диаметра d вытёсывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b , а высота равна h . При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность пропорциональна bh^2 ?
45. Прямоугольный участок площадью $S = 294$ квадратных метра огорожен забором и разделён таким же забором на две равные части. При каких линейных размерах участка общая длина забора будет наименьшей?
46. На странице книги печатный текст должен занимать 5 квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое — по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?
47. Требуется изготовить ящик с крышкой объёмом 72 кубических сантиметра, причём стороны основания должны относиться как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?
48. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой 5,6 м. На каком расстоянии должен встать человек с уровнем глаз 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

49. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что её нижний край на 1,8 м выше глаз человека. На каком расстоянии от стены должен встать человек, чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим?
50. Три пункта A , B и C расположены так, что угол ABC равен 60° . Из пункта A выходит автомобиль, одновременно из пункта B — поезд. Автомобиль движется к B со скоростью 80 километров в час, поезд — к C со скоростью 50 километров в час. В какой момент времени от начала движения расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?
51. Сумма высоты h и длины l окружности сечения цилиндрической почтовой посылки не должна превышать 150 см. Вычислите размеры наибольшей по объёму цилиндрической посылки, которую можно послать почтой.
52. Цена алмаза при прочих равных условиях пропорциональна квадрату его веса. Цена алмаза в 1 карат составляет a рублей. Какова наименьшая суммарная стоимость двух алмазов общим весом 4 карата?
53. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?
54. Найдите соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объёме наименьшую полную поверхность.
55. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определите его основание x и высоту y .
56. В результате измерений некоторой величины получены n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Найдите такое число x , чтобы сумма квадратов отклонений данных чисел от x была наименьшей.
57. Из зенитного орудия вертикально вверх вылетел снаряд со скоростью $v_0 = 200$ метров в секунду. Через сколько времени он достигнет наивысшего положения? Ускорение свободного падения считайте равным 10 метрам на секунду в квадрате.
58. Резервуар с квадратным дном, открытый сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каким должно быть соотношение между стороной основания и высотой, чтобы было израсходовано наименьшее количество свинца?
59. Сахарный завод производит x единиц продукции в месяц; суммарные издержки производства равны $K(x) = \frac{x}{50} + 15x + 800$. Зависимость удельной цены p от количества x единиц продукции, которое можно продать по этой цене, такова: $p = 50 - \frac{x}{10}$. При каком объёме выпуска прибыль (выручка равна xp) будет наибольшей?