

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Опорный конспект, задачи, решения

Пособие для подготовки к экзамену по математике
(профильный уровень)

СОДЕРЖАНИЕ

Опорный конспект	3
1. Техника дифференцирования	3
2. Исследование функции	3
3.1. Геометрический смысл производной	4
3.2. Физический смысл производной	4
4.1. Первообразная.....	4
1. Техника дифференцирования (48 задач)	4
Ответы.....	6
2. Касательная и параллельная касательной (24 задачи)	8
Ответы.....	9
3. Физический смысл производной. Скорость материальной точки (24 задачи)	10
Ответы.....	12
4. Касательная к параболе: поиск параметра (24 задачи).....	13
Ответы.....	14
5. График касательной (24 задачи)	15
Ответы.....	23
6. Касательная, параллельная данной прямой (24 задачи)	24
Ответы.....	37
7. Касательная, параллельная прямой. Сравнение $f'(x)$ (24 задачи)	39
Ответы.....	50
8. Знак производной. Возрастание и убывание. Экстремумы (88 задач)	51
Ответы.....	80
9. Исследование функции. Точки экстремума и наибольшие/наименьшие значения (40 задач).....	81
Ответы.....	82
10. Первообразная. Значение первообразной в точке (20 задач)	84
Ответы.....	84
11. Первообразная по графику. Площадь. Разность значений первообразной (36 задач)	86
Ответы.....	97
12. Вычисление значения производной в точке (29 задач)	98
Ответы.....	99
13. Задачи с развёрнутым решением. Прикладные задачи на наибольшее и наименьшее значение функции (59 задач)	100
Решения	107
Ответы.....	128

Опорный конспект

1. Техника дифференцирования.

1.1. Правила дифференцирования

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v' \quad 2) (uv)' = u'v + vu'; \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - vu'}{v^2} \quad 4) (Cu)' = Cu', \\ C - const;$$

1.2. Производные степенных функций

$$1) (C)' = 0; \quad C - const \quad 2) (x)' = 1 \quad 3) (x^n)' = nx^{n-1}; \quad 4) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

1.3. Производные тригонометрических функций

$$5) (\sin x)' = \cos x \quad 6) (\cos x)' = -\sin x; \quad 7) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad 8) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \\ (\sin u)' = u' \cdot \cos u \quad (\cos u)' = -u' \cdot \sin u; \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} \\ (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

1.4. Производные показательных и логарифмических функций

$$9) (e^x)' = e^x \quad 10) (a^x)' = a^x \cdot \ln a; \quad 11) (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad 12) (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\ (e^u)' = u' \cdot e^u \quad (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \\ (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a};$$

2. Исследование функции.

2.1. Исследование функции на отрезке.

Найдите наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

«Наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке достигается на концах отрезка или во внутренней точке отрезка, в которой производная равна 0».

Алгоритм:

1. Вычислить $f'(x)$.

2. Решить уравнение $f'(x) = 0$.

3. Найдите корни, принадлежащие $[a; b] \Rightarrow c \in [a; b]$.

4. Вычислите $f(a), f(b), f(c)$ и найдите наибольшее (наименьшее) из них.

2.2. Глобальное исследование функции.

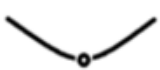
1. Найдите промежутки возрастания (убывания) функции (длину большего, длину меньшего, количество целых точек, принадлежащих этому промежутку).

2. Найдите точку минимума (максимума) функции (сами точки минимума или максимума, сумму точек экстремума, значение функции в точке максимума или в точке минимума).

«Критические точки» = «Точки разрыва функции» + «Точки экстремума функции»;

«Точки экстремума функции» = «Точки максимума функции» + «Точки минимума функции».

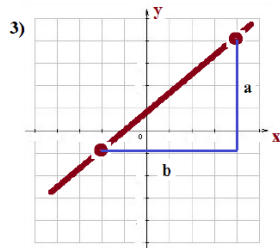
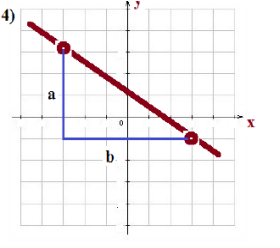
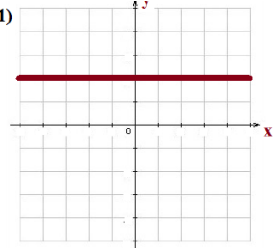
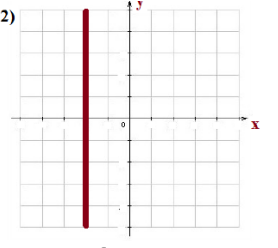
2.3. Исследование функции «таблица связи»

Функция / первообразная	Возрастает 	Убывает 	Точка максимума 	Точка минимума 
Первообразная / функция	Положительная «+», точки максимума и минимума	Отрицательная «-», точки максимума и минимума	Меняет знак при переходе через эту точку с «+» на «-», то есть «+0-»	Меняет знак при переходе через эту точку с «-» на «+», то есть «-0+»

3.1. Геометрический смысл производной

$y = kx + b$ — уравнение прямой, $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — уравнение касательной, α — угол между положительным направлением оси Ox и прямой.

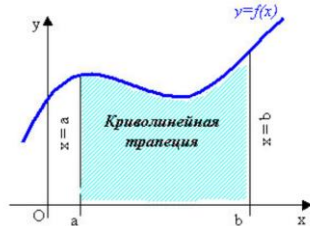
$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{a}{b};$$

 α — острый угол $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} \alpha = k =$ $f'(x_0) = \frac{a}{b}$	 α — тупой угол $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} \alpha = k$ $= f'(x_0) = -\frac{a}{b}$	 $\alpha = 0^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$ $\operatorname{tg} \alpha = k = f'(x_0) = 0$	 $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 90^\circ.$ $\operatorname{tg} \alpha, k, f'(x_0)$ — не существуют;
---	---	--	---

3.2. Физический смысл производной

$S(t)$ — путь, $v(t)$ — скорость, $a(t)$ — ускорение, t — время. $S = S(t)$, $S'(t) = v(t)$, $S''(t) = v'(t) = a(t)$,

4.1. $F(x)$ — первообразная для $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$, $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

	$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$ Вычисление площади по клеточкам.	$[a; b]$ — отрезок, промежуток, $[a; b), (a; b]$ — полуинтервал, $(a; b)$ — интервал
---	---	--

Техника дифференцирования

1. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x - 1$ в точке $x_0 = -\sqrt{17}$.
2. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x}{4} + 8$ в точке $x_0 = 13$.
3. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 + 3$ в точке $x_0 = 4$.
4. Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^2 - 5$ в точке $x_0 = 4$.
5. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^2}{4} - 5$ в точке $x_0 = -16$.
6. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^2 + 2x$ в точке $x_0 = -3$.
7. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 + x - 1$ в точке $x_0 = -2$.
8. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{3x^2+2x-17}{5}$ в точке $x_0 = 1$.
9. Найдите значение производной функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 2$.
10. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^3 + 18$ в точке $x_0 = \sqrt{5}$.
11. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3}{5} + 5$ в точке $x_0 = 3$.
12. Найдите значение производной функции $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x - 14$ в точке $x_0 = 7$.
13. Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^4 - 2x + 117$ в точке $x_0 = -2$.
14. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^4}{2} + 3x^3 + x + 11$ в точке $x_0 = -2$.
15. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^5}{3} + x^2 + \frac{x}{3} - 1,5$ в точке $x_0 = 2$.
16. Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.
17. Найдите значение производной функции $f(x) = 6\sqrt{x} + 2x - 4$ в точке $x_0 = 9$.
18. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{6} - 5x^2 + \frac{x}{6} + 14$ в точке $x_0 = 1$.
19. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = -2$.
20. Найдите значение производной функции $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x}{8} + 1,4$ в точке $x_0 = -4$.
21. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{9}{2x} + 3x - \frac{3}{2}$ в точке $x_0 = 3$.
22. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{x} - 74,5$ в точке $x_0 = 2$.
23. Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{27}x^2 + 10,5x - 2$ в точке $x_0 = 2,25$.

24. Найдите значение производной функции $f(x) = (x - 2)^2 + 2$ в точке $x_0 = 3,5$.
25. Найдите значение производной функции $f(x) = (3x + 1)^2 - 3$ в точке $x_0 = \frac{2}{3}$.
26. Найдите значение производной функции $f(x) = (x - 1)^3 + 5$ в точке $x_0 = -2$.
27. Найдите значение производной функции $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3 + 12x$ в точке $x_0 = -3$.
28. Найдите значение производной функции $f(x) = (2x + 5)(-3x + 1) + 4$ в точке $x_0 = 2$.
29. Найдите значение производной функции $f(x) = (x^2 - 3)(2x + 1) - 144$ в точке $x_0 = -1$.
30. Найдите значение производной функции $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ в точке $x_0 = 9$.
31. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}(x - 3) - 14,5$ в точке $x_0 = 1$.
32. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}(2x^2 + 4x - 1) + 2,55$ в точке $x_0 = 2$.
33. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ в точке $x_0 = -2,5$.
34. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+2}$ в точке $x_0 = -1,5$.
35. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-1}$ в точке $x_0 = -2,5$.
36. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$ в точке $x_0 = -7$.
37. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{2x^2-18}{x-3}$ в точке $x_0 = -13$.
38. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$ в точке $x_0 = 3$.
39. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3+6x^2+12x+9}{x+2}$ в точке $x_0 = -2$.
40. Найдите значение производной функции $f(x) = 9 \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ в точке $x_0 = 0,25$.
41. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$ в точке $x_0 = 0,25$.
42. Найдите значение производной функции $f(x) = \sin x + 1$ в точке $x_0 = 0$.
43. Найдите значение производной функции $f(x) = \cos x - 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
44. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{tg} x + \pi$ в точке $x_0 = \frac{3\pi}{4}$.

45. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{ctg} x + 3x + 8$ в точке $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.
46. Найдите значение производной функции $f(x) = \sin 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
47. Найдите значение производной функции $f(x) = 2\cos \frac{x}{2} - 1$ в точке $x_0 = \pi$.
48. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + 5$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Ответы

1.	2.	3.	4.	5.	6.
3	0.25	8	32	-8	-16
7.	8.	9.	10.	11.	12.
-3	1.6	12	45	5.4	-95
13.	14.	15.	16.	17.	18.
-130	21	31	1/4	3	-6.75
19.	20.	21.	22.	23.	24.
-0.25	0.25	2.5	2.25	11.5	3
25.	26.	27.	28.	29.	30.
18	27	13	-37	-2	4.5
31.	32.	33.	34.	35.	36.
3	2.25	12	5	-68	-12
37.	38.	39.	40.	41.	42.
2	4	не суц.	-4	1	1
43.	44.	45.	46.	47.	48.
-2.5	2	-1	0	-1	4

Касательная и параллельная касательной

1. Прямая $y = 8x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 6$.
Найдите абсциссу точки касания.
2. Прямая $y = 7x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 4x - 8$.
Найдите абсциссу точки касания.
3. Прямая $y = 6x - 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 + 6x - 9$.
Найдите абсциссу точки касания.
4. Прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 7$.
Найдите абсциссу точки касания.
5. Прямая $y = 4x - 1$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 3$.
Найдите абсциссу точки касания.
6. Прямая $y = -3x + 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + x - 4$.
Найдите абсциссу точки касания.
7. Прямая $y = 10x - 7$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x + 1$.
Найдите абсциссу точки касания.
8. Прямая $y = x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 2$.
Найдите абсциссу точки касания.
9. Прямая $y = -6x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - x - 3$.
Найдите абсциссу точки касания.
10. Прямая $y = 9x - 4$ параллельна касательной к графику функции $y = 2x^2 - 3x + 5$.
Найдите абсциссу точки касания.
11. Прямая $y = 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 8x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.
12. Прямая $y = 5x - 2$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 + x - 7$.
Найдите абсциссу точки касания.
13. Прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.
Найдите абсциссу точки касания.
14. Прямая $y = x - 3$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + x - 3$.
Найдите абсциссу точки касания.
15. Прямая $y = -4x + 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - 4x + 2$.
Найдите абсциссу точки касания.

16. Прямая $y = 3x - 1$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$. Найдите абсциссу точки касания.
17. Прямая $y = 6$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.
18. Прямая $y = 2x$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 6x$. Найдите абсциссу точки касания.
19. Прямая $y = 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Найдите абсциссу точки касания.
20. Прямая $y = 4x + 3$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.
21. Прямая $y = 8x - 1$ параллельна касательной к графику функции $y = 2x^2 + 4x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.
22. Прямая $y = -2x + 7$ параллельна касательной к графику функции $y = -x^2 + 3x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.
23. Прямая $y = 5x - 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 + 5x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.
24. Прямая $y = -3x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответы

1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.5	5.5	0	3	3	-2
7.	8.	9.	10.	11.	12.
2	3	-2.5	3	4	2/3
13.	14.	15.	16.	17.	18.
0	0	0	1	-1	2
19.	20.	21.	22.	23.	24.
-2	1	1	2.5	0	2

Физический смысл производной. Скорость материальной точки

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 8t - 21$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.
2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - 4$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 6 м/с?
3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 + 2t^2 - 5t - 18$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.
4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 8$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 15 м/с?
5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^4 + 6t^3 - 4t^2 - 8t + 3$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 1$ с.
6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 6t + 1$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 4$ с.
7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -2t^2 + 10t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.
8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 + 2t - 5$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 14 м/с?
9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 4t^2 + t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.
10. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t - 1$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 11 м/с?

11. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 3t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 1$ с.
12. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^3 + 6t^2$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 1$ с.
13. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 10 м/с?
14. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - t^2 + 5$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 1$ с.
15. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t - 7$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 10 м/с?
16. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 12t - 3$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 5$ с.
17. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^2 - 8t + 1$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 0 м/с?
18. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 + t^2 - 6t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.
19. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t^2$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.
20. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^2 - 3t + 8$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 5 м/с?
21. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^3 + 9t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.

22. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 1$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 14 м/с?

23. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t^2 - t - 10$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

24. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -3t^2 + 18t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 0 м/с?

Ответы

1.	2.	3	4.	5.	6
2	7	34	4	4	2
7.	8.	9.	10.	11.	12.
2	2	-3	3	0	9
13.	14.	15.	16.	17.	18.
6	4	3	2	1	10
19.	20.	21.	22.	23	24.
0	2	-3	4	29	3

Касательная к параболе: поиск параметра

1. Прямая $y = -5x + 7$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 - 29x + 19$.
Найдите a .
2. Прямая $y = -7x - 9$ является касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 + bx$.
Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.
3. Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 9x^2 + bx + 1$.
Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.
4. Прямая $y = 3x - 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 10x^2 + 23x + c$.
Найдите c .
5. Прямая $y = -2x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 - 6x + 5$.
Найдите a .
6. Прямая $y = 10x - 4$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 4x - 1$.
Найдите a .
7. Прямая $y = x - 4$ является касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + bx + 4$.
Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.
8. Прямая $y = -5x - 2$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 + bx + 1$.
Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.
9. Прямая $y = 7x - 2$ является касательной к графику функции $f(x) = 5x^2 - 3x + c$.
Найдите c .
10. Прямая $y = -4x - 21$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 8x - 3$.
Найдите a .
11. Прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 + bx + 2$.
Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.
12. Прямая $y = -8x + 5$ является касательной к графику функции $f(x) = x^2 + bx + 6$.
Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.
13. Прямая $y = 2x - 9$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 4x + c$.
Найдите c .
14. Прямая $y = 6x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$.
Найдите a .
15. Прямая $y = -3x - 3$ является касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + bx - 1$.
Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

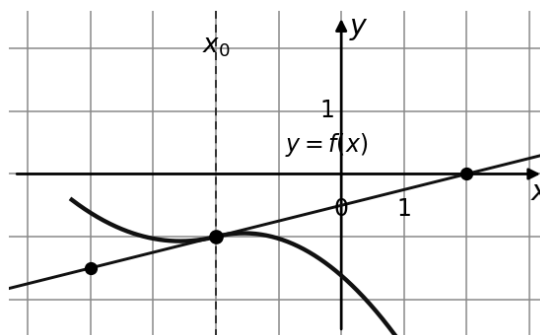
16. Прямая $y = 9x - 5$ является касательной к графику функции $f(x) = 6x^2 + bx + 1$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.
17. Прямая $y = x + 10$ является касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 7x + c$. Найдите c .
18. Прямая $y = -7x - 10$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + x - 6$. Найдите a .
19. Прямая $y = 4x - 23$ является касательной к графику функции $f(x) = 5x^2 + bx - 3$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.
20. Прямая $y = -2x - 1$ является касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 + bx + 3$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.
21. Прямая $y = 5x - 4$ является касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + x + c$. Найдите c .
22. Прямая $y = 8x - 5$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 - 4x + 7$. Найдите a .
23. Прямая $y = -6x + 2$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 + bx + 5$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.
24. Прямая $y = 2x - 11$ является касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 6x + c$. Найдите c .

Ответы

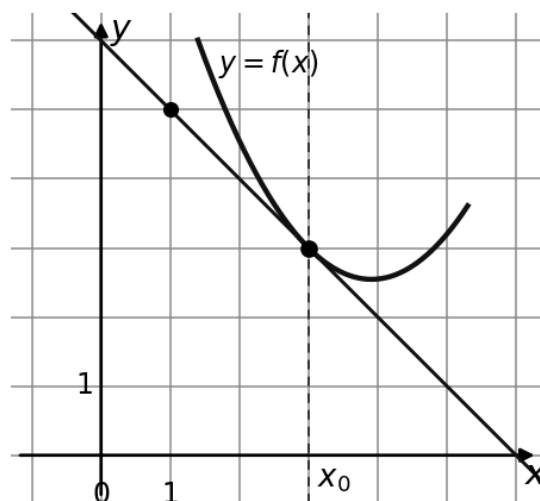
1.	2.	3.	4.	5.	6.
12	-19	14	2	1	3
7.	8.	9.	10.	11.	12.
-7	1	3	2	-5	-4
13.	14.	15.	16.	17.	18.
-6	2	-7	21	26	4
19.	20.	21.	22.	23.	24.
-16	6	-2	3	-12	5

График касательной

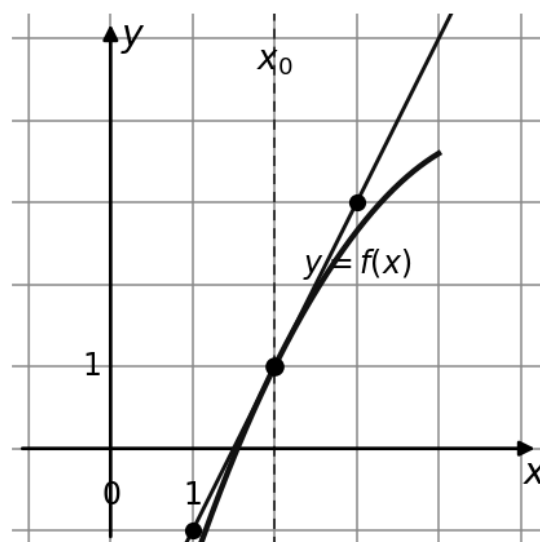
1. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



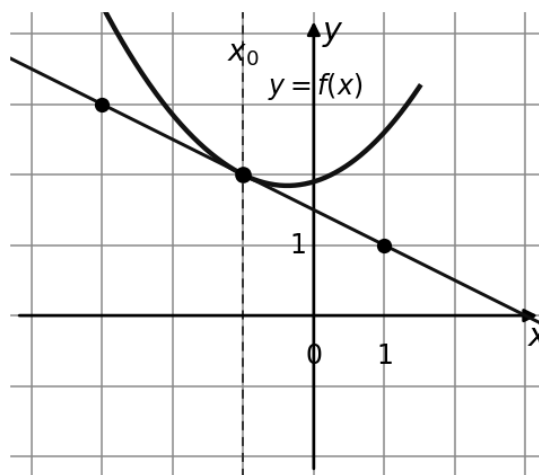
2. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



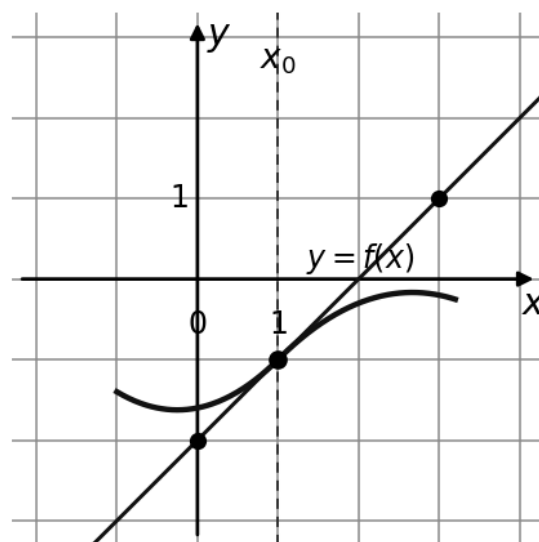
3. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



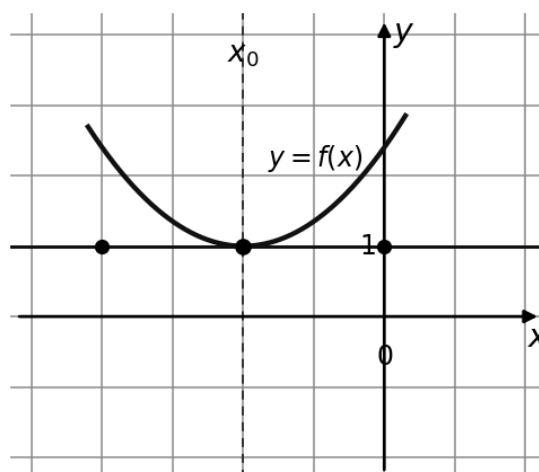
4. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



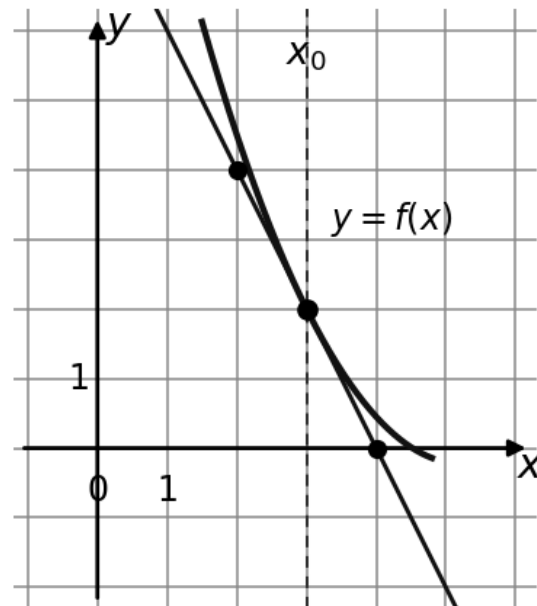
5. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



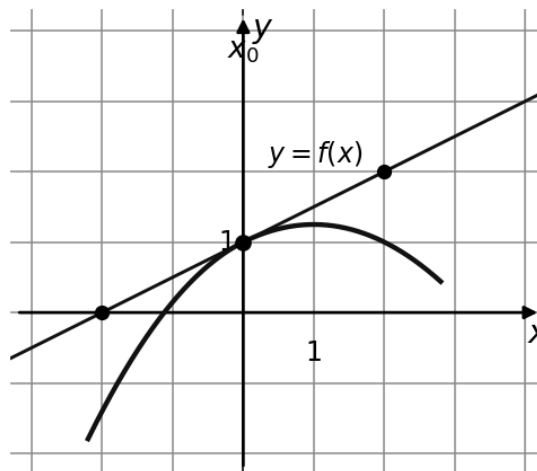
6. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



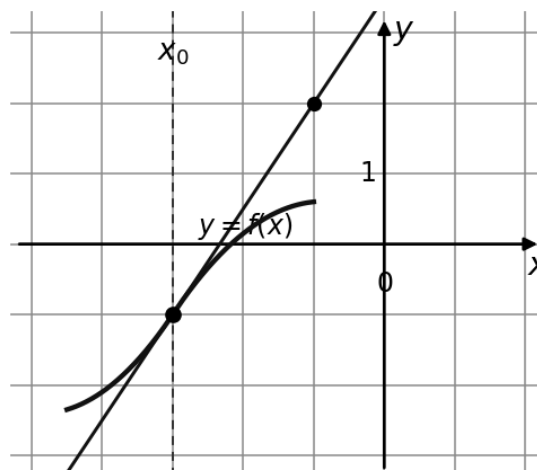
7. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



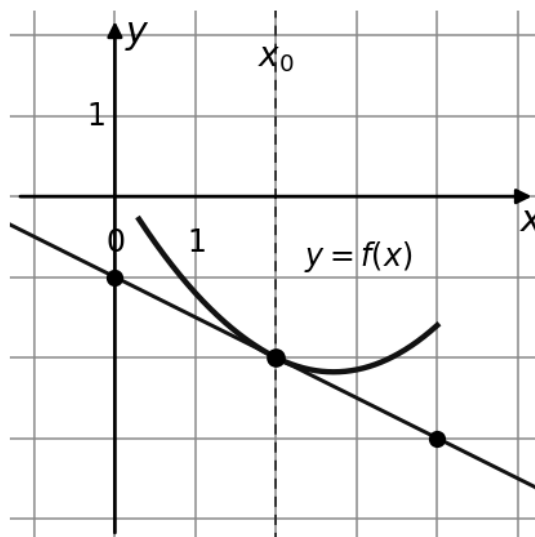
8. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



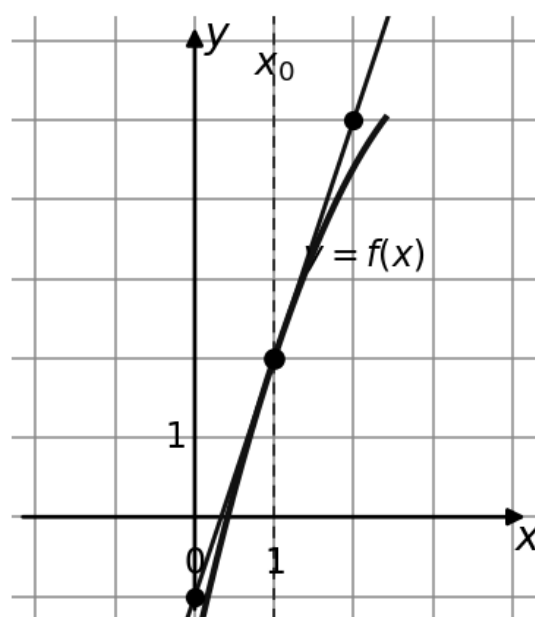
9. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



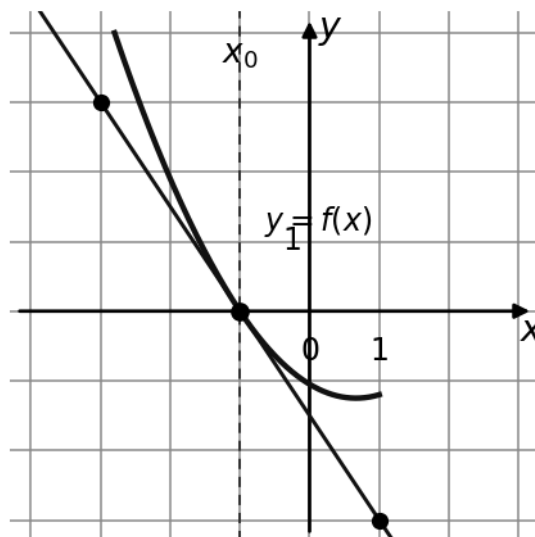
10. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



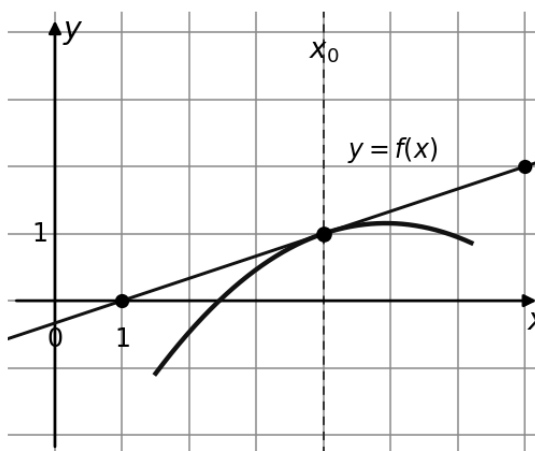
11. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



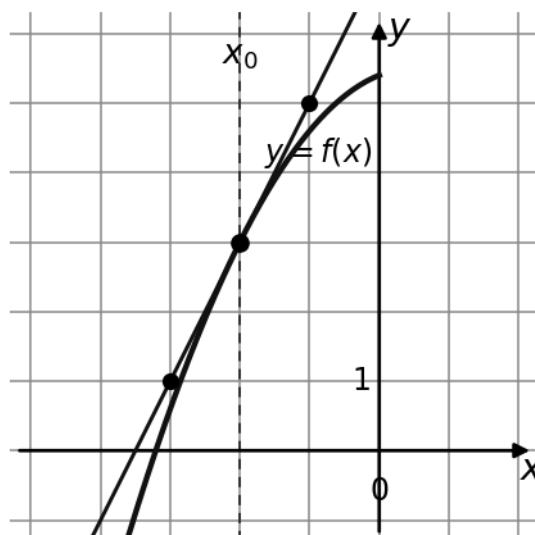
12. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



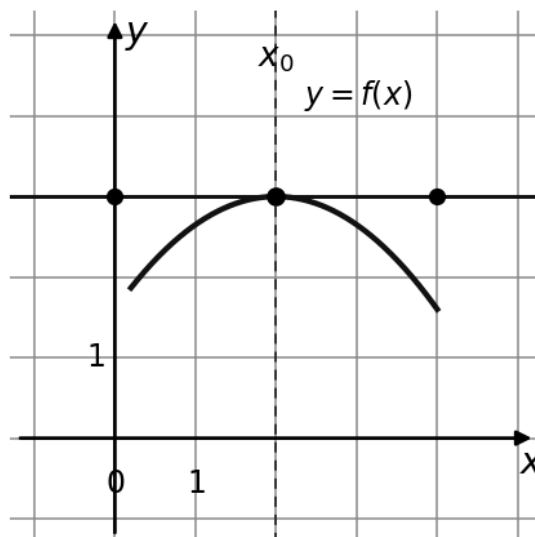
13. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



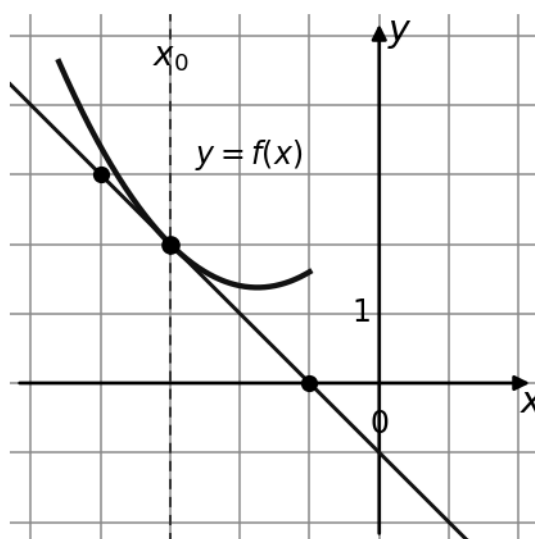
14. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



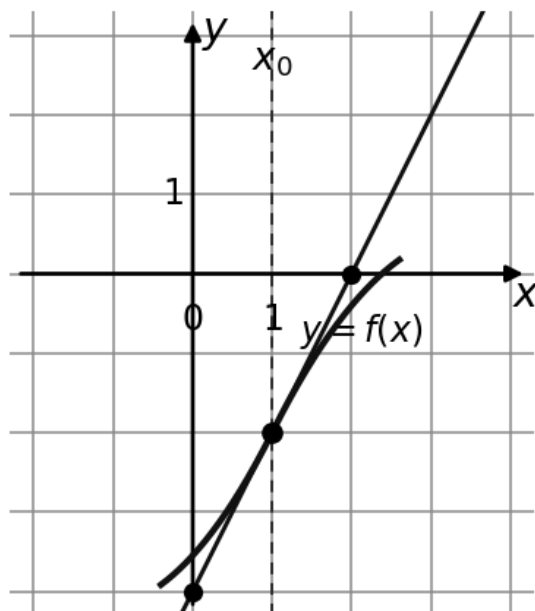
15. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



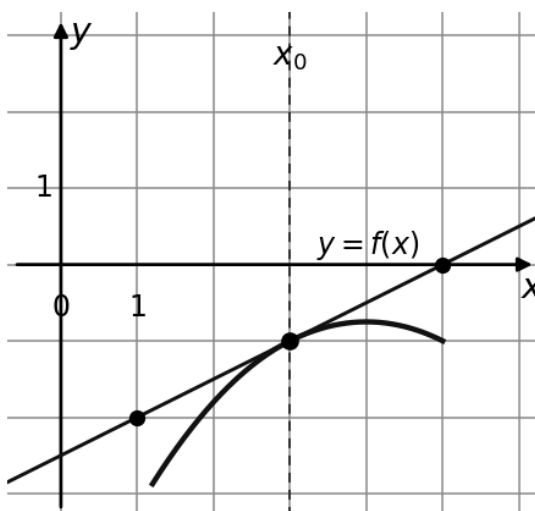
16. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



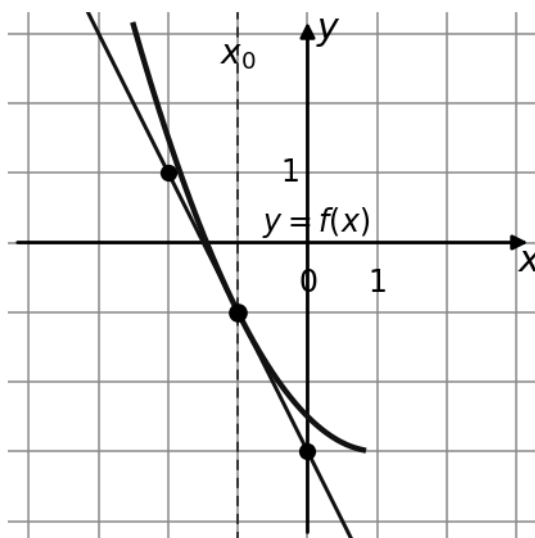
17. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



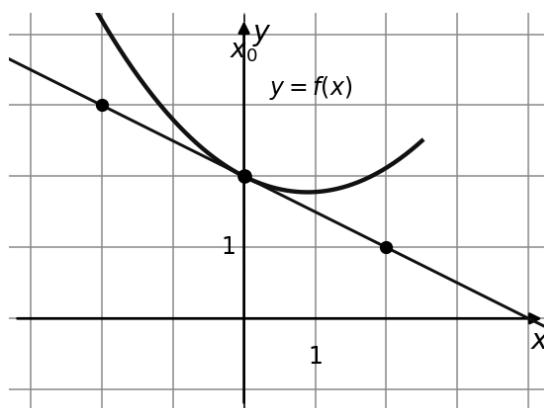
18. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



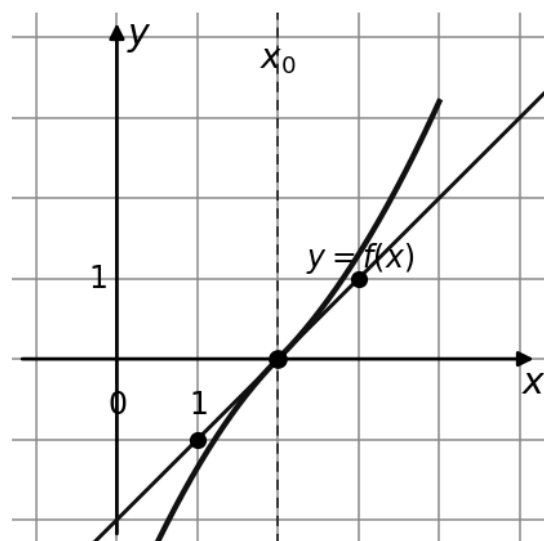
19. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



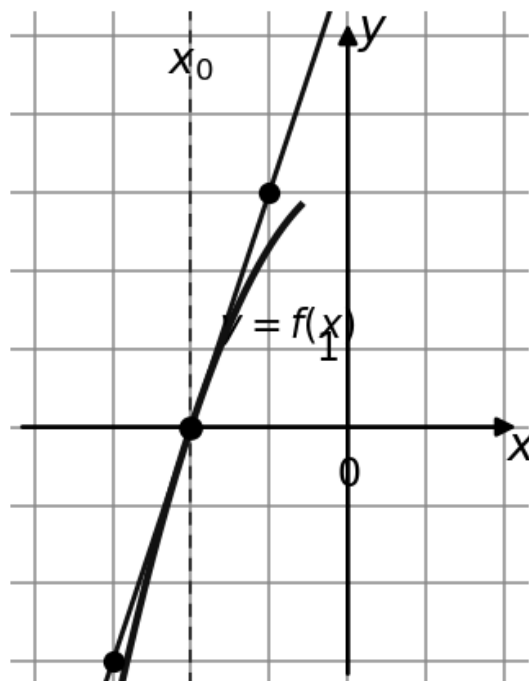
20. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



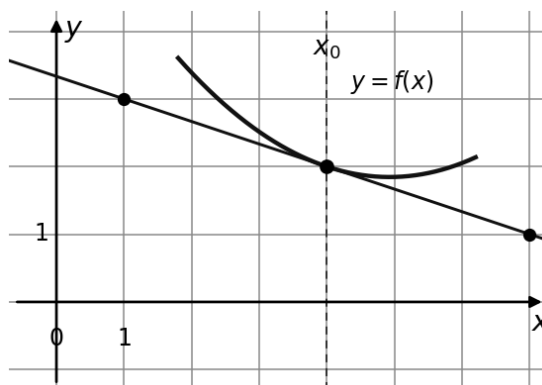
21. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



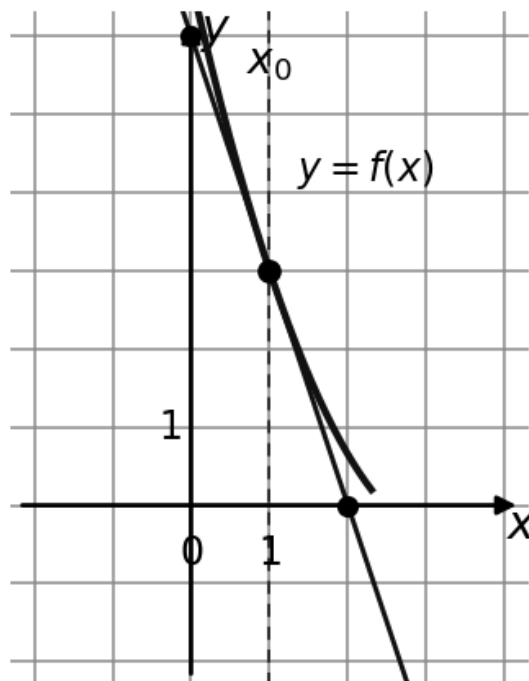
22. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



23. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



24. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

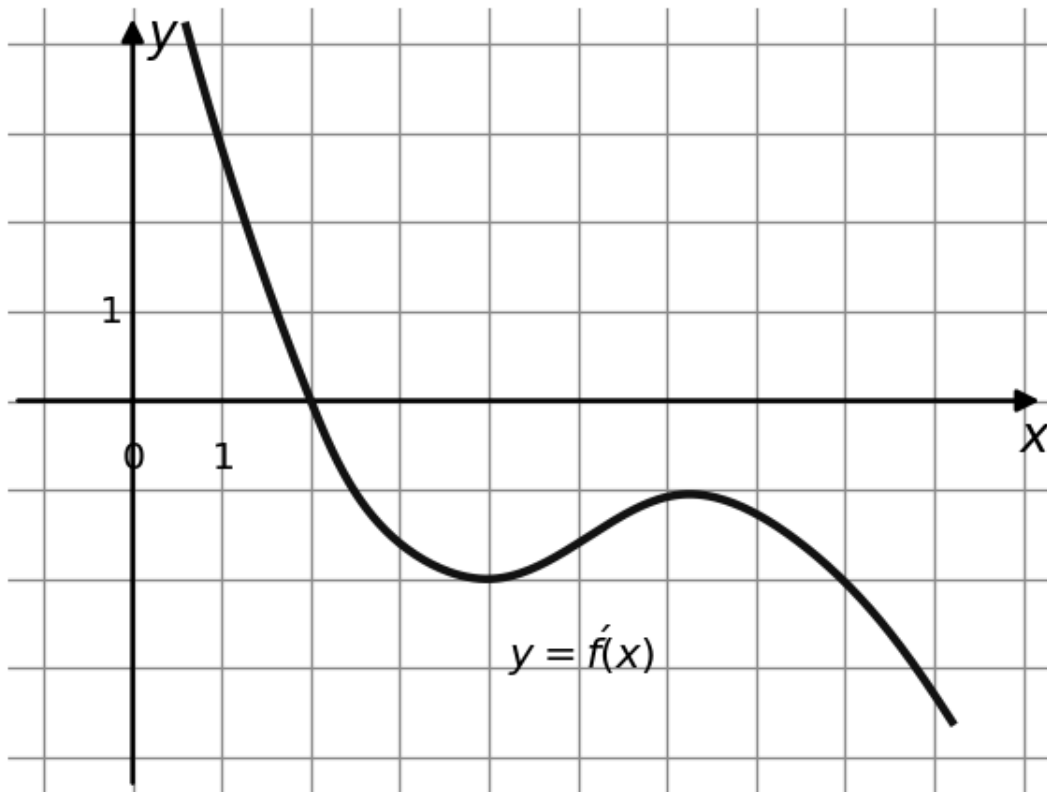


Ответы

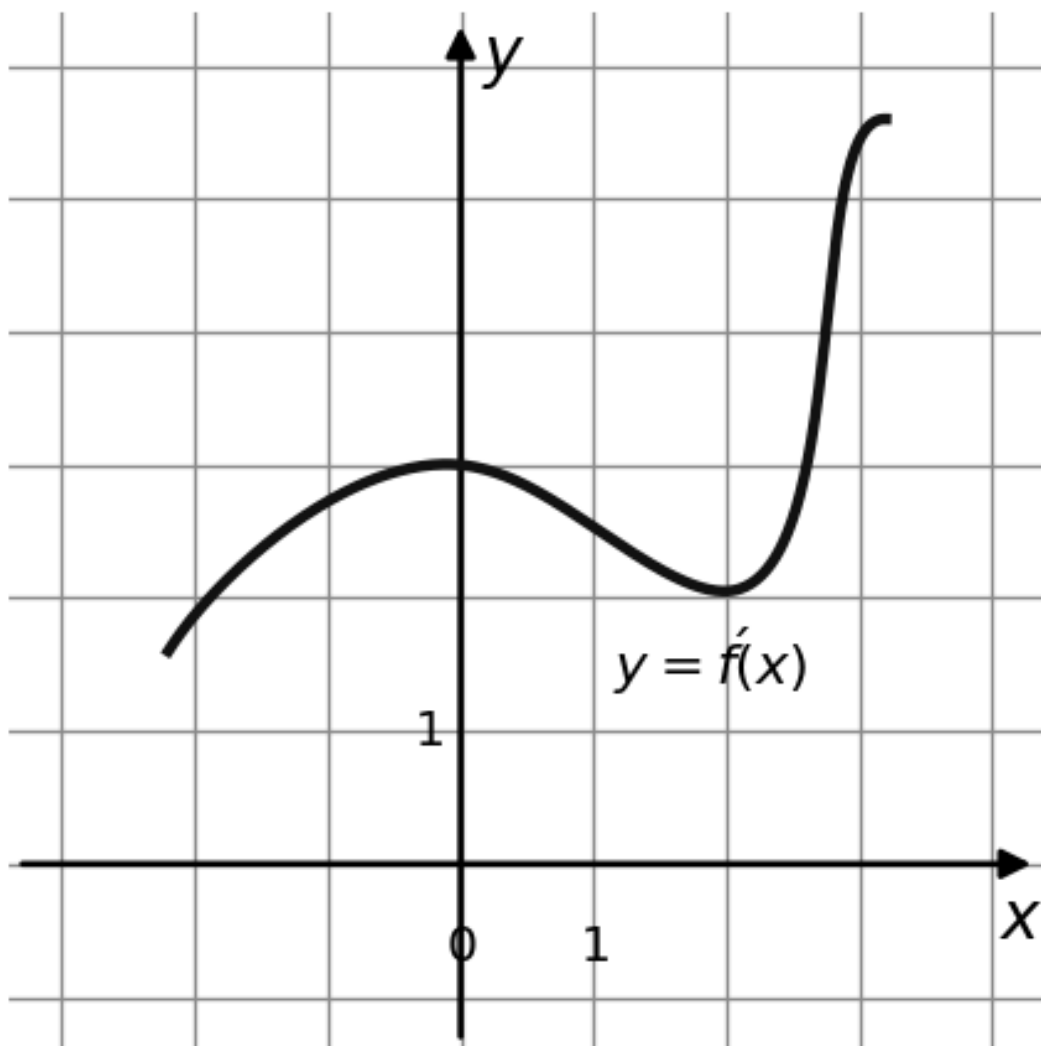
1.	2.	3.	4.	5.	6.
0.25	-1	2	-0.5	1	0
7.	8.	9.	10.	11.	12.
-2	0.5	1.5	-0.5	3	-1.5
13.	14.	15.	16.	17.	18.
1/3	2	0	-1	2	0.5
19.	20.	21.	22.	23.	24.
-2	-0.5	1	3	-1/3	-3

Касательная, параллельная данной прямой

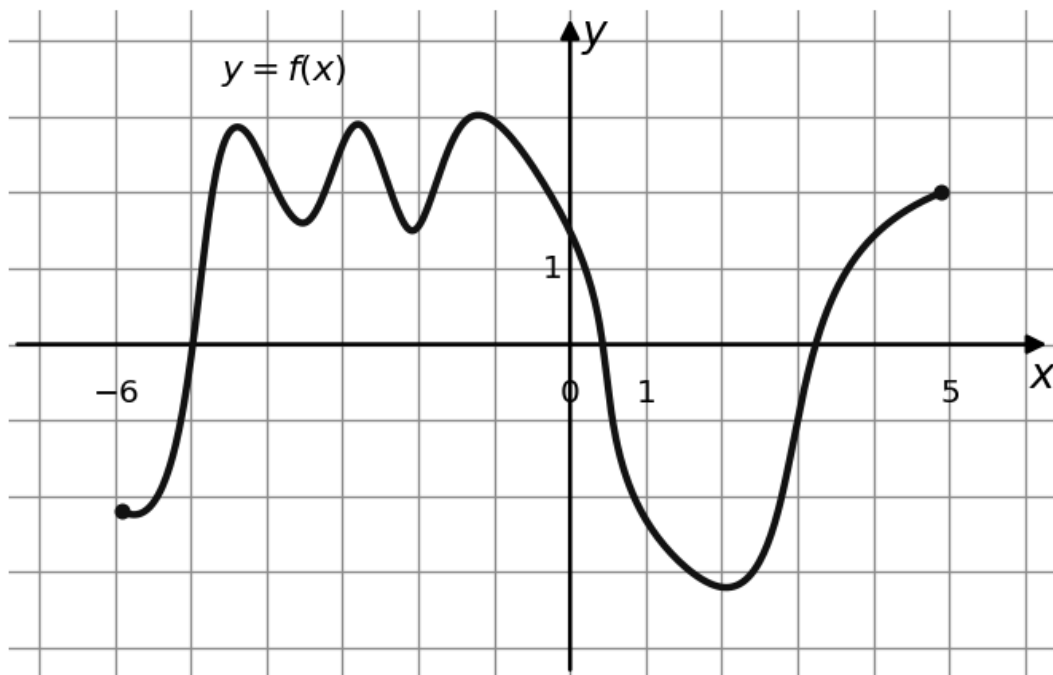
1. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



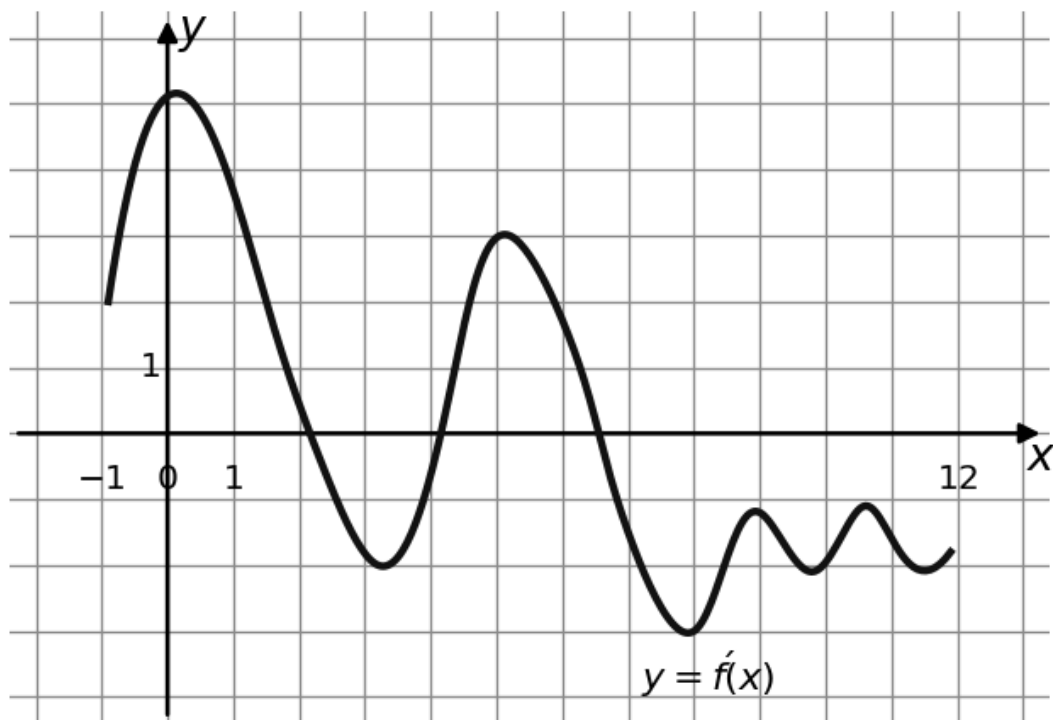
2. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите наименьшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.



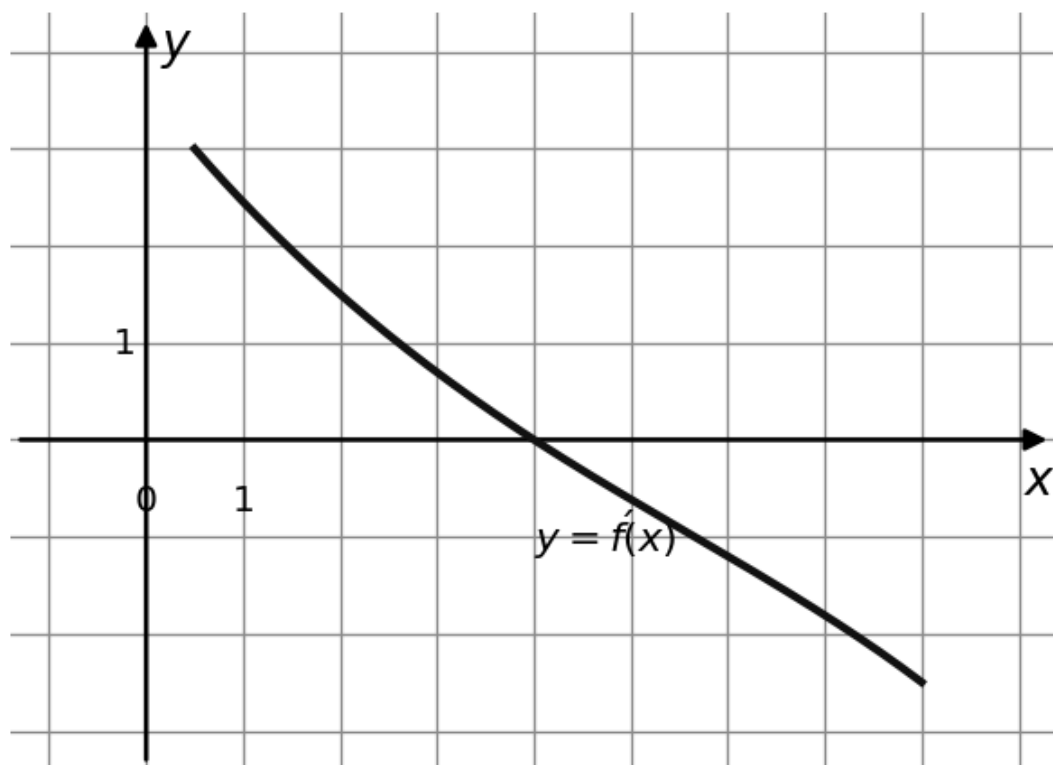
3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -8$.



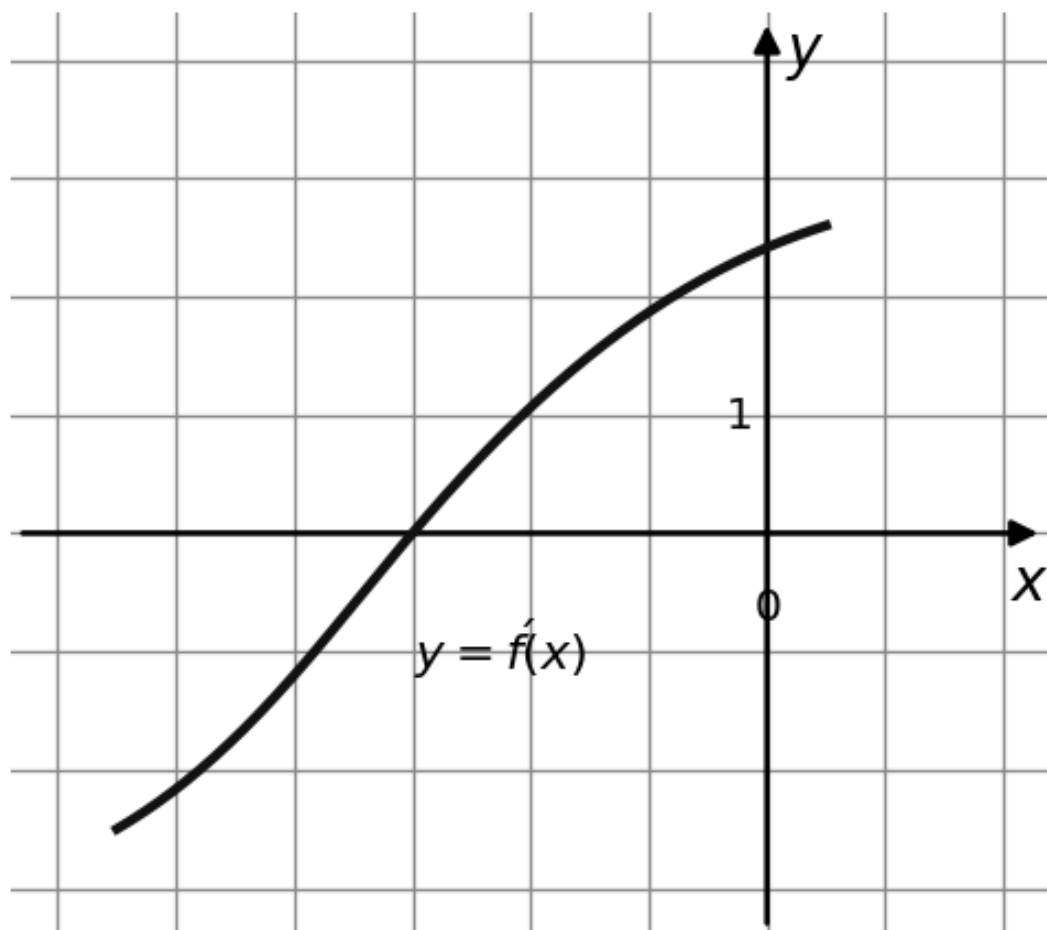
4. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 15$ или совпадает с ней.



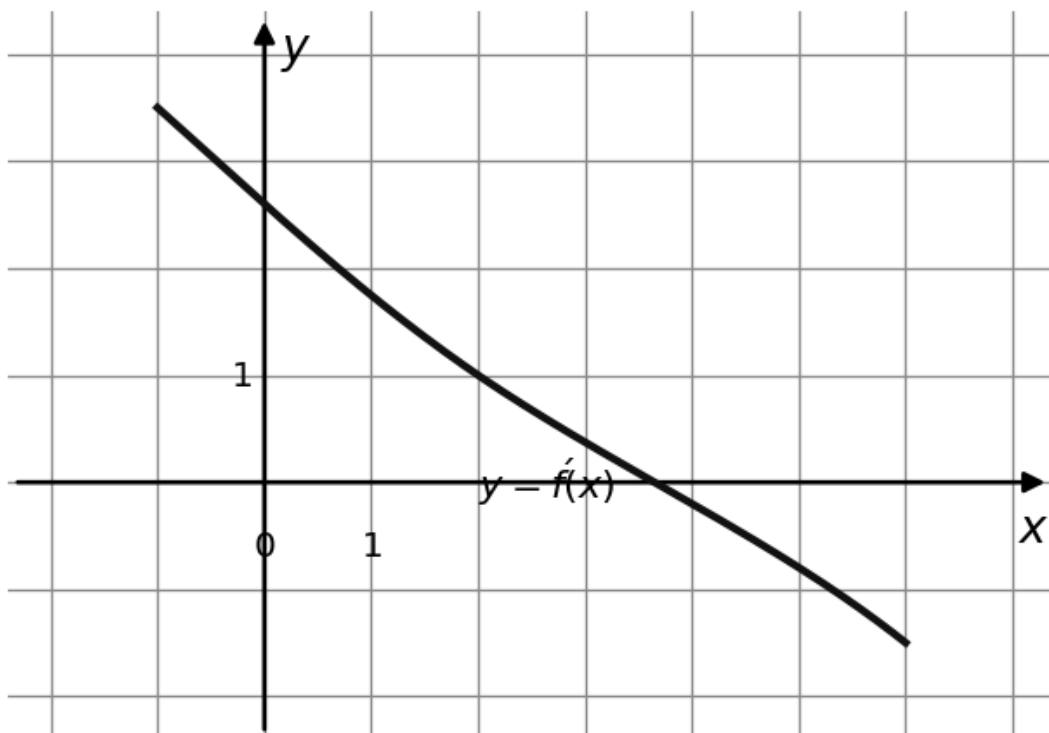
5. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



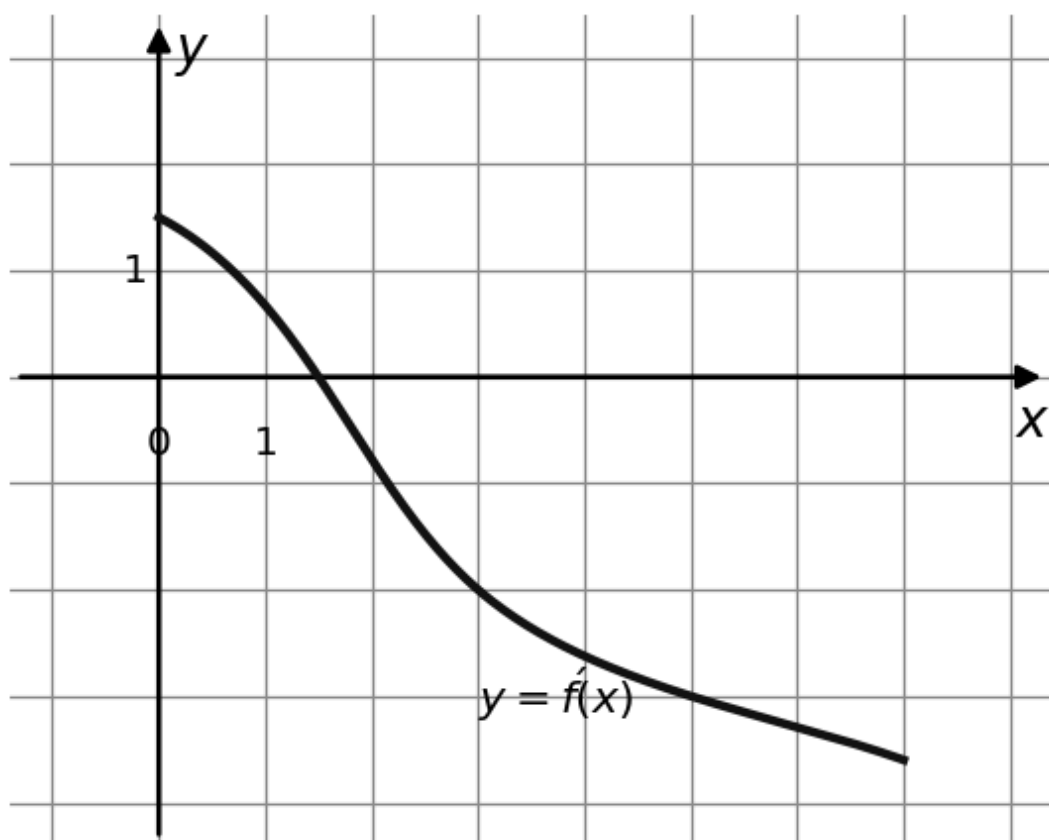
6. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



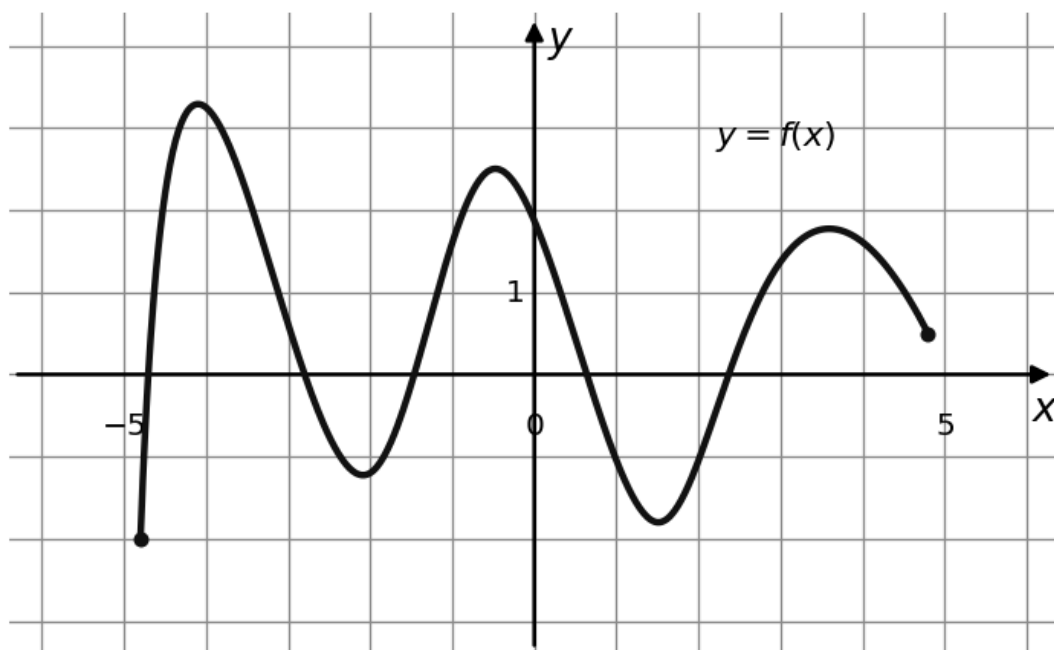
7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 4$ или совпадает с ней.



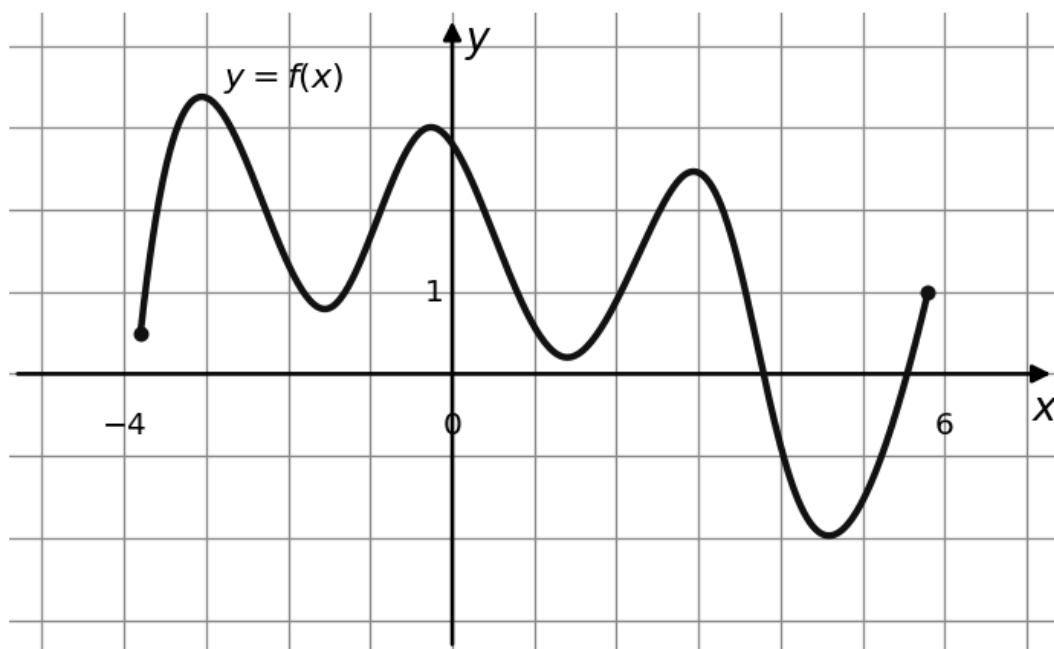
8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 1$ или совпадает с ней.



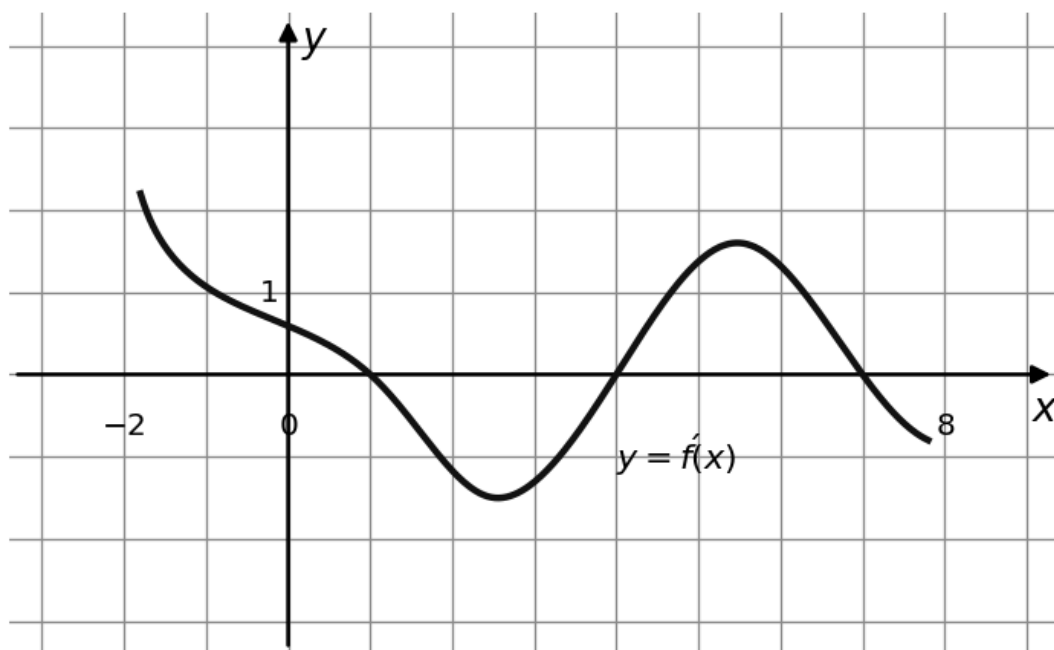
9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 4$.



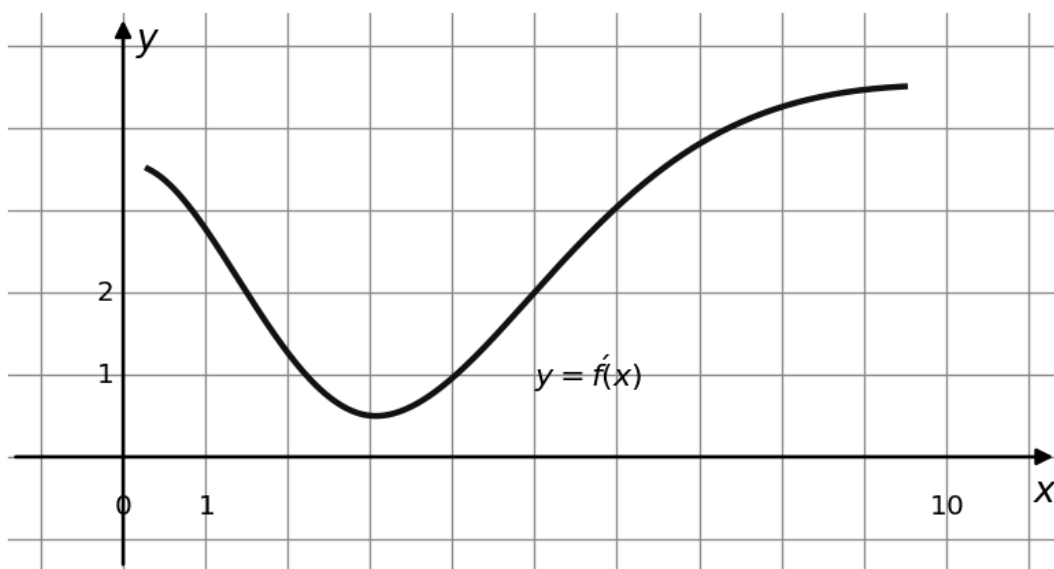
10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.



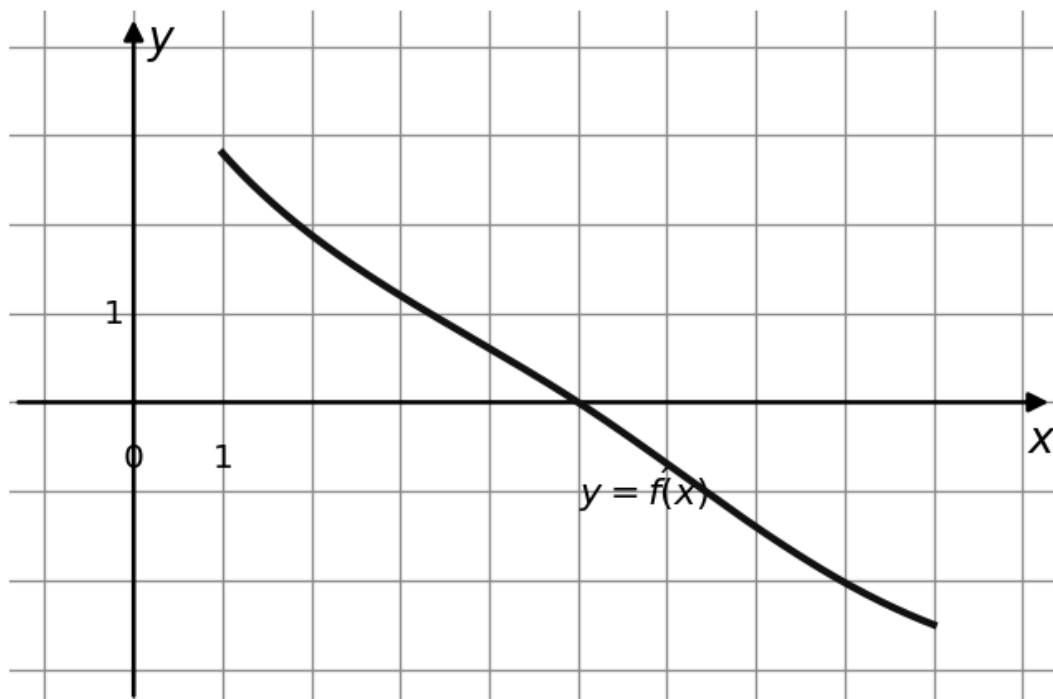
11. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



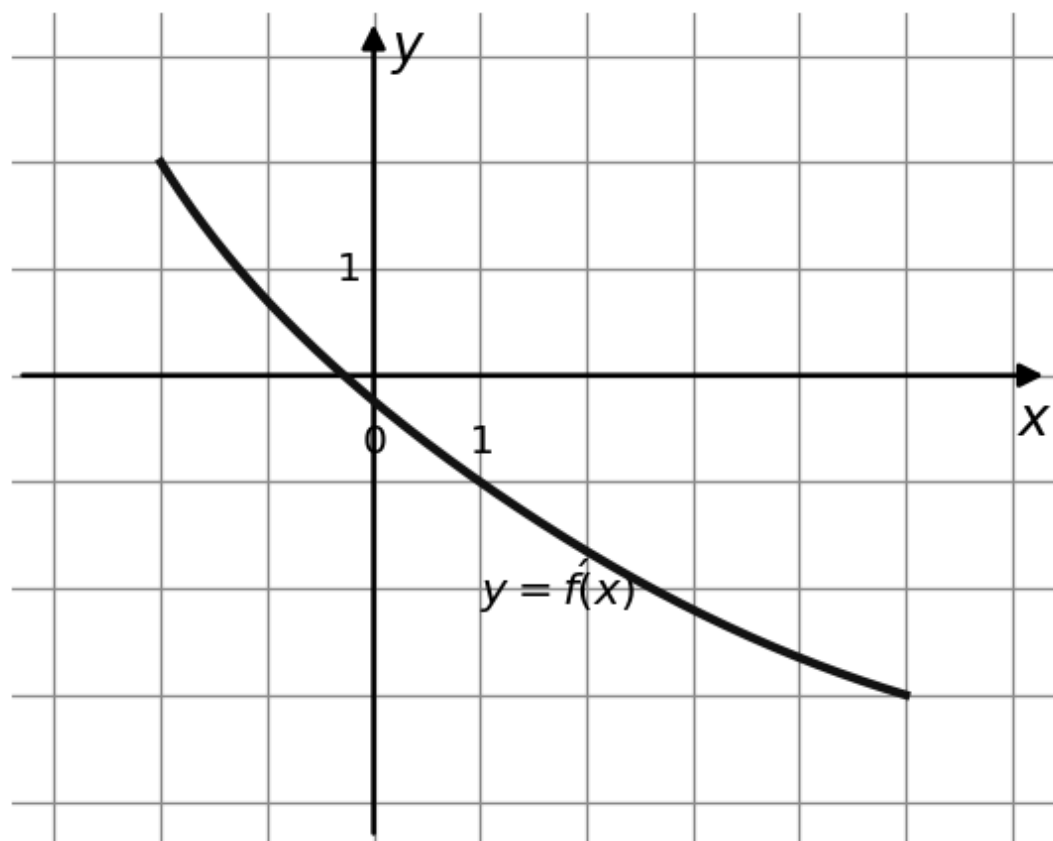
12. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(0; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 7$ или совпадает с ней.



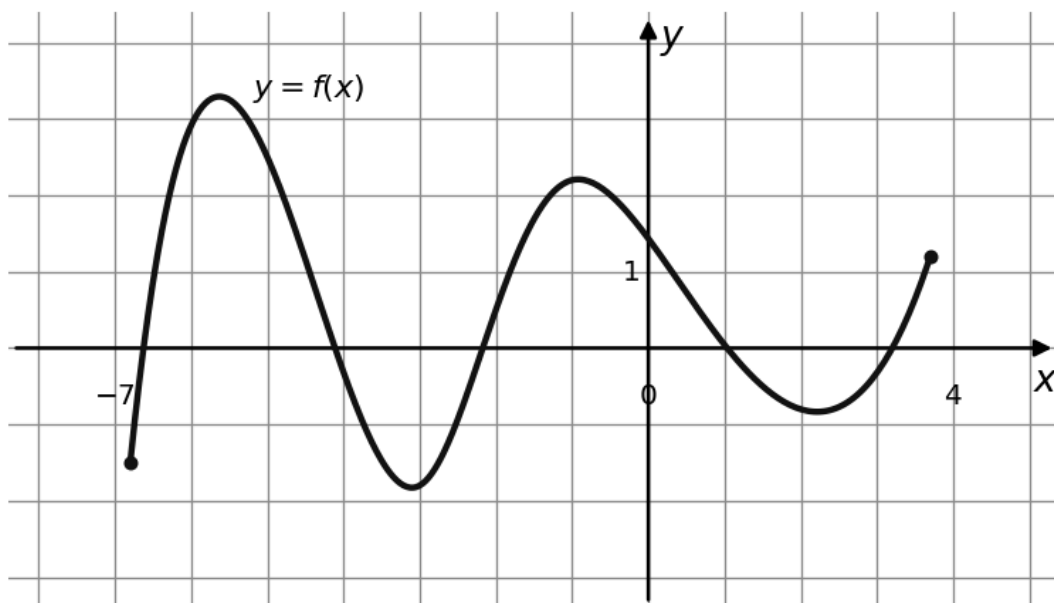
13. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



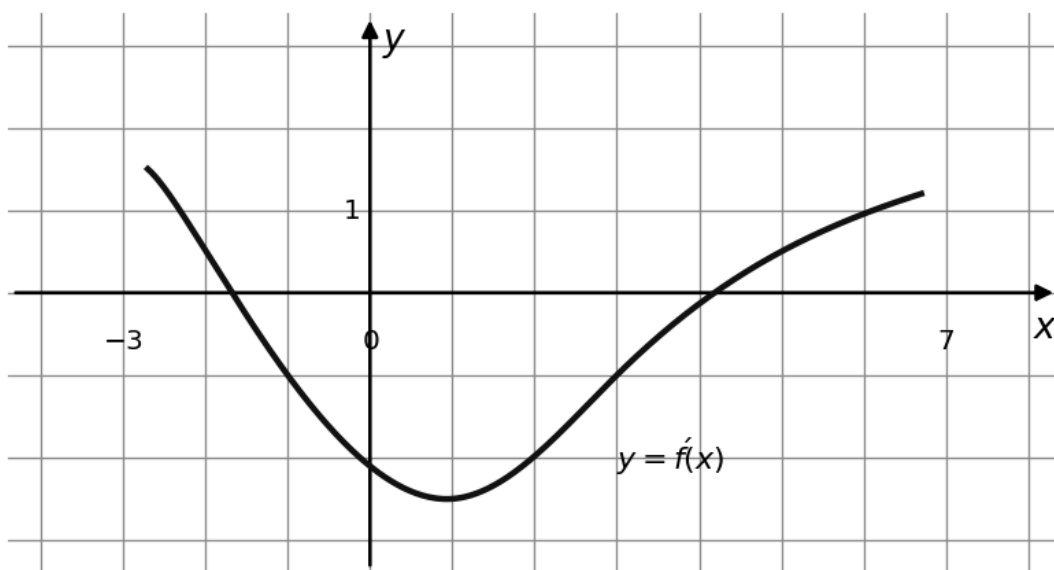
14. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 5$ или совпадает с ней.



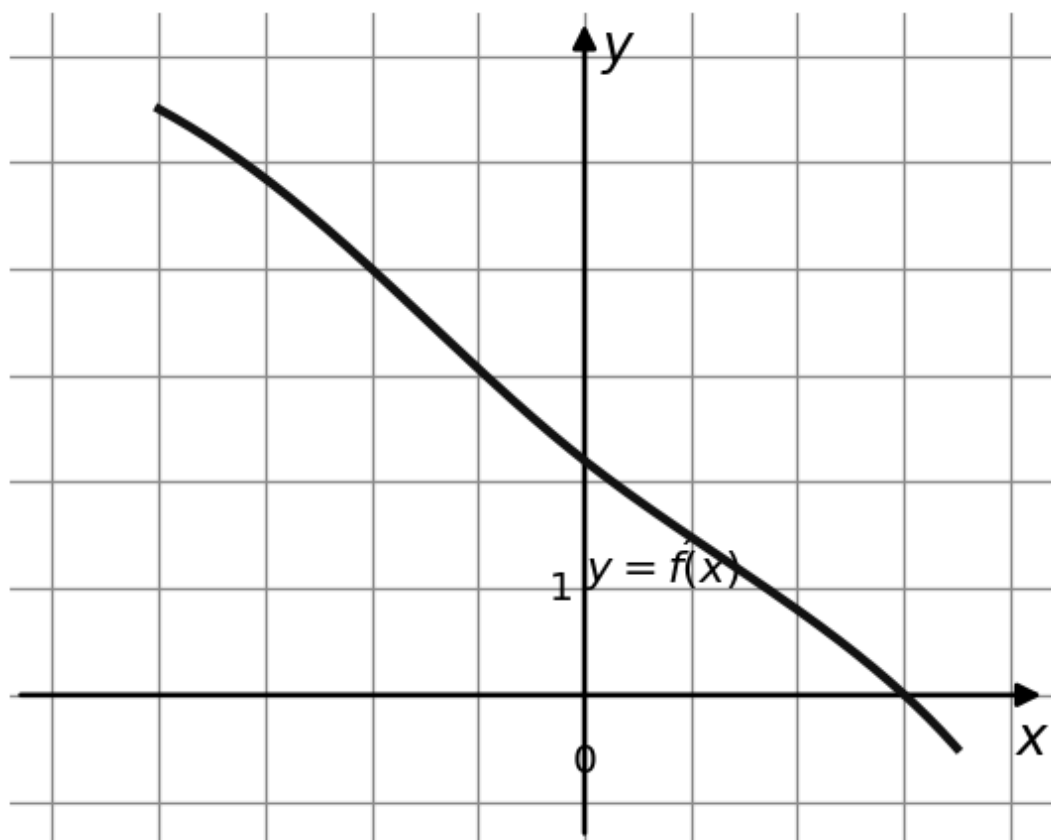
15. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 5$.



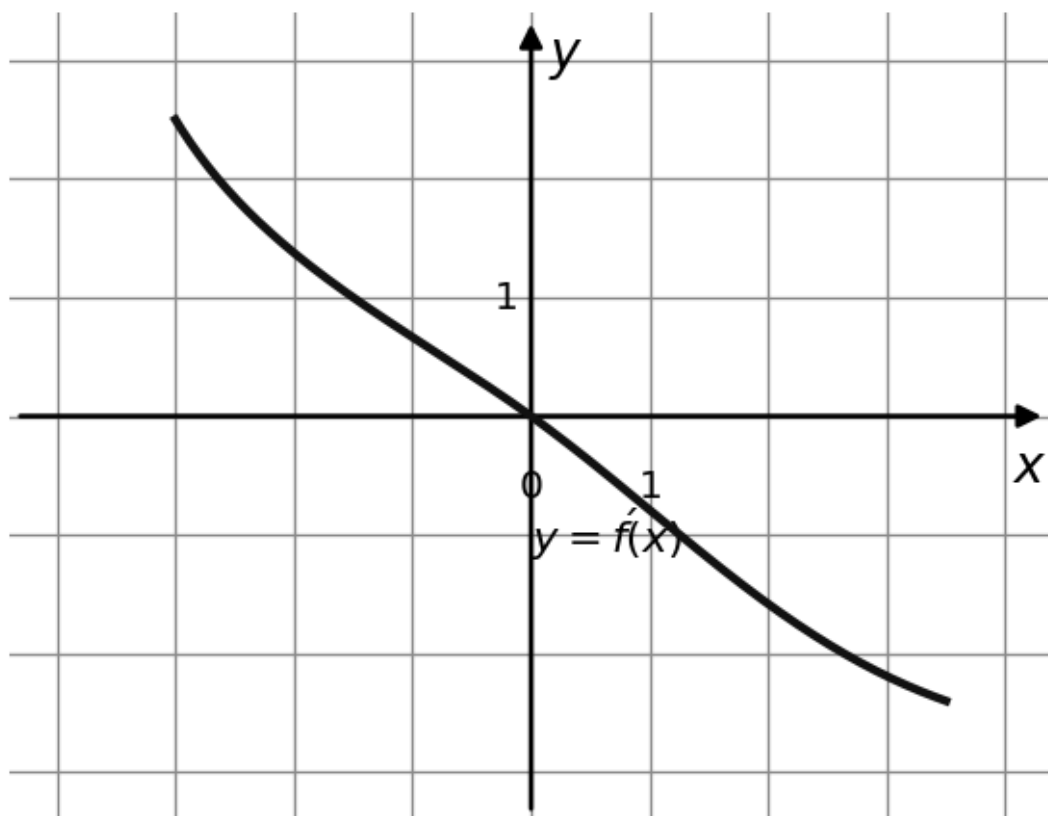
16. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 8$ или совпадает с ней.



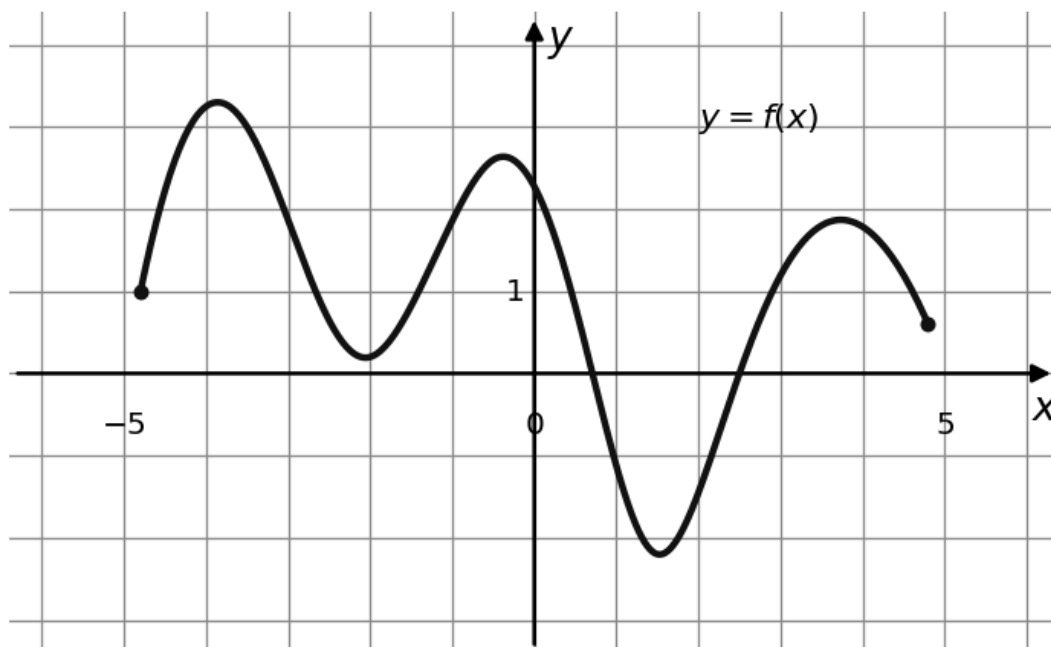
17. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 4x - 1$ или совпадает с ней.



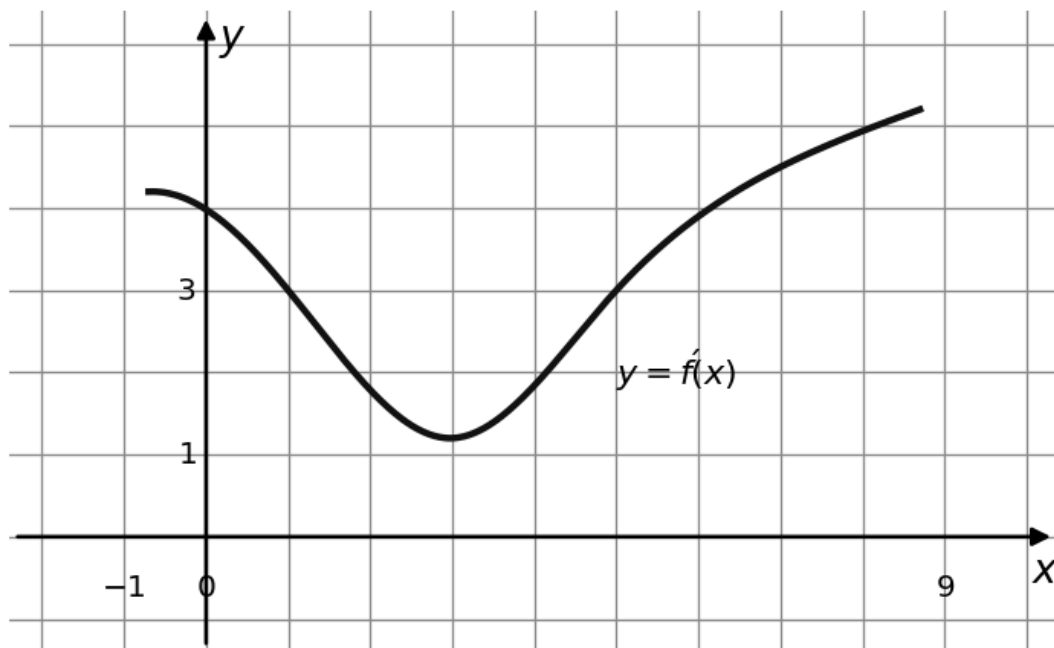
18. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



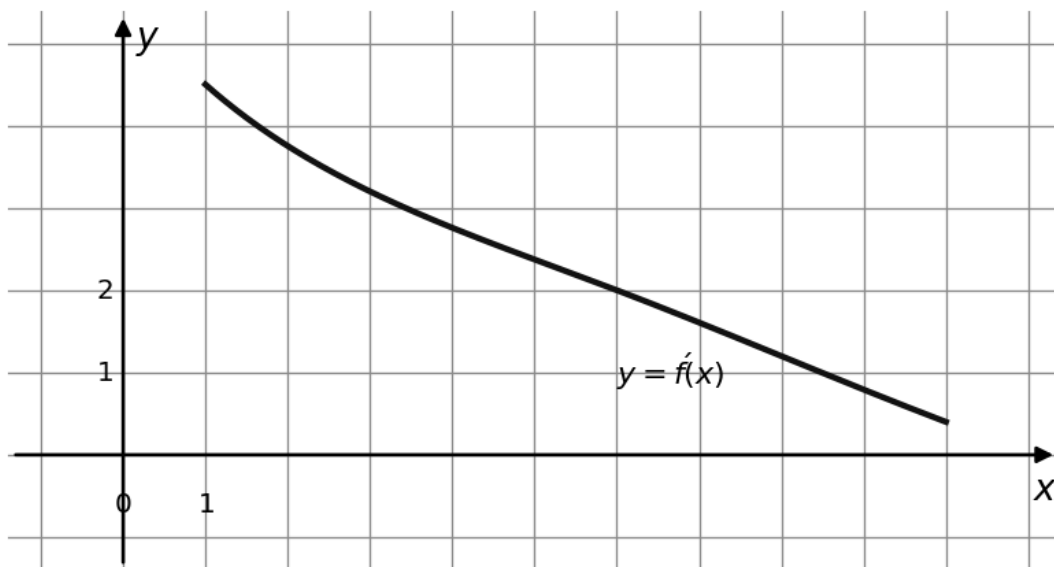
19. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.



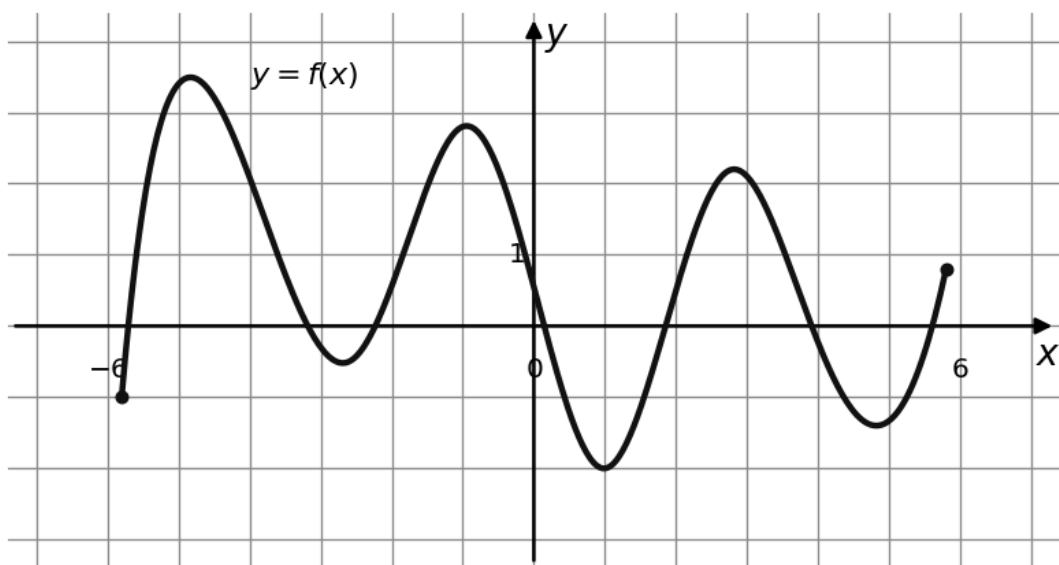
20. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 4$ или совпадает с ней.



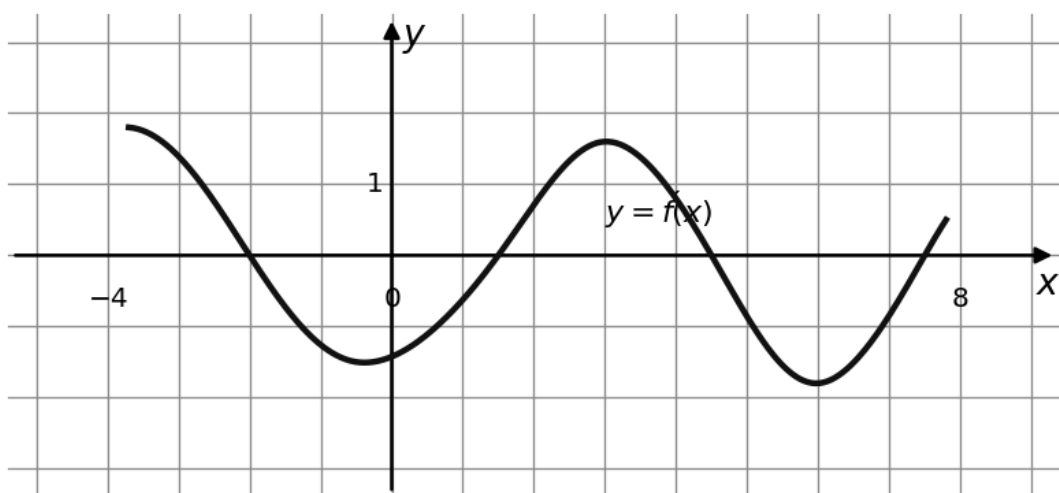
21. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 1$ или совпадает с ней.



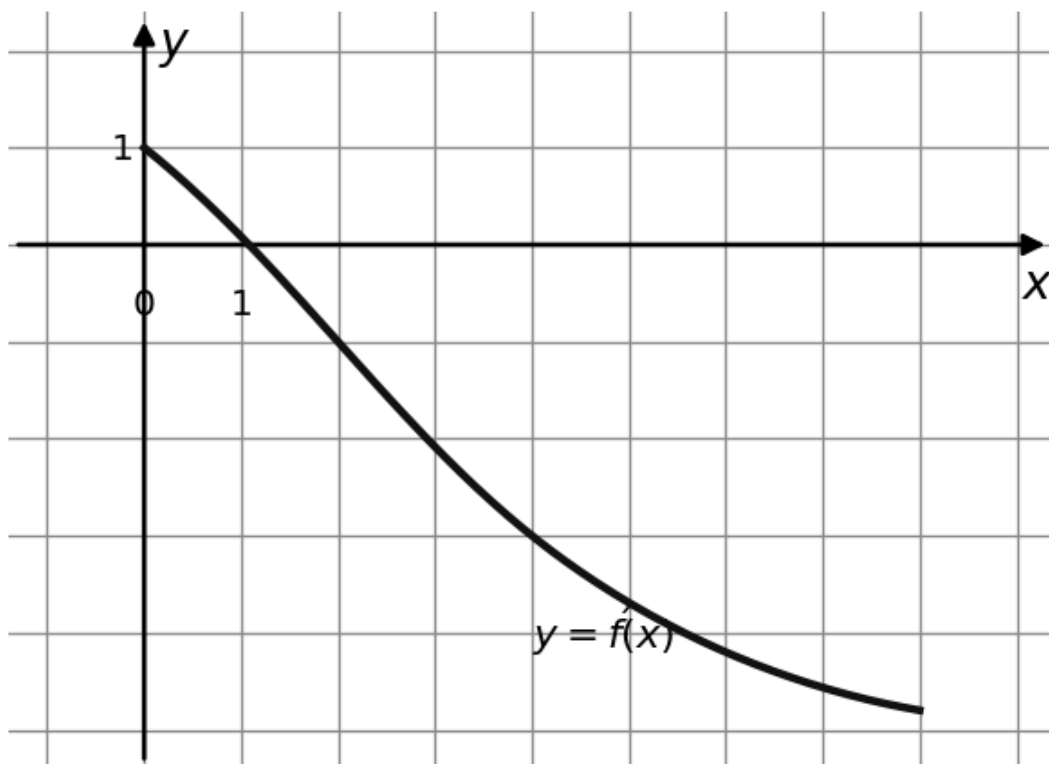
22. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.



23. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



24. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 2$ или совпадает с ней.

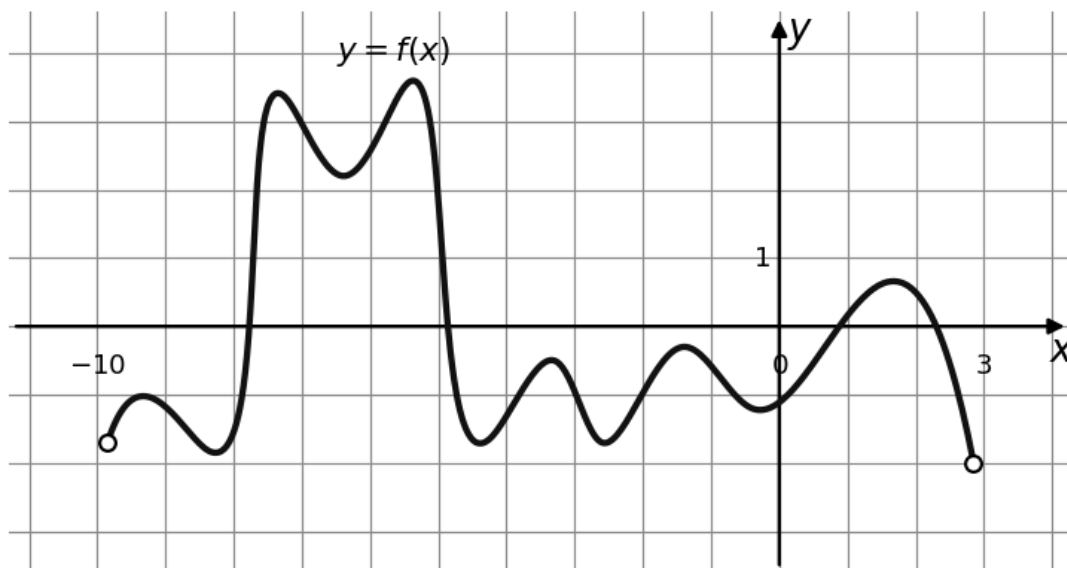


Ответы

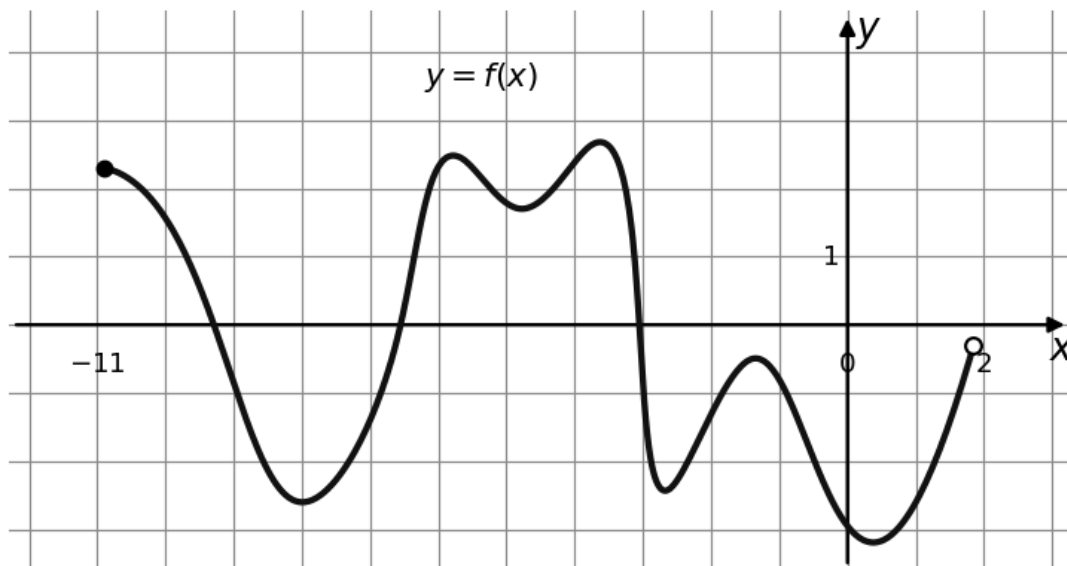
1.	2.	3.	4.	5.	6.
2	0	6	3	4	-3
7.	8.	9.	10.	11.	12.
2	3	5	5	3	2
13.	14.	15.	16.	17.	18.
5	1	3	2	-2	0
19.	20.	21.	22.	23.	24.
4	2	6	5	4	4

Касательная, параллельная прямой. Сравнение $f'(x)$

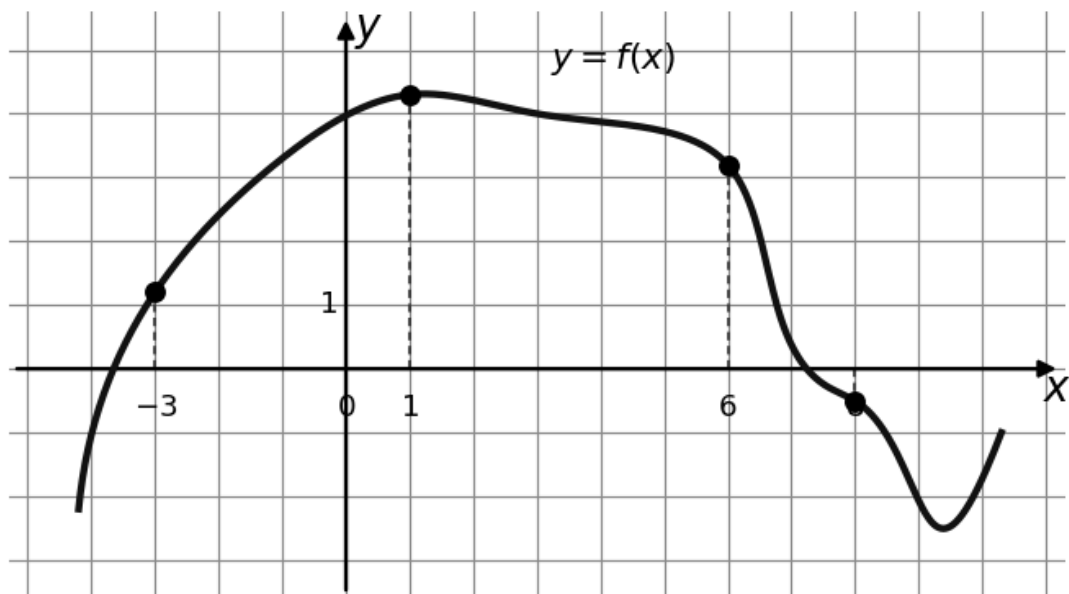
1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.



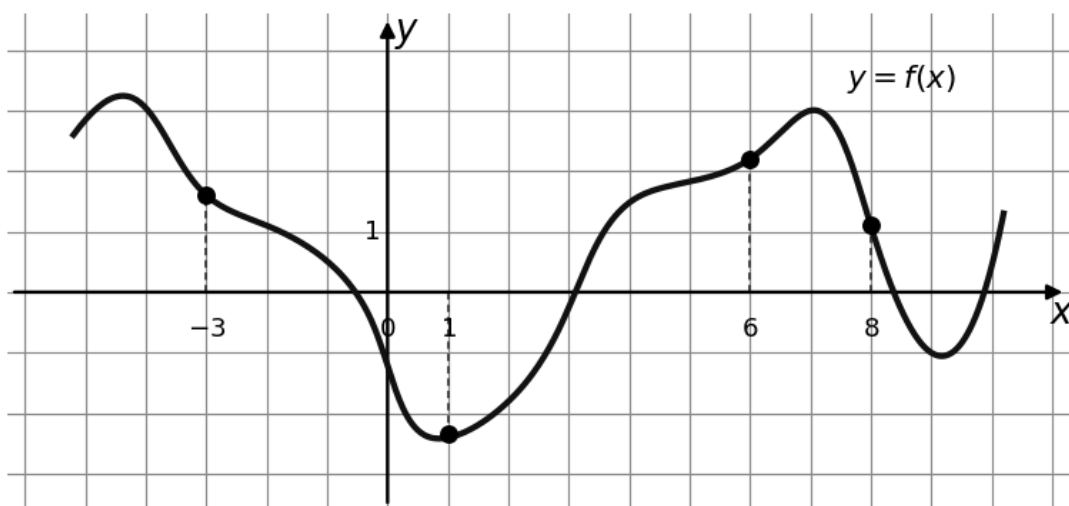
2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.



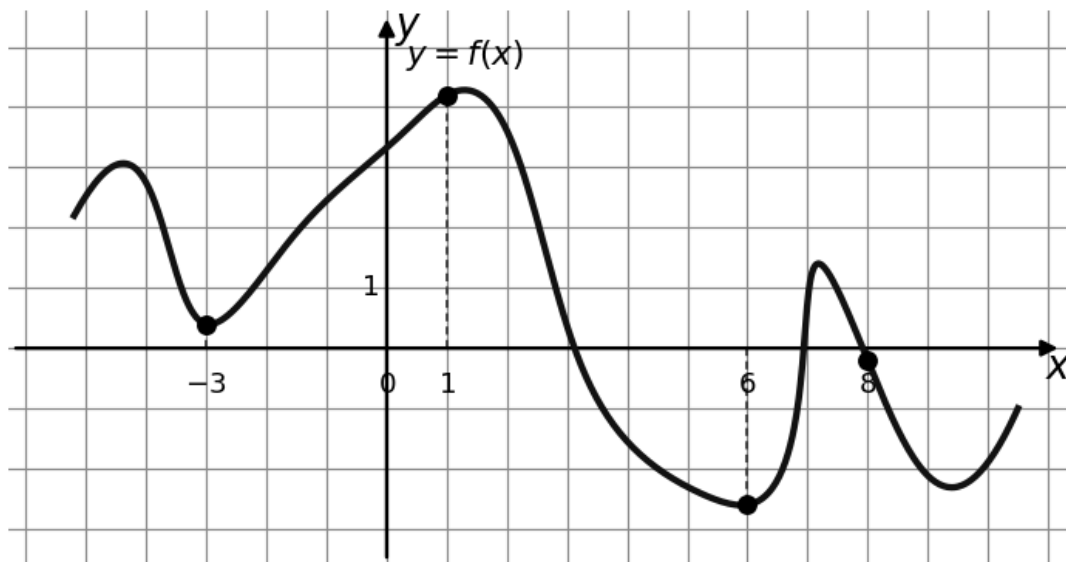
3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3, 1, 6, 8$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



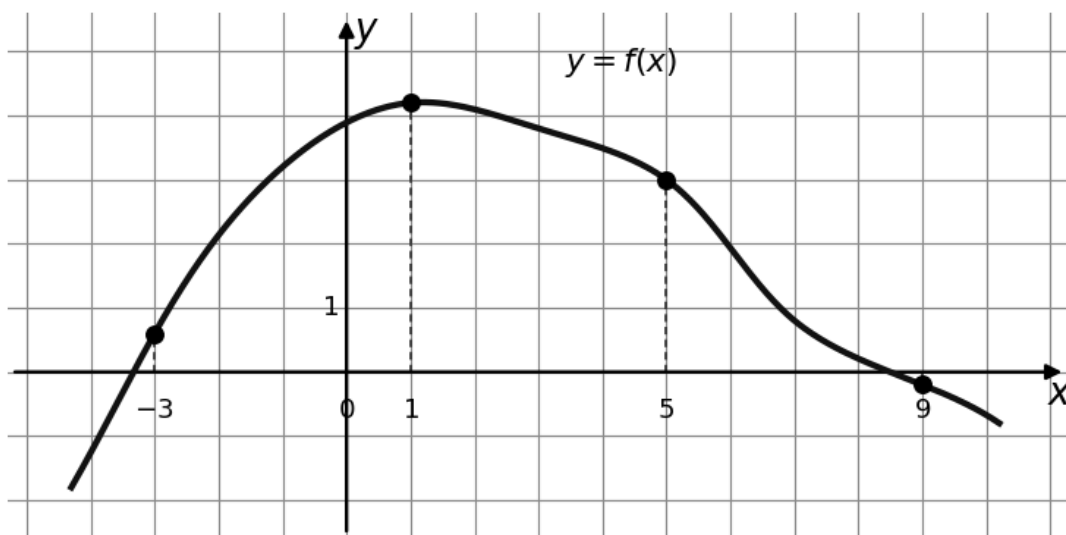
4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3, 1, 6, 8$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



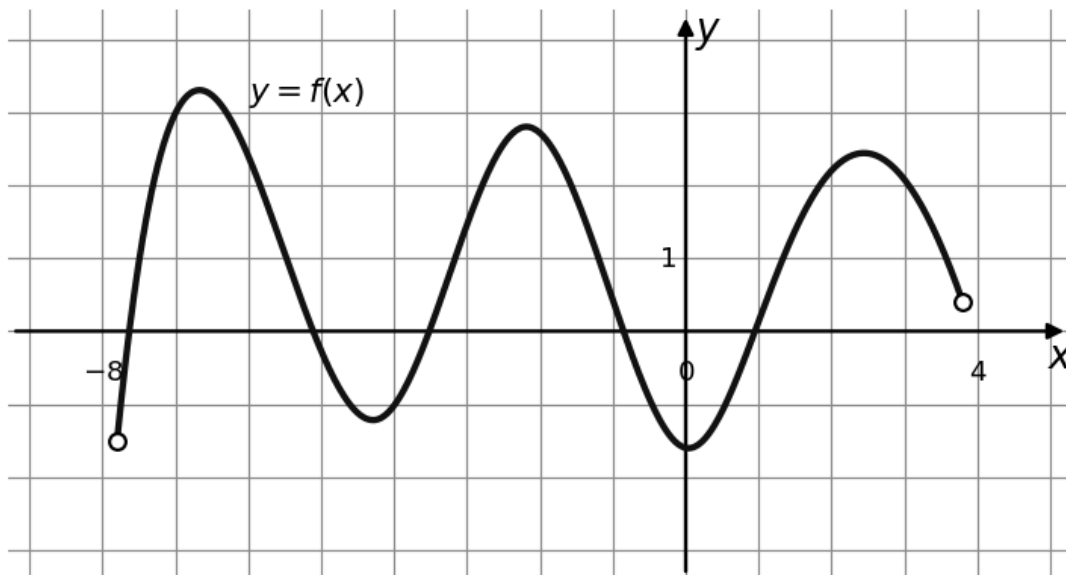
5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3, 1, 6, 8$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



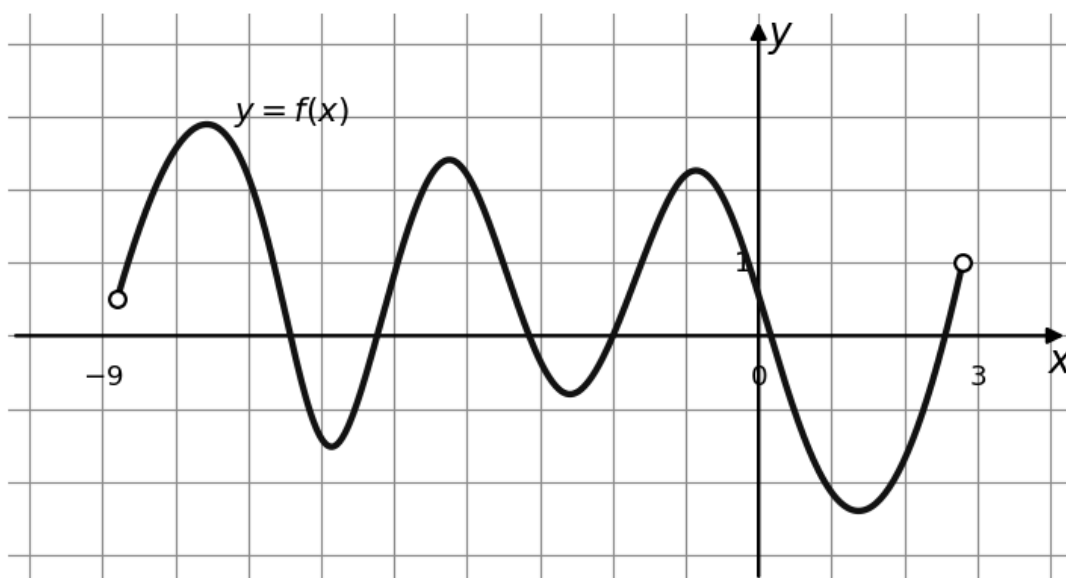
6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3, 1, 5, 9$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



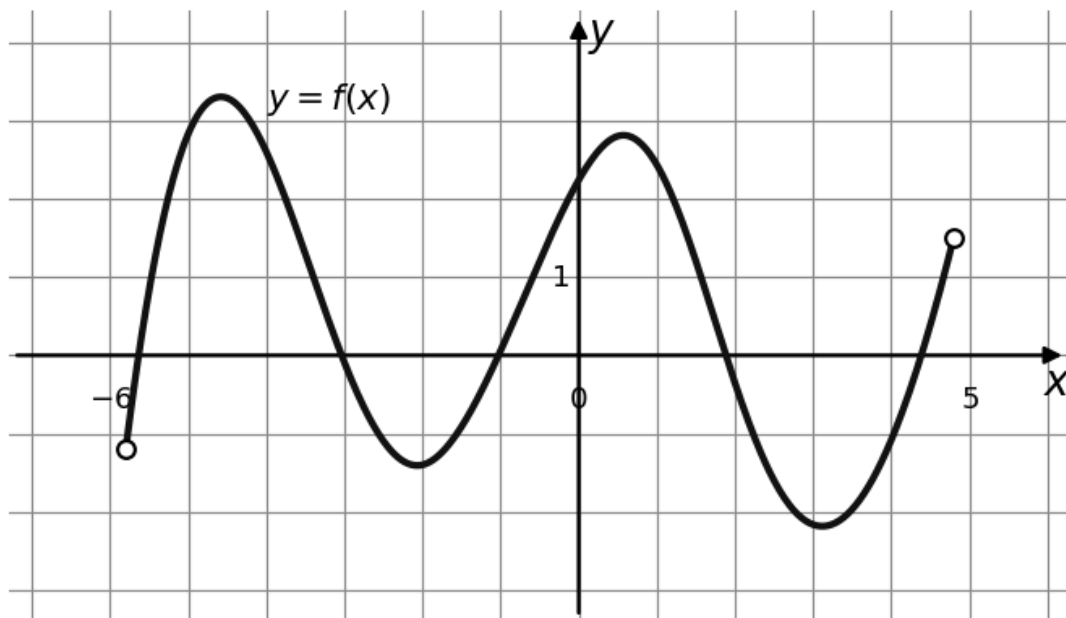
7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2$.



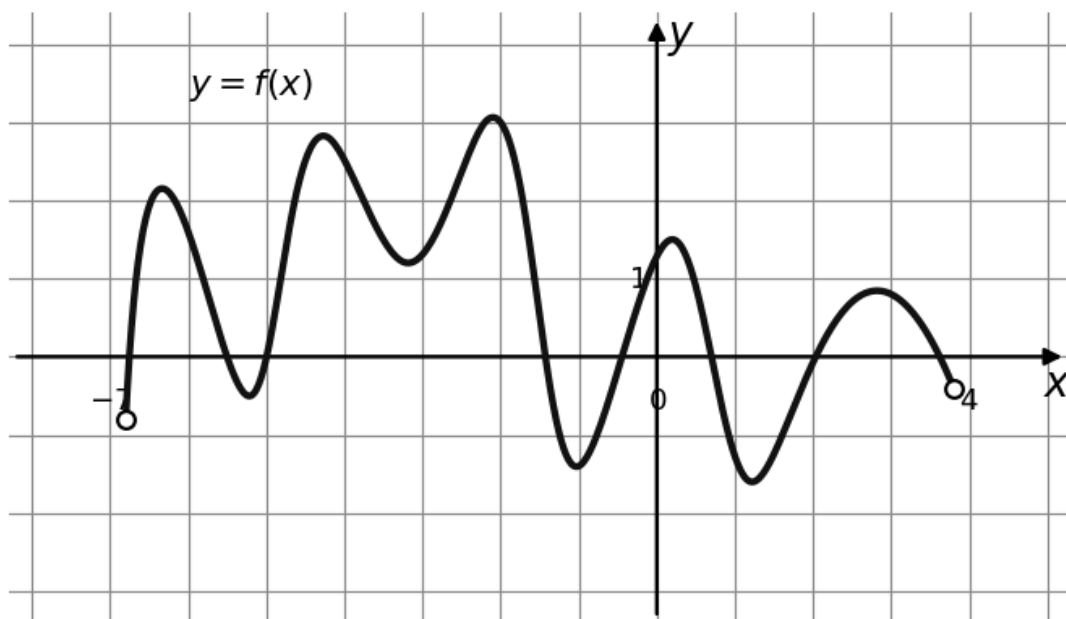
8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.



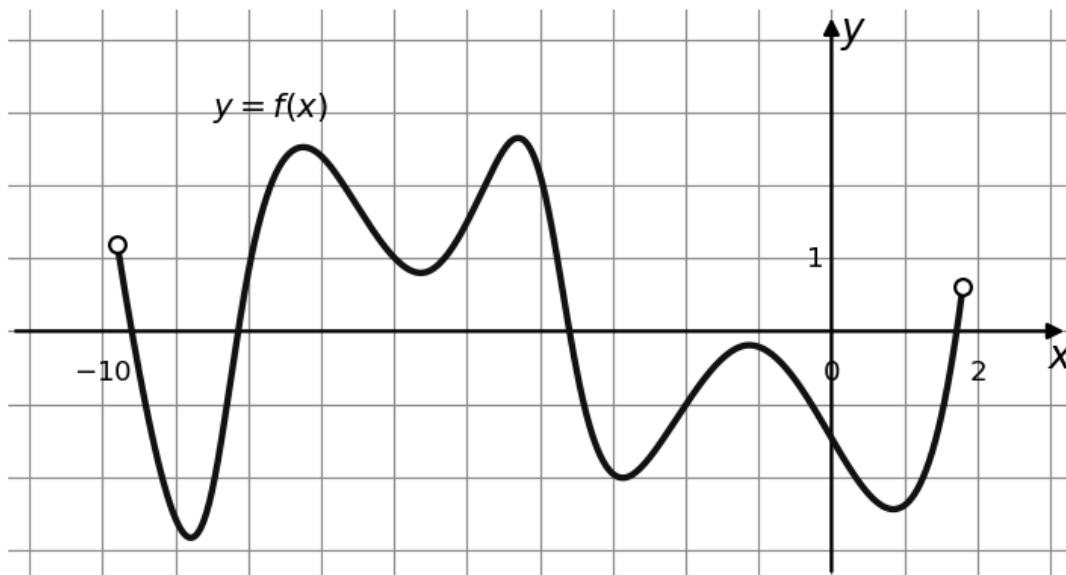
9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -4$.



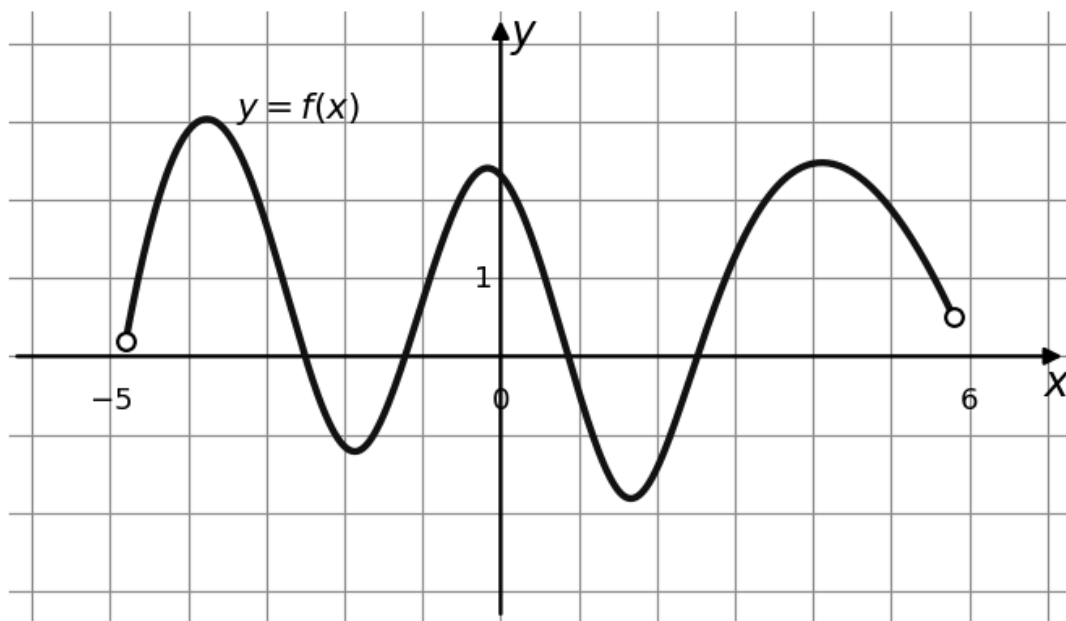
10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 5$.



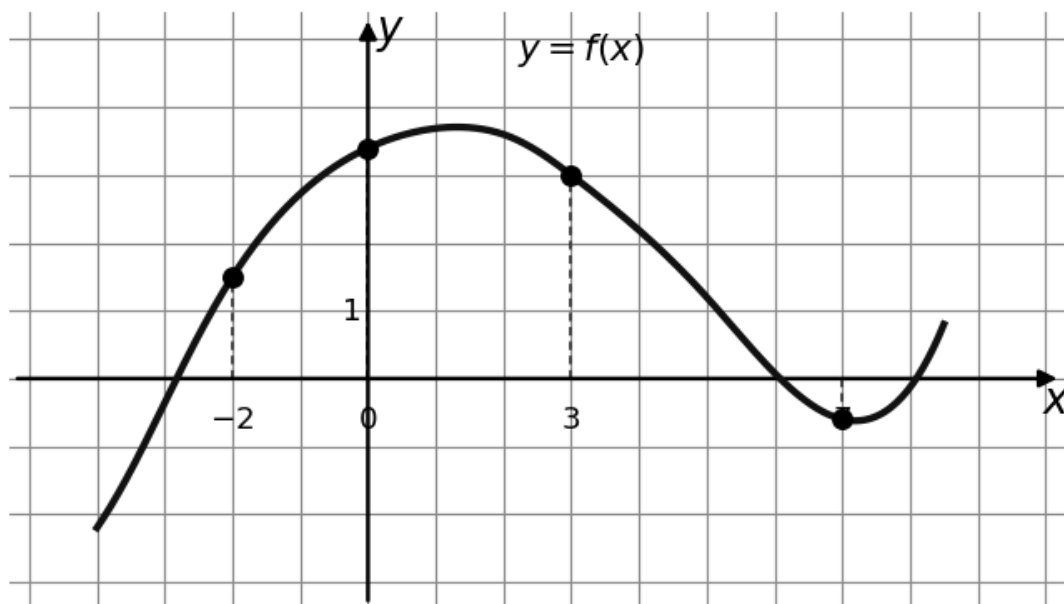
11. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.



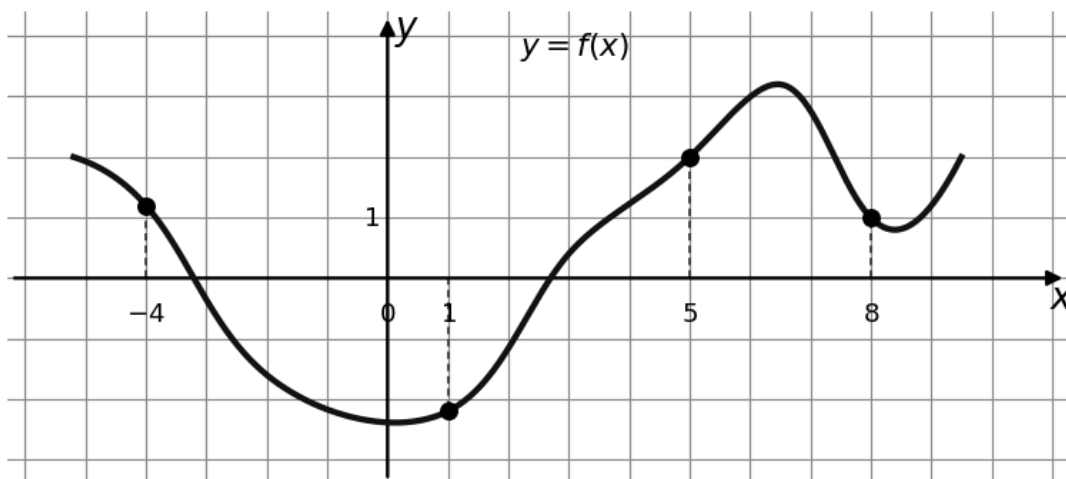
12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -1$.



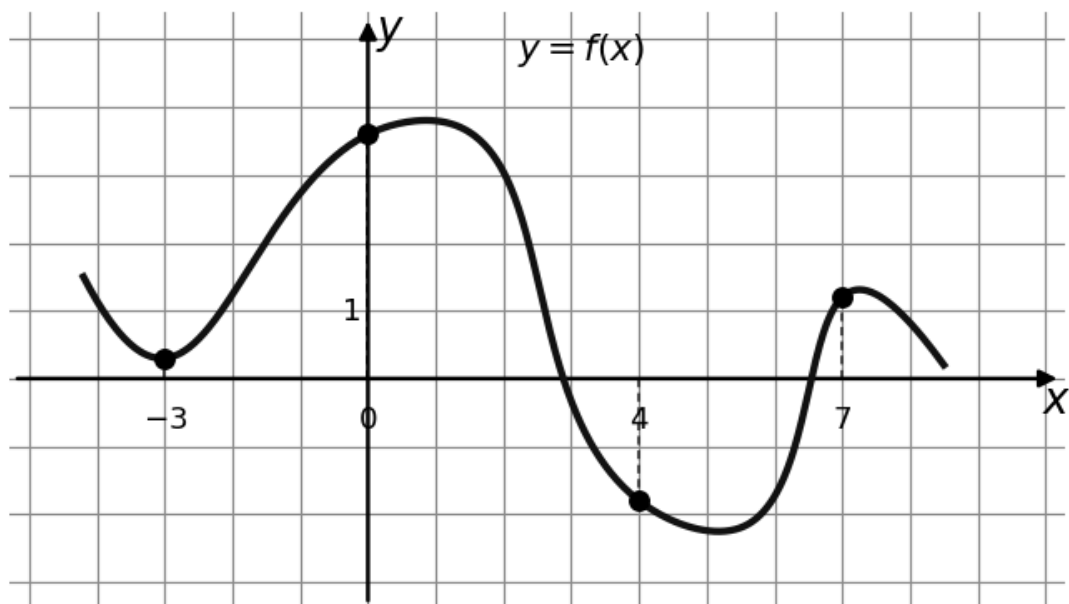
13. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2, 0, 3, 7$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



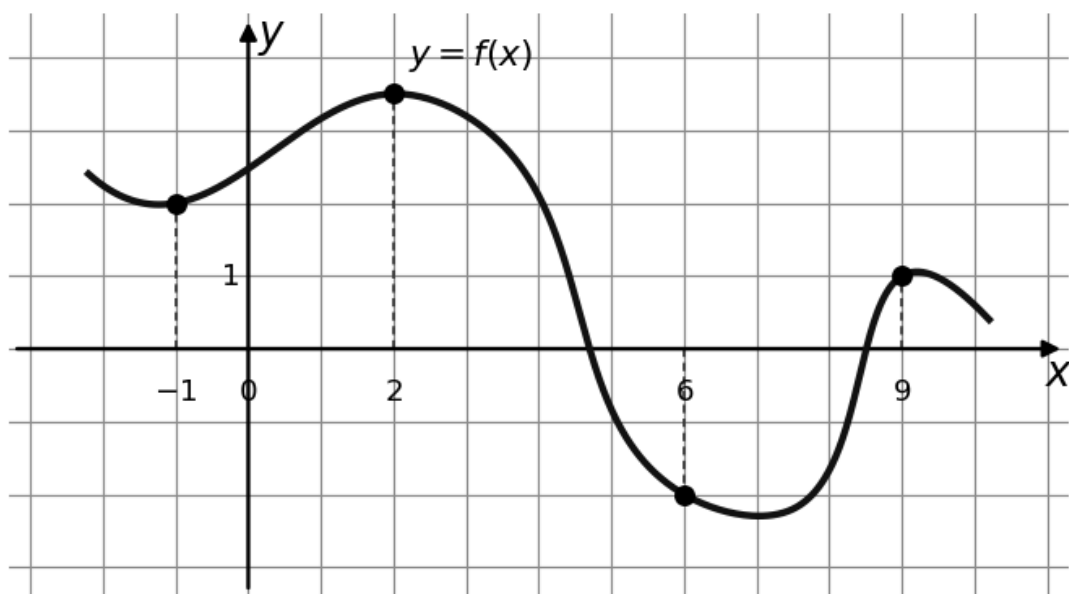
14. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-4, 1, 5, 8$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



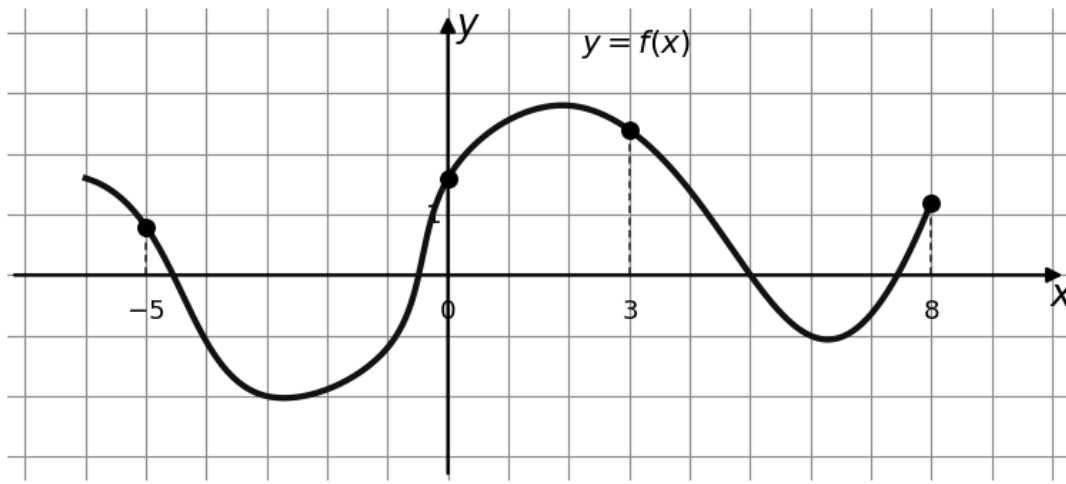
15. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3, 0, 4, 7$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



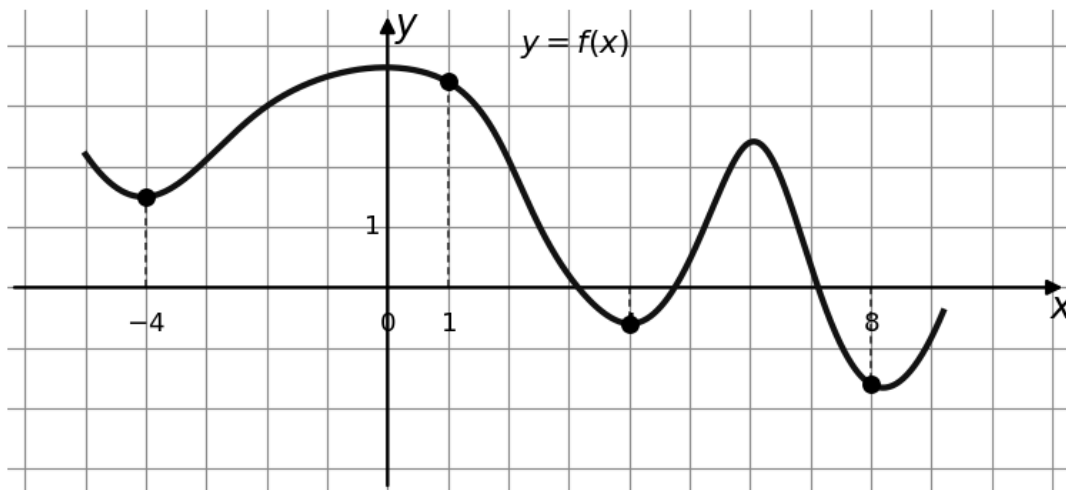
16. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-1, 2, 6, 9$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



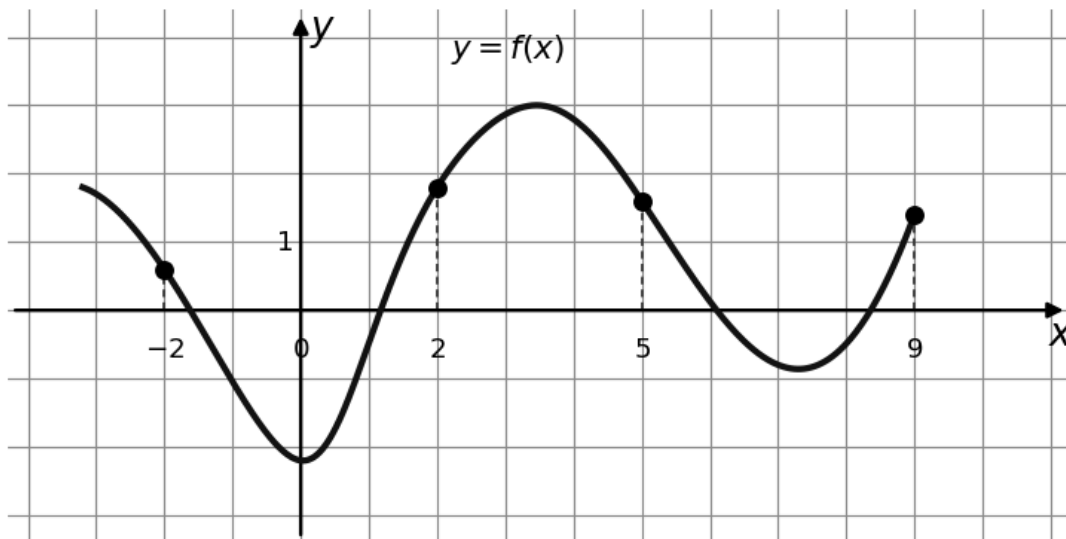
17. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, 0, 3, 8$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



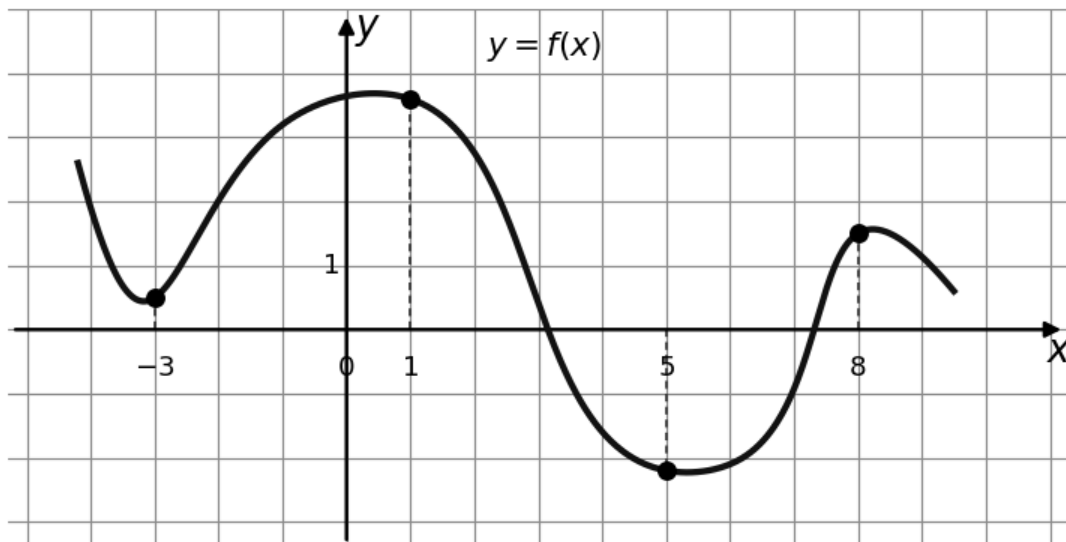
18. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-4, 1, 4, 8$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



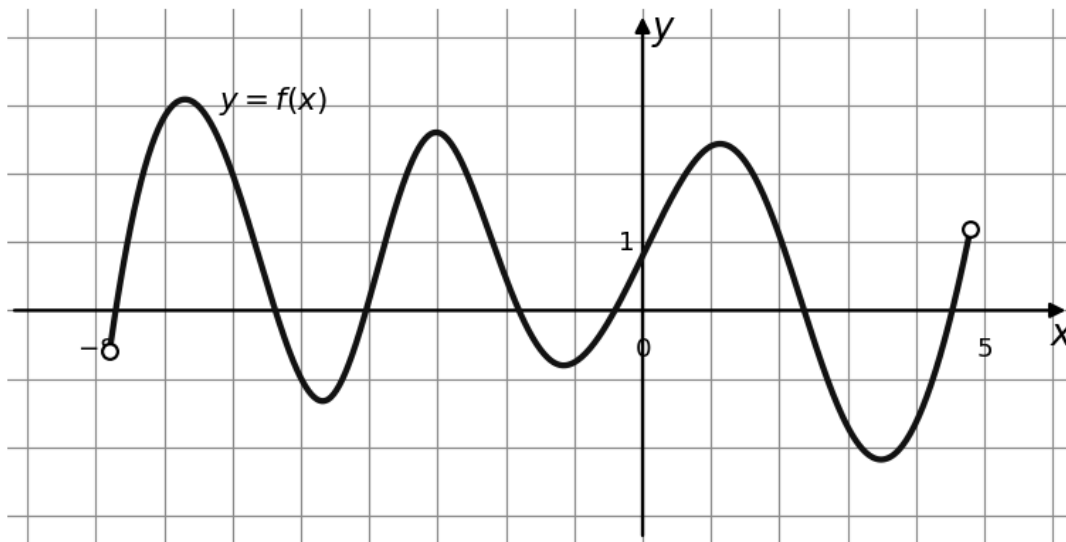
19. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2, 2, 5, 9$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



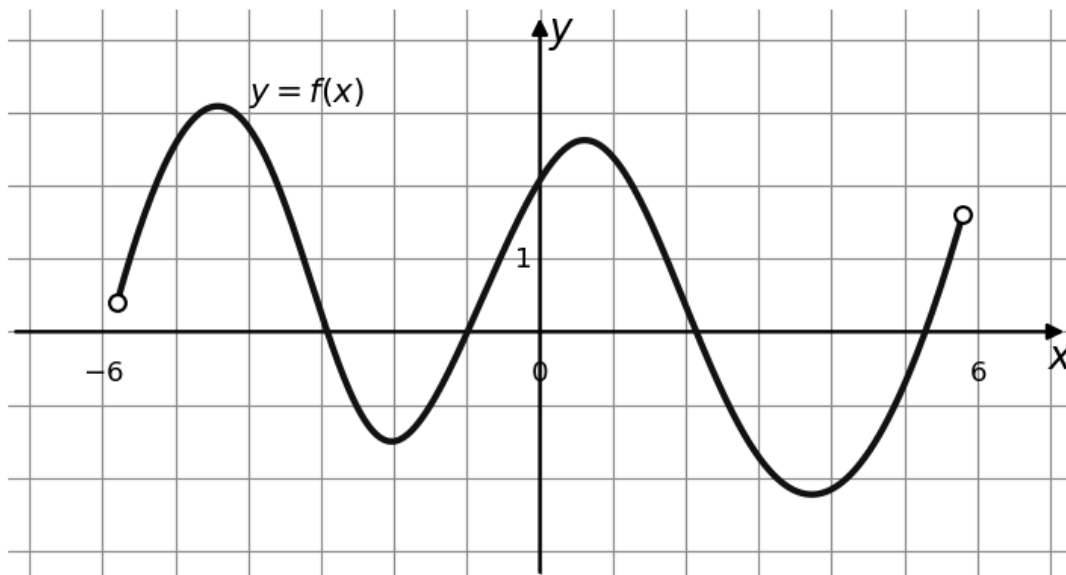
20. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3, 1, 5, 8$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



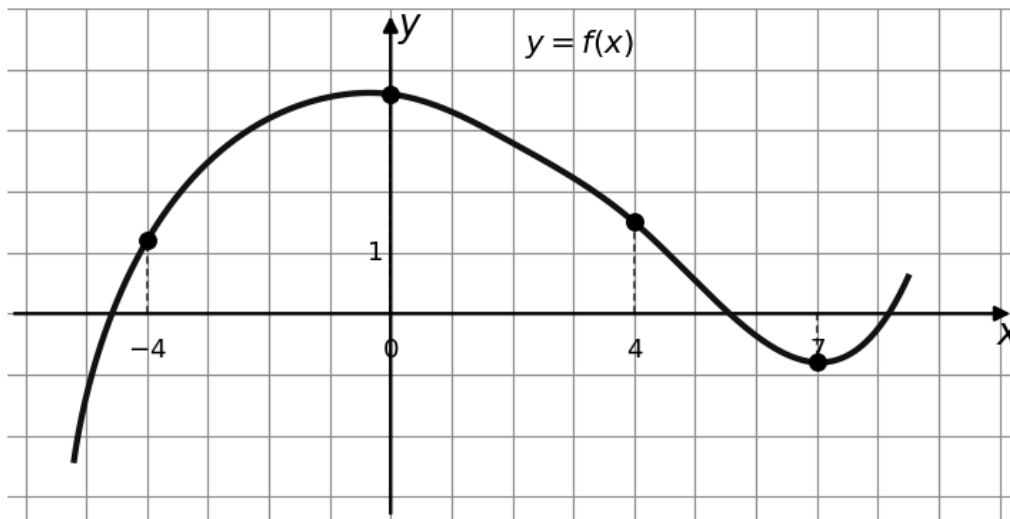
21. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.



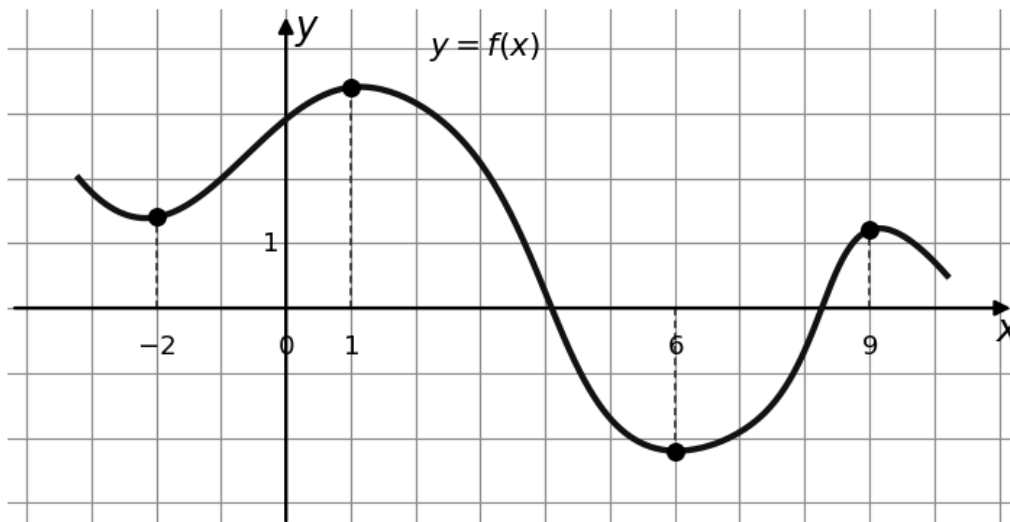
22. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$.



23. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-4, 0, 4, 7$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



24. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2, 1, 6, 9$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

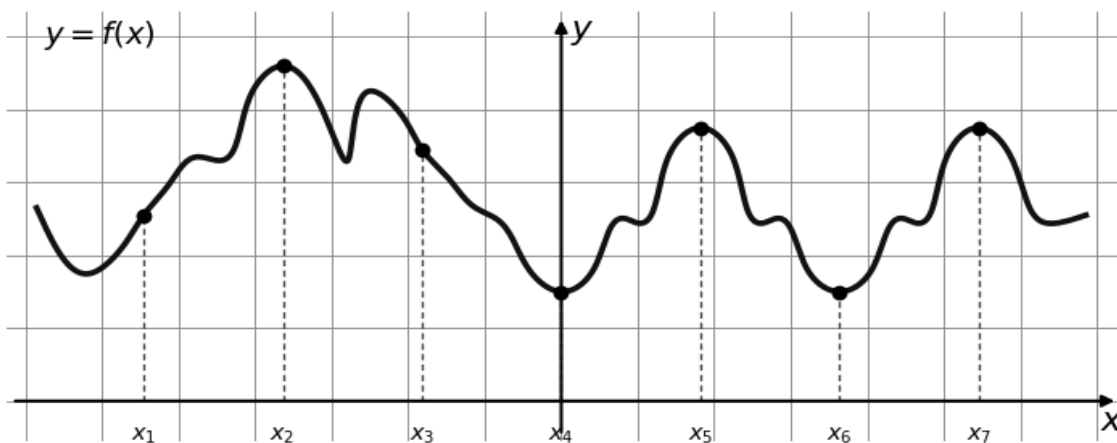


Ответы

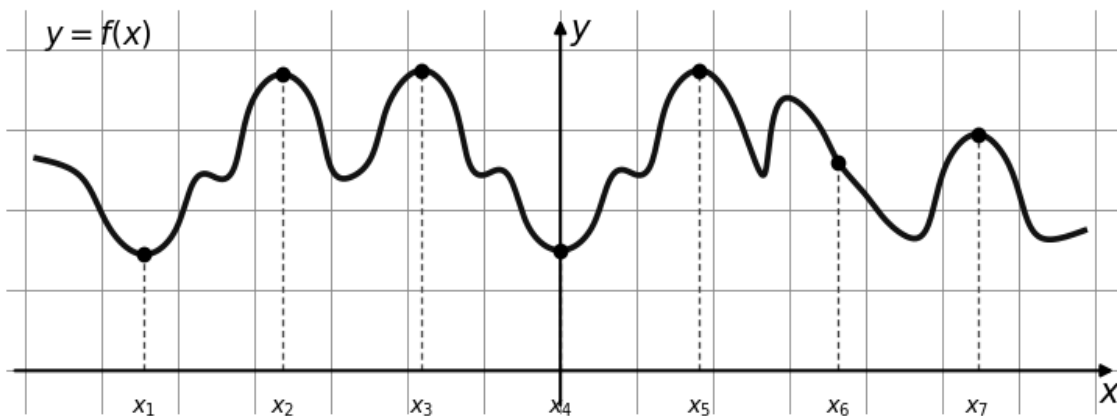
1.	2.	3.	4.	5.	6.
11	7	-3	6	8	5
7.	8.	9.	10.	11.	12.
5	7	5	9	7	5
13.	14.	15.	16.	17.	18.
-2	5	4	6	0	8
19.	20.	21.	22.	23.	24.
2	5	6	4	-4	6

Знак производной. Возрастание и убывание. Экстремумы

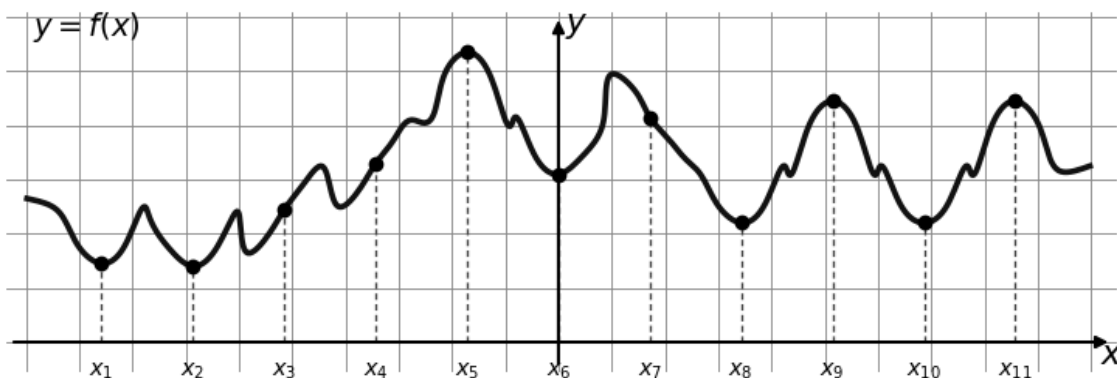
1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



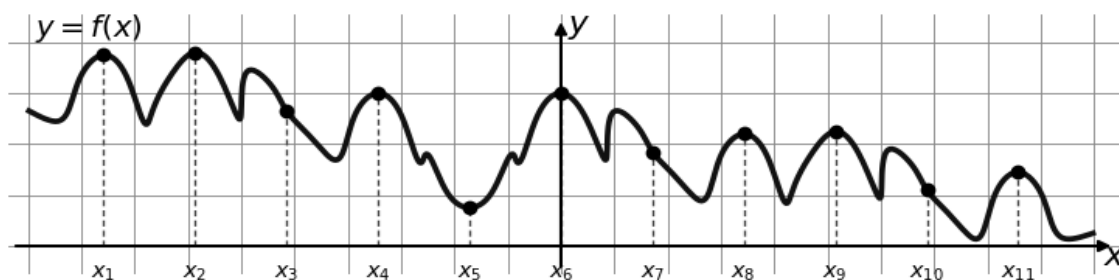
2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



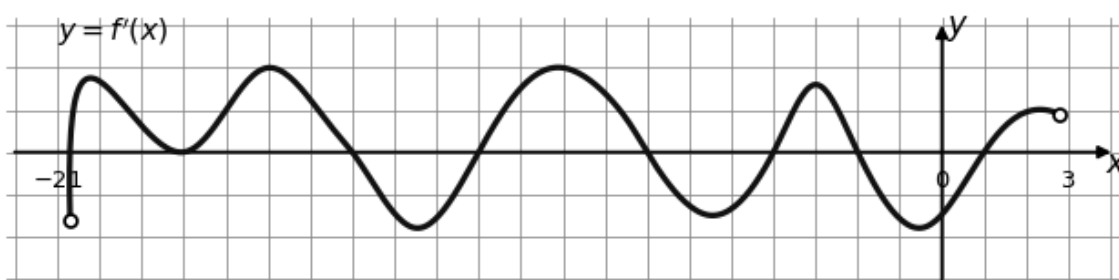
3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



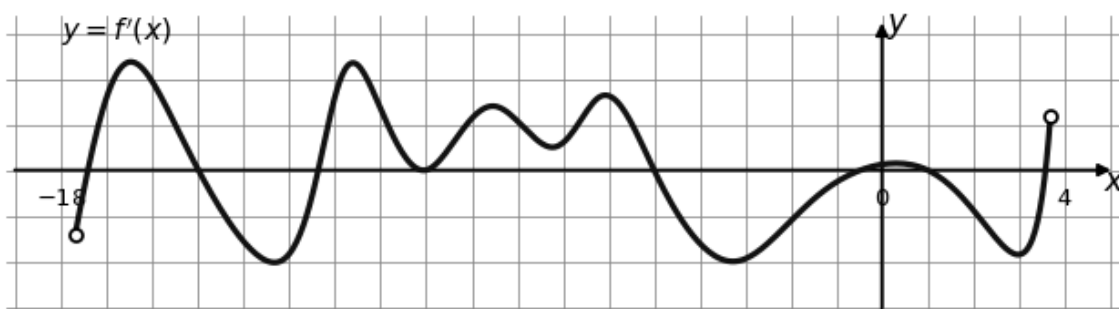
4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



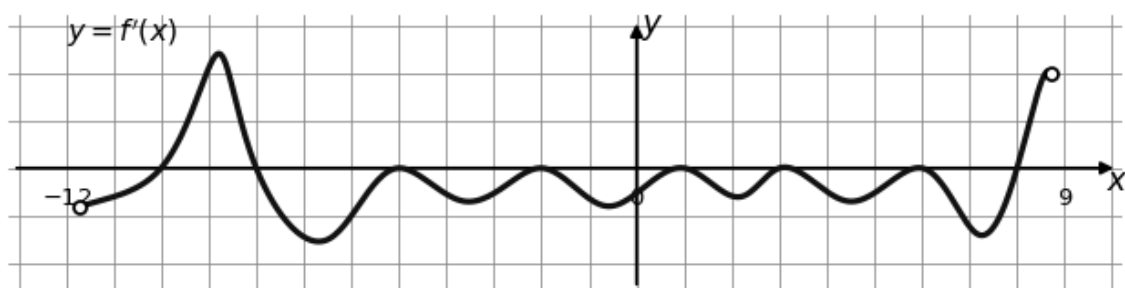
5. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-21; 3)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-20; -1]$.



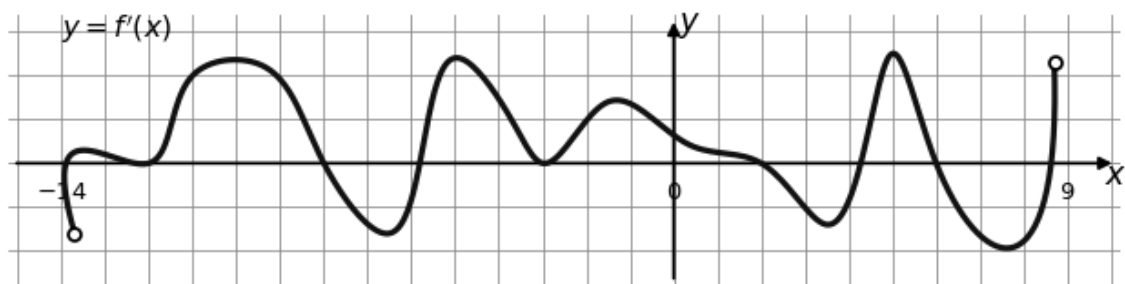
6. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-18; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16; 2]$.



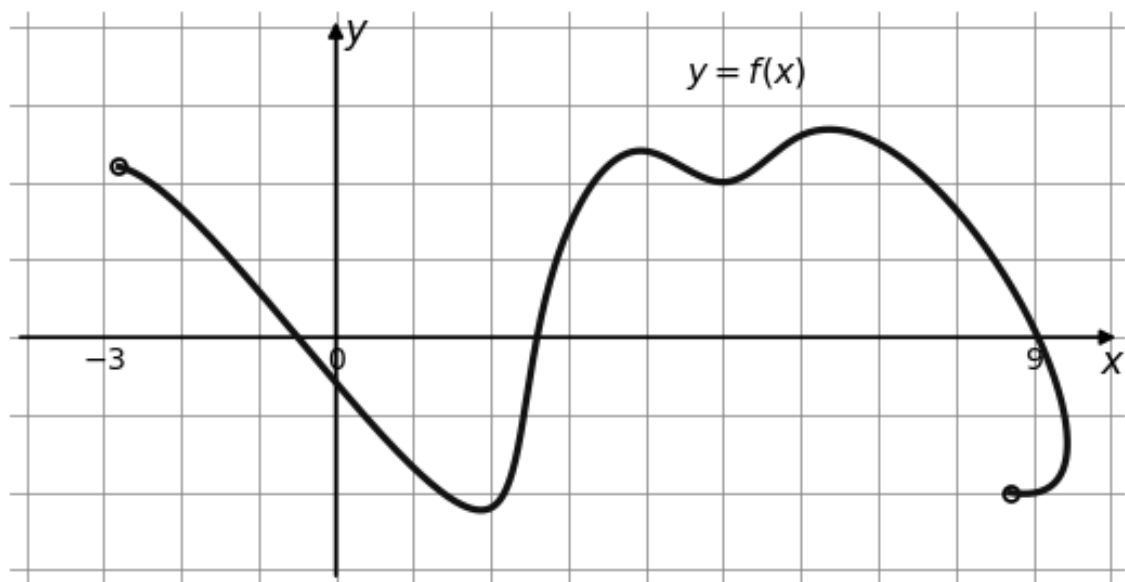
7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 8]$.



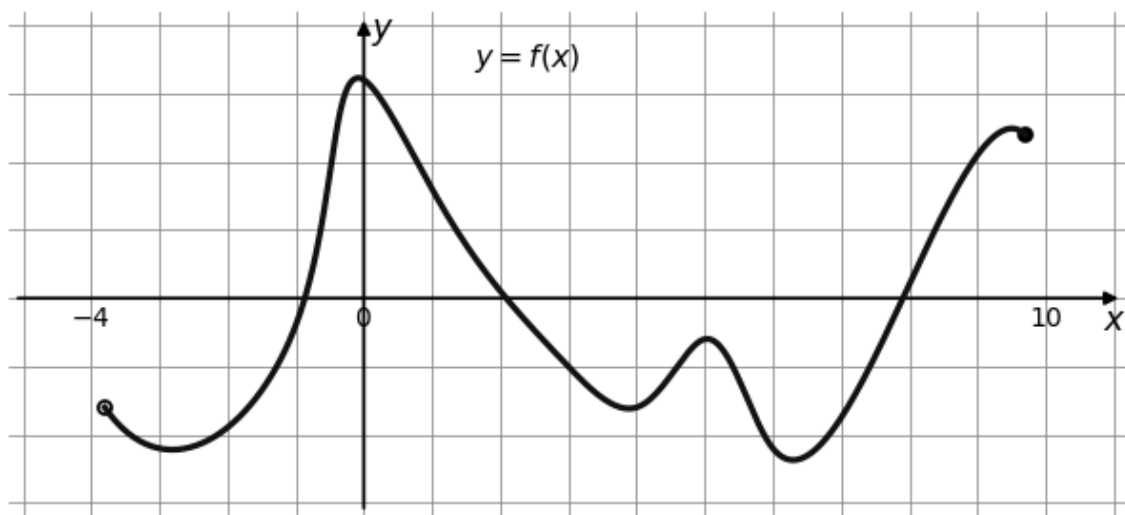
8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 7]$.



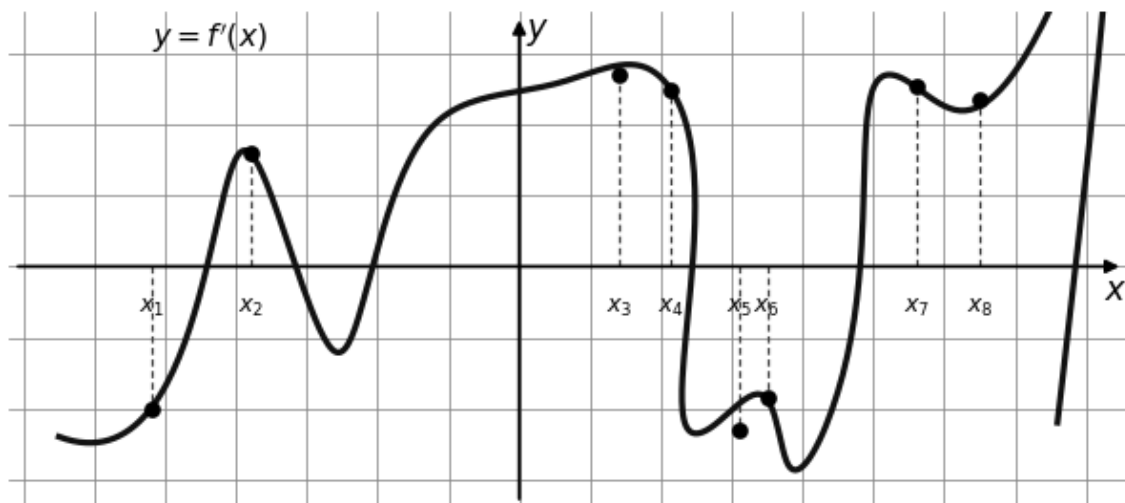
9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 9)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ положительна.



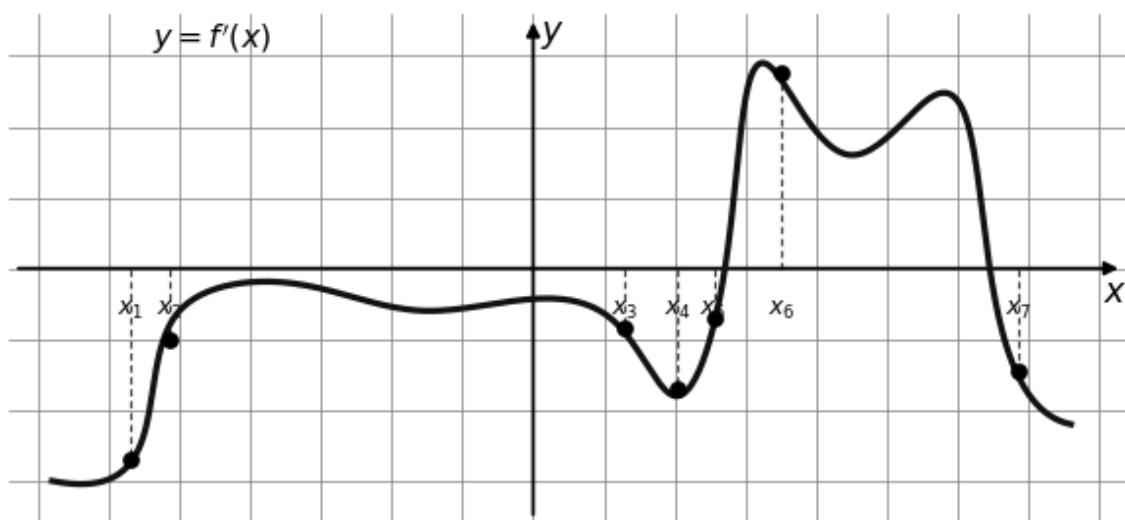
10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



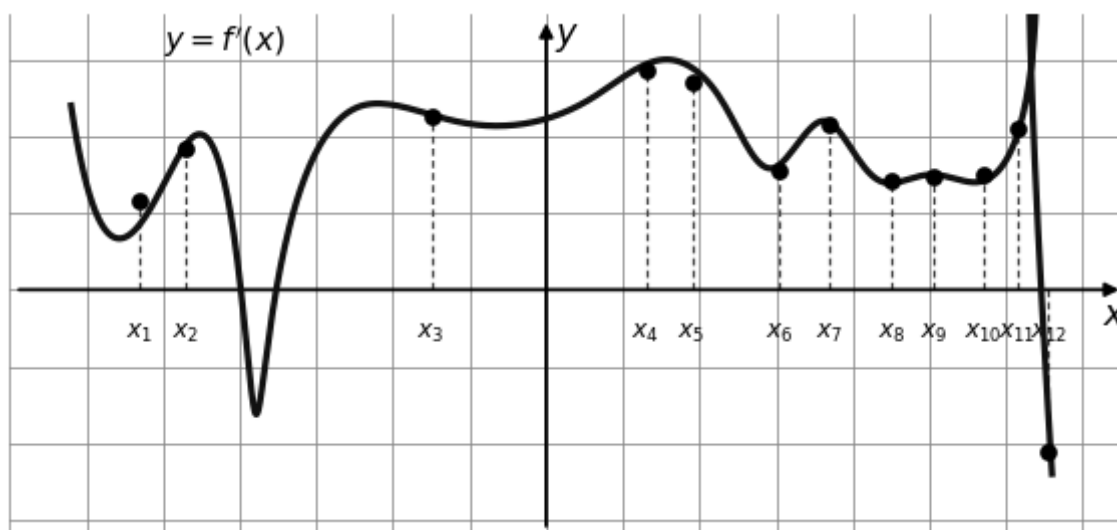
11. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



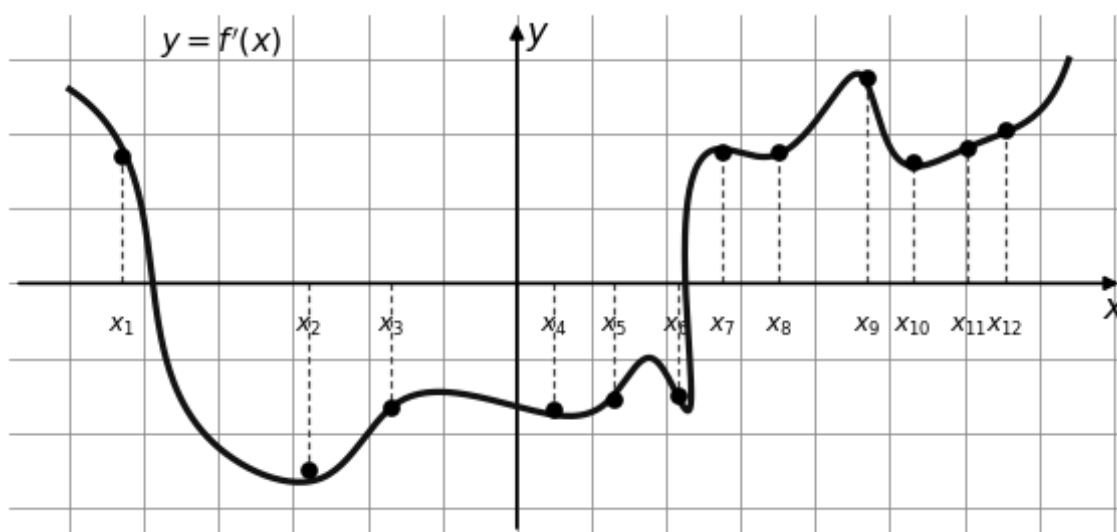
12. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



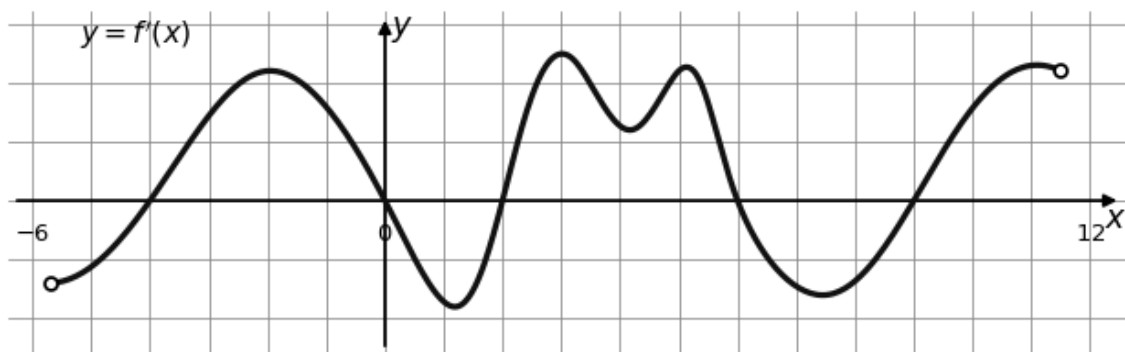
13. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



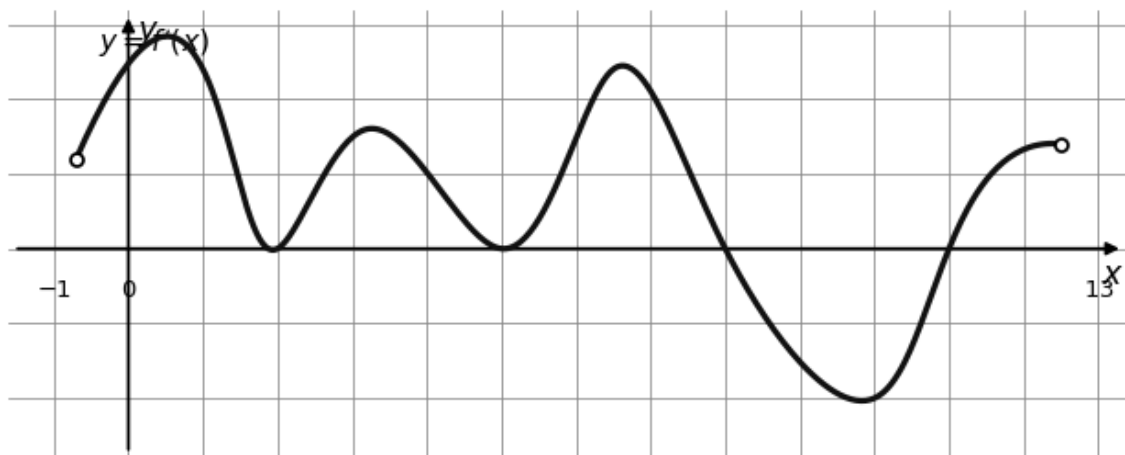
14. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



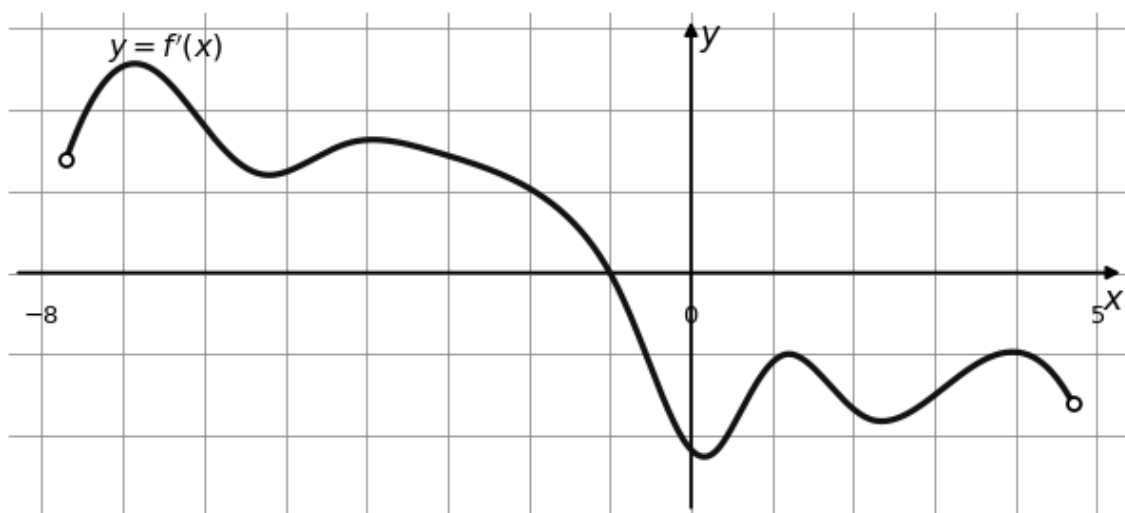
15. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



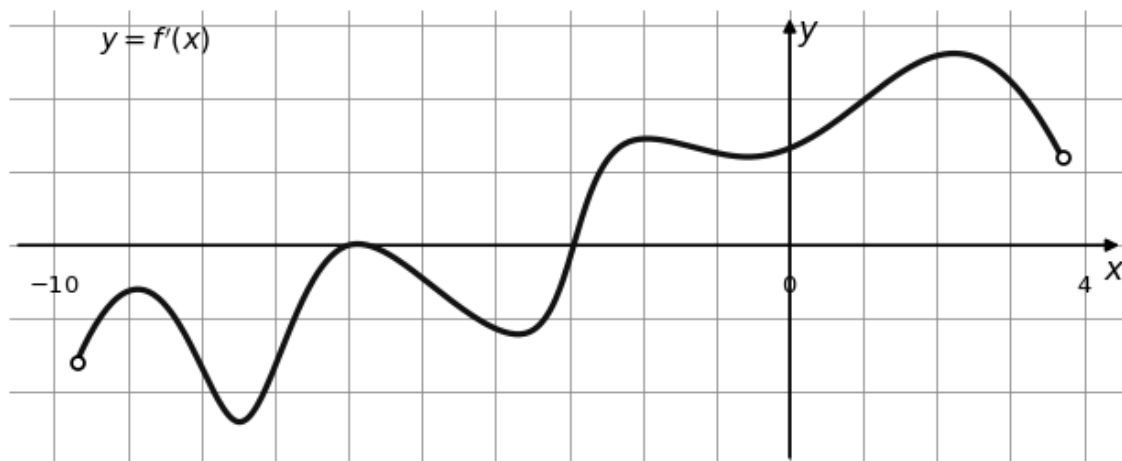
16. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



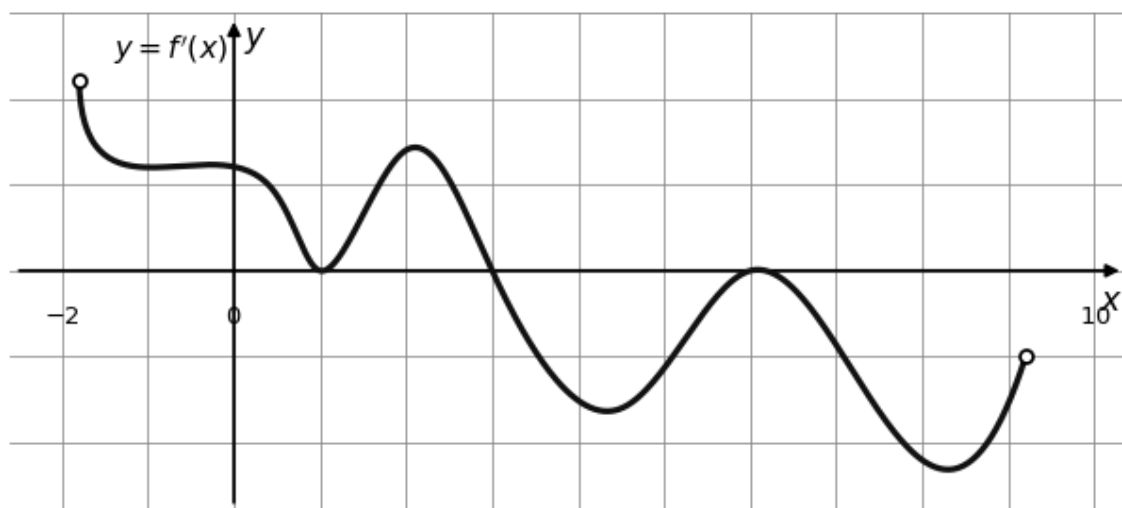
17. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



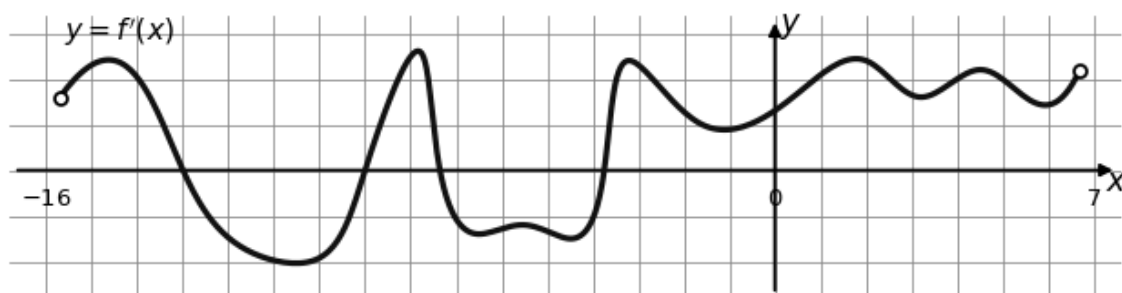
18. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 4)$. В какой точке отрезка $[-8; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



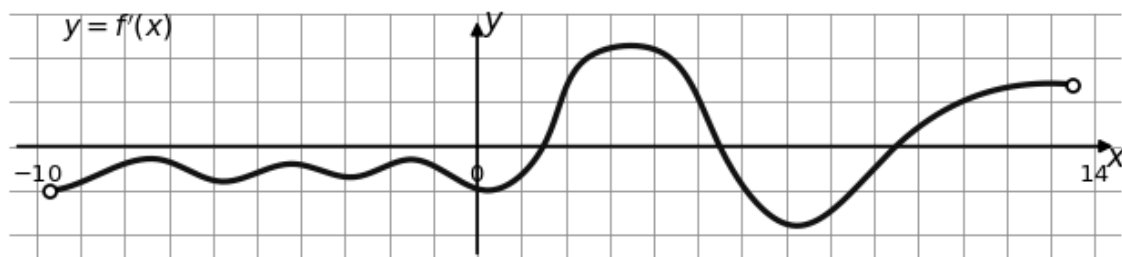
19. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-1; 9)$.



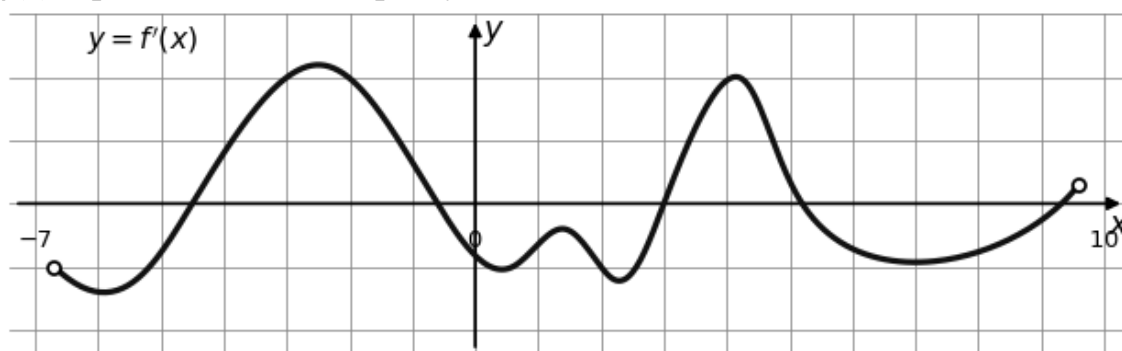
20. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-16; 7)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-15; 6]$.



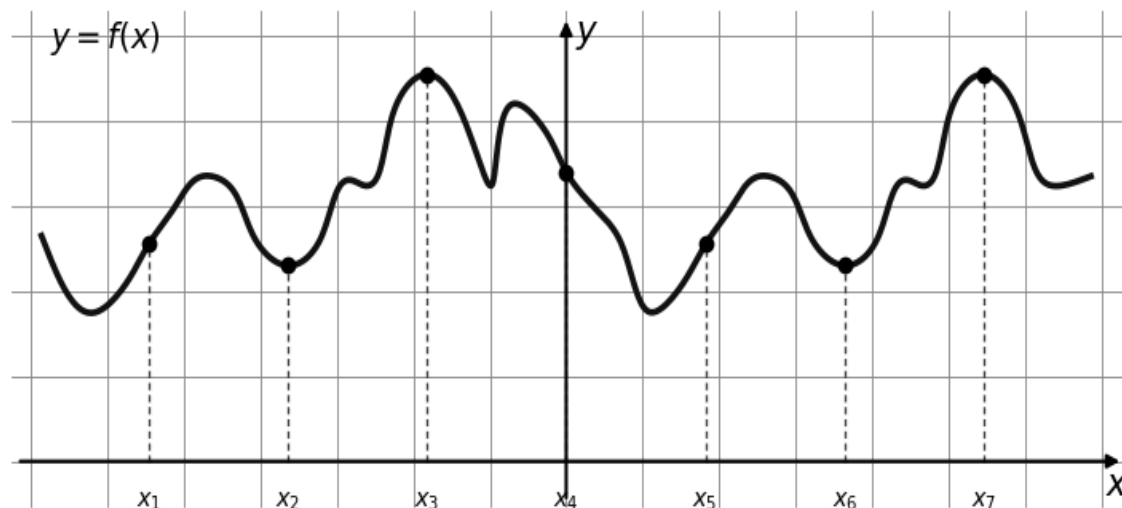
21. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 11]$.



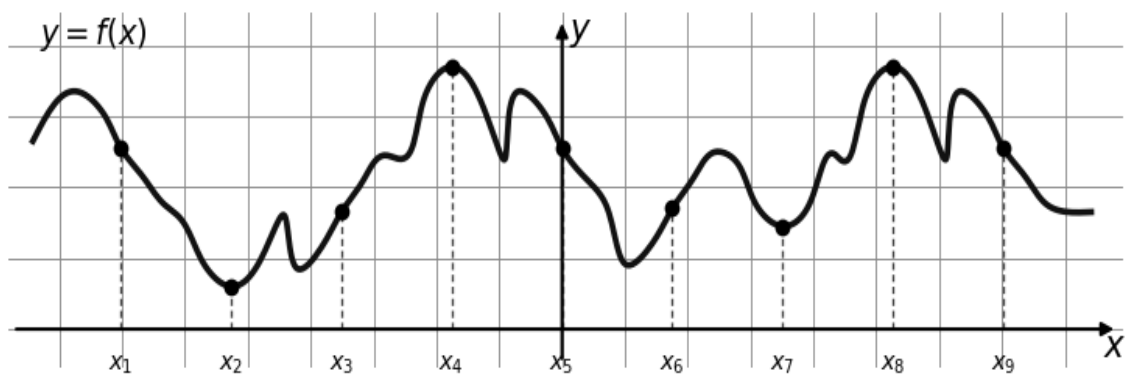
22. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 10)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 5]$.



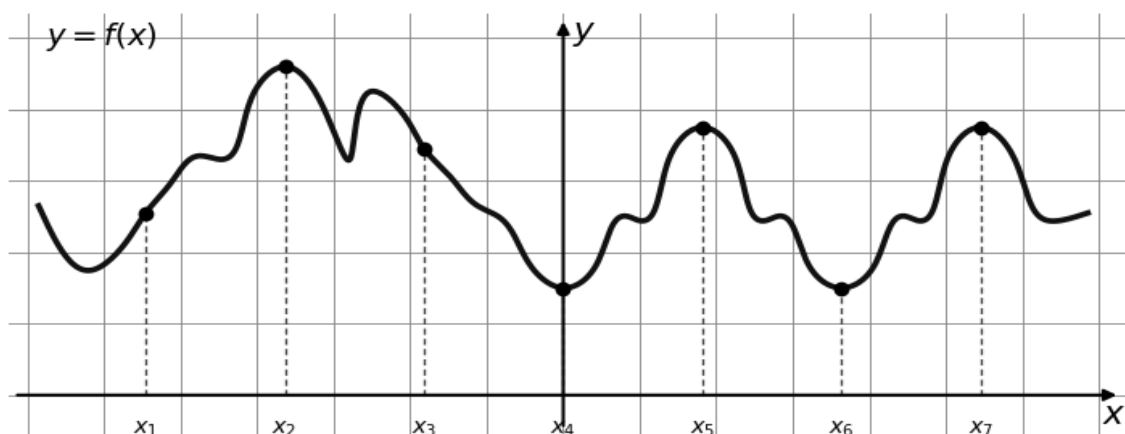
23. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



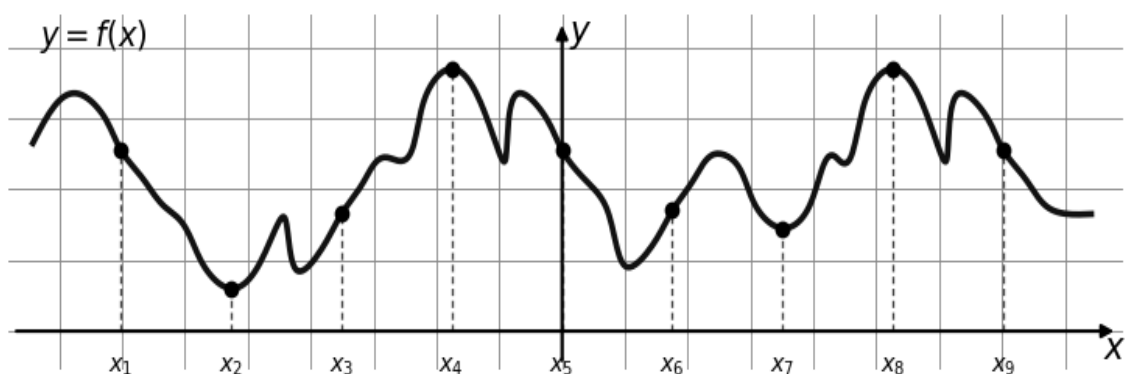
24. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



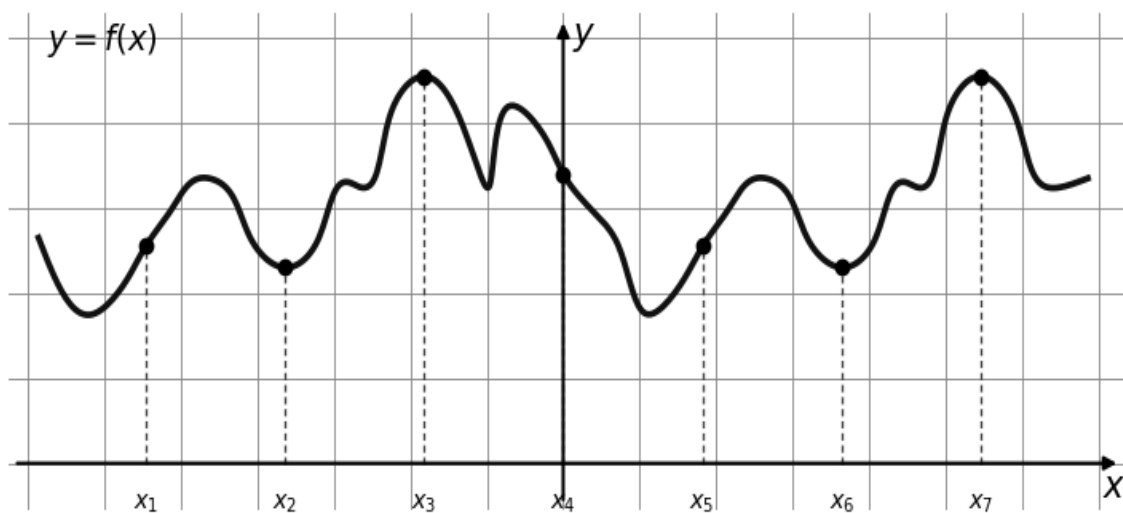
25. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



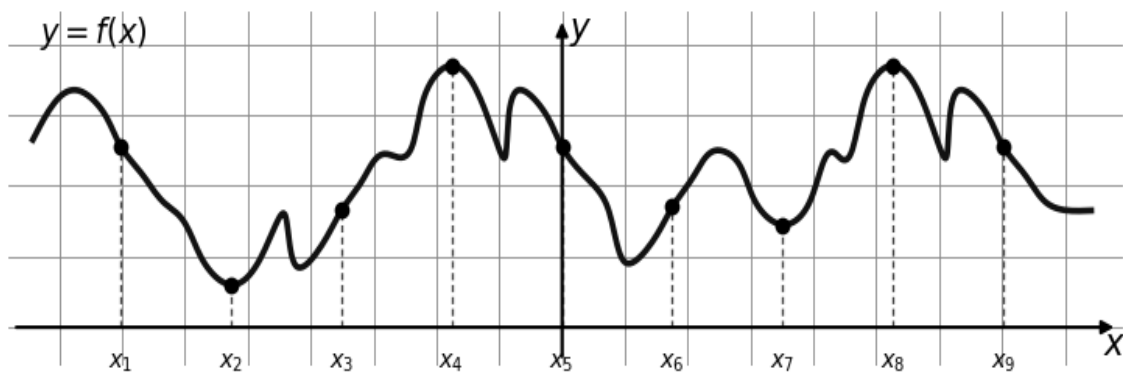
26. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



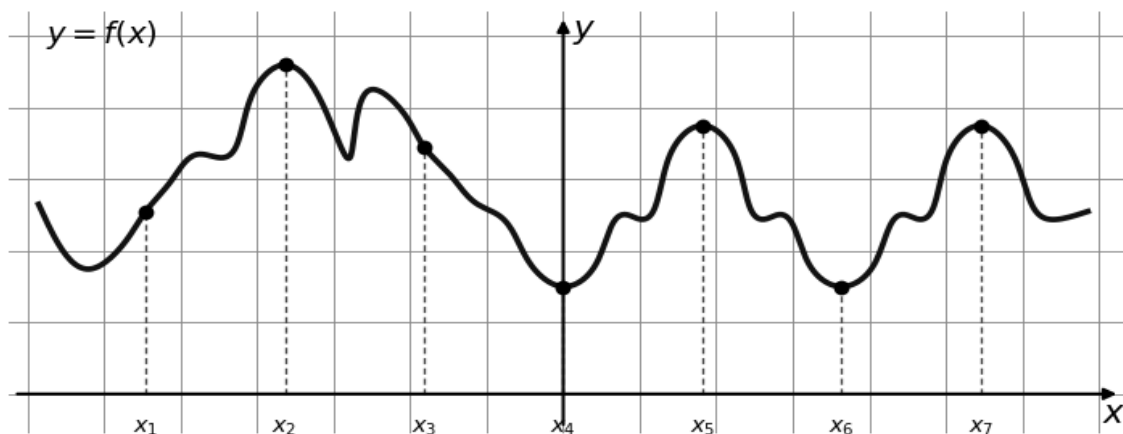
27. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



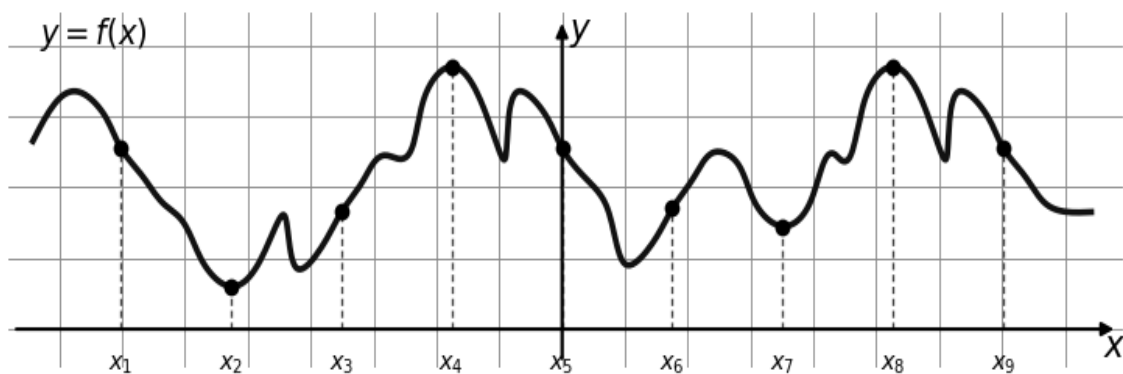
28. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



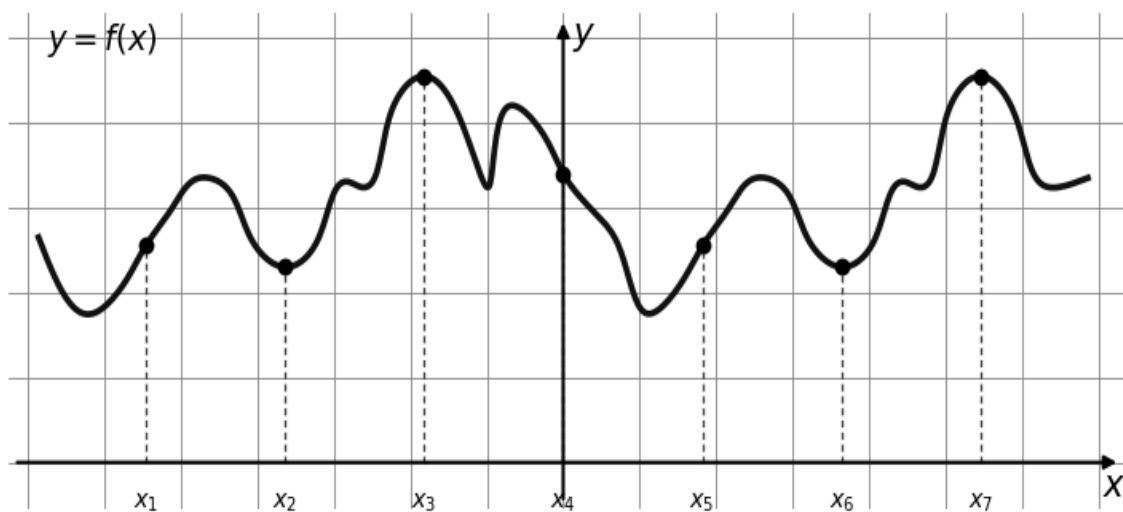
29. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



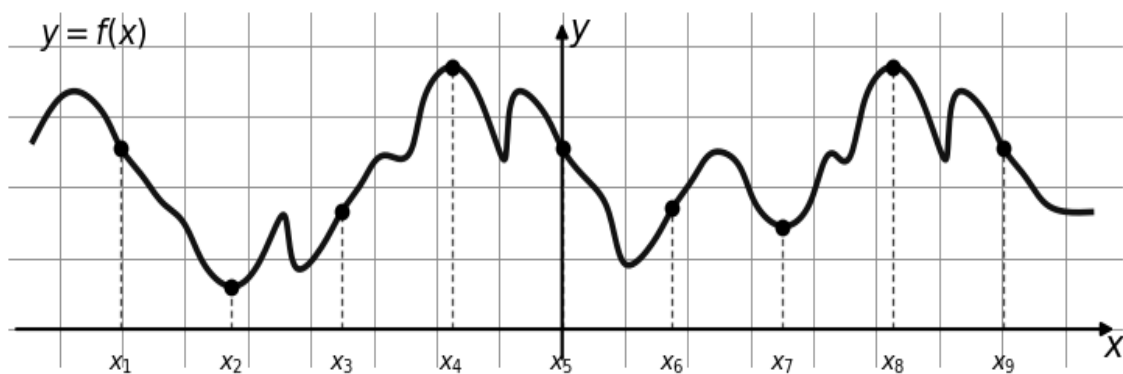
30. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



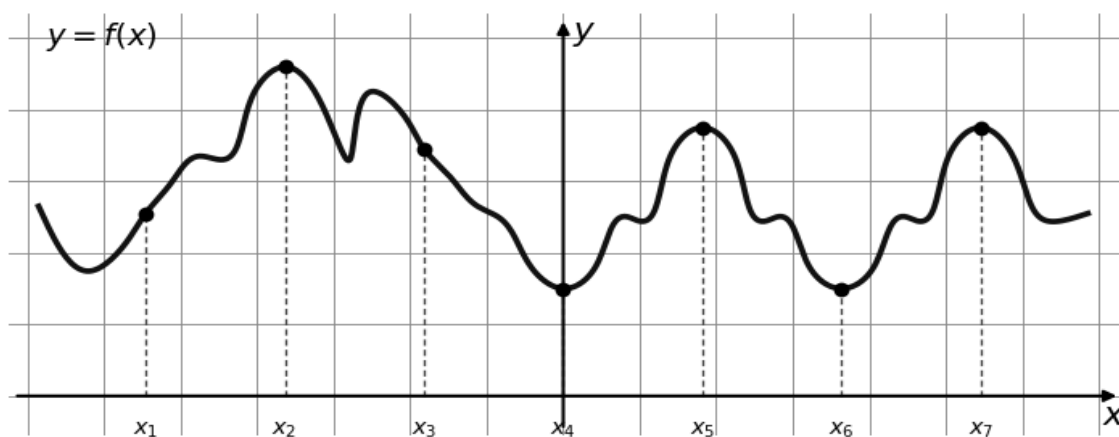
31. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



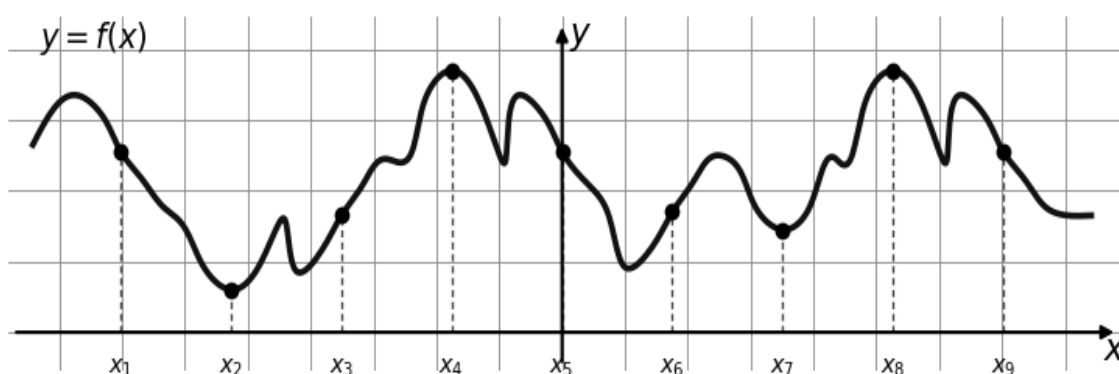
32. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



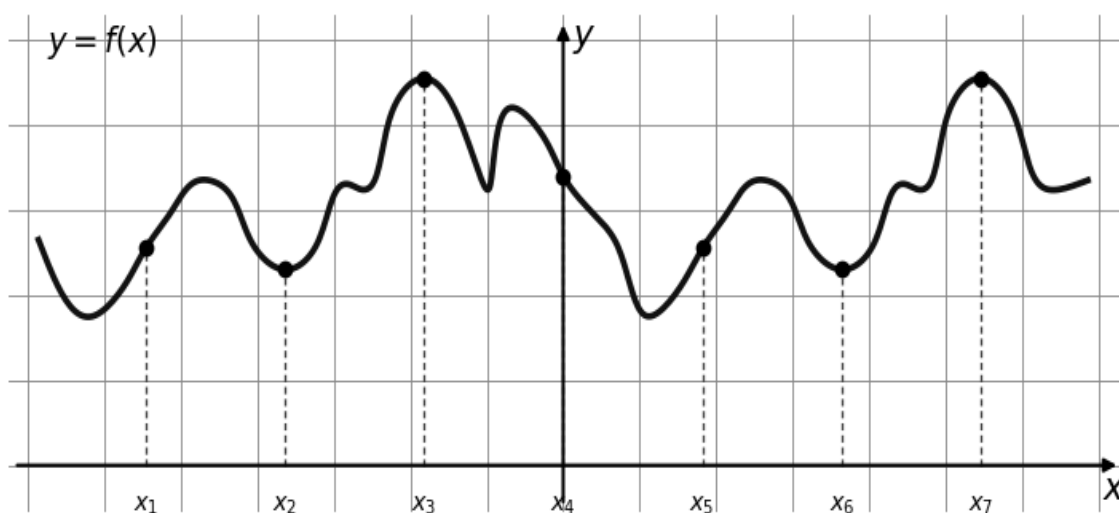
33. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



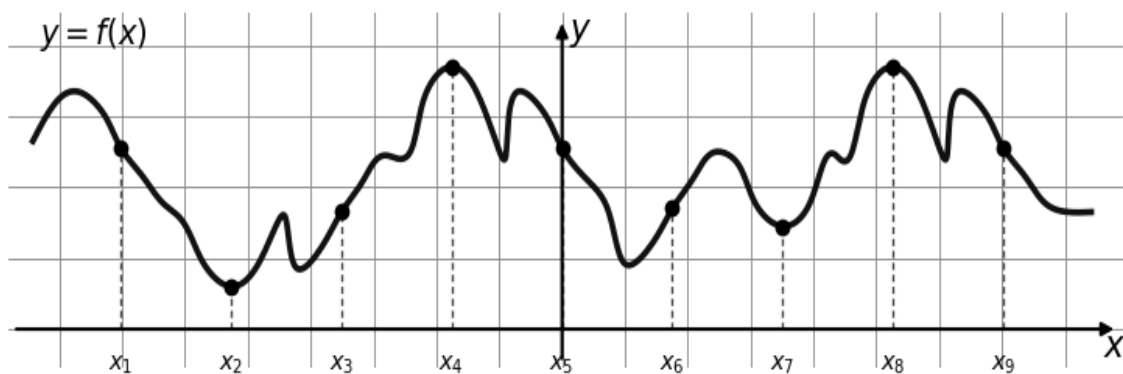
34. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



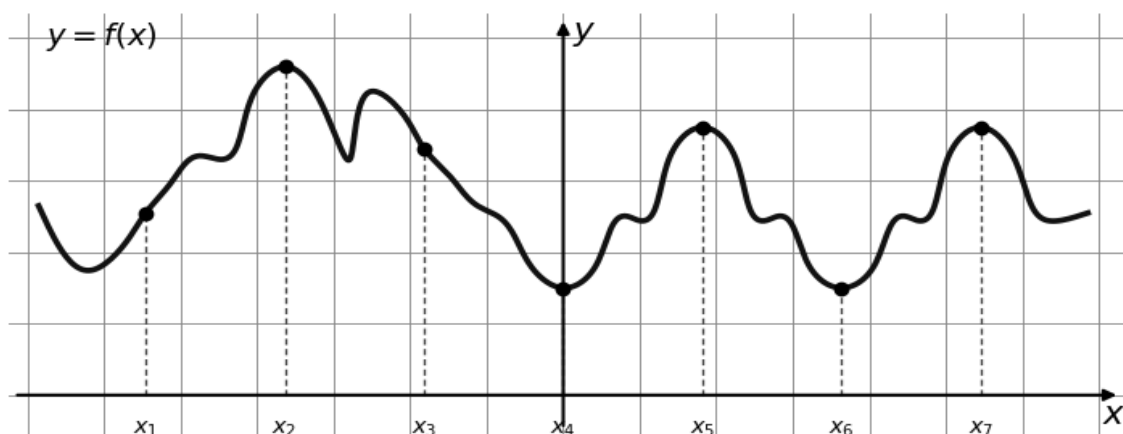
35. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



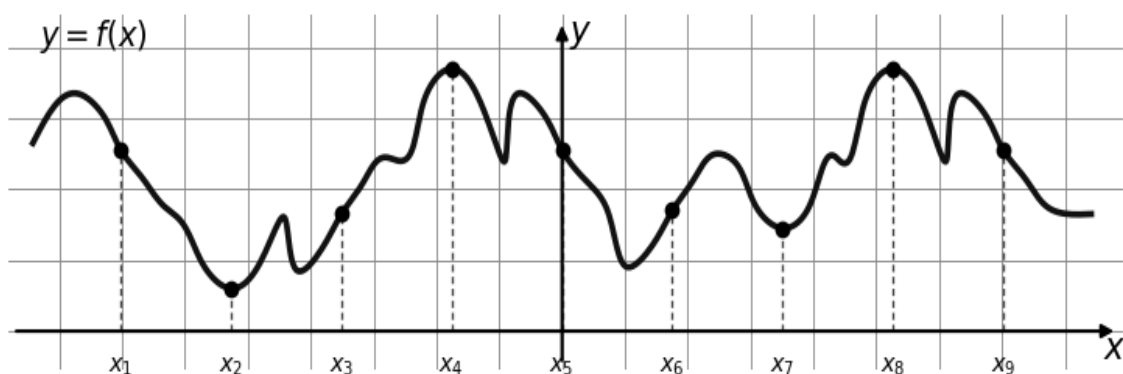
36. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



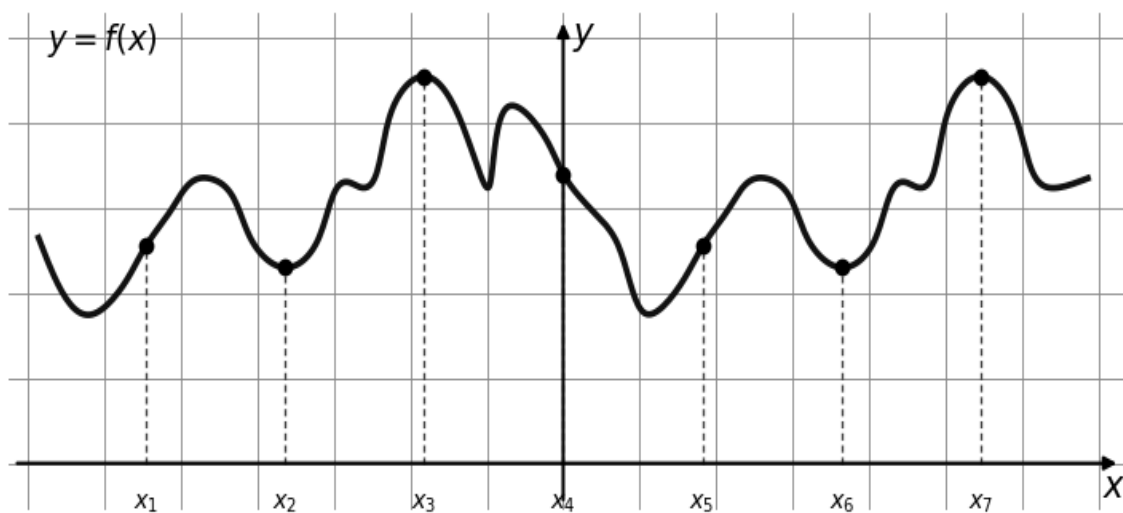
37. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



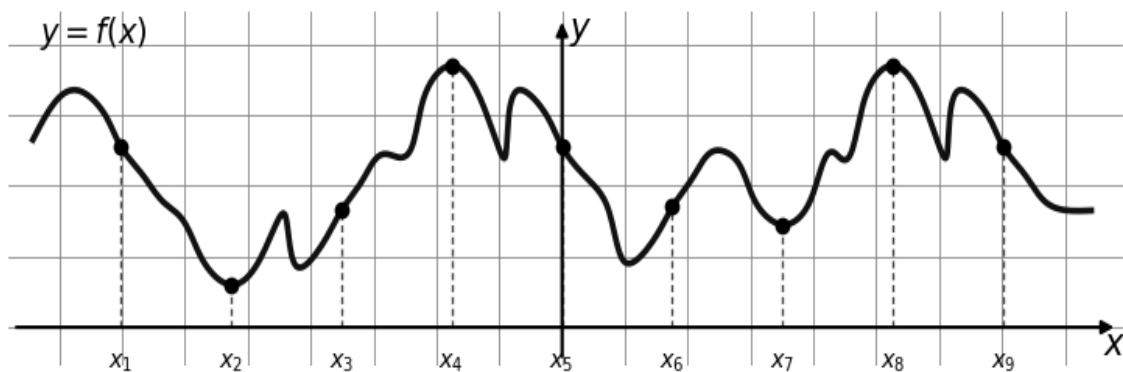
38. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



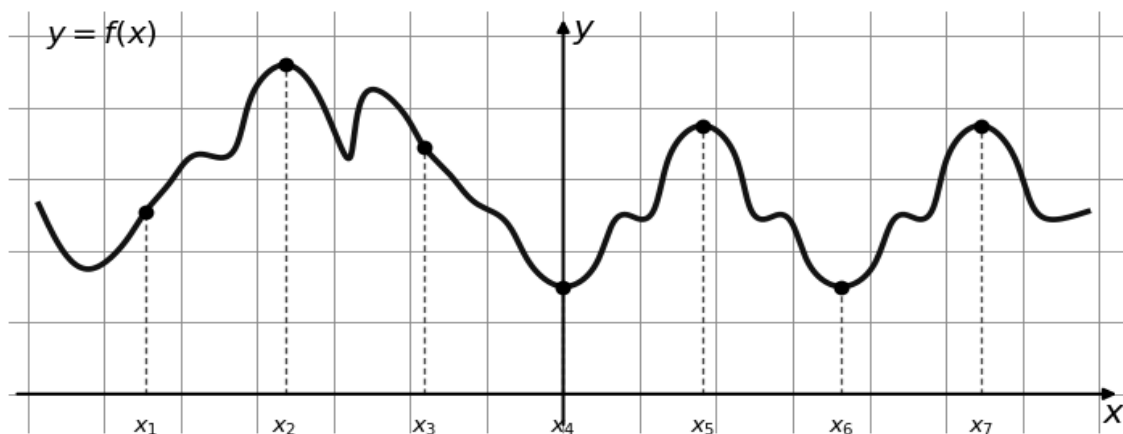
39. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



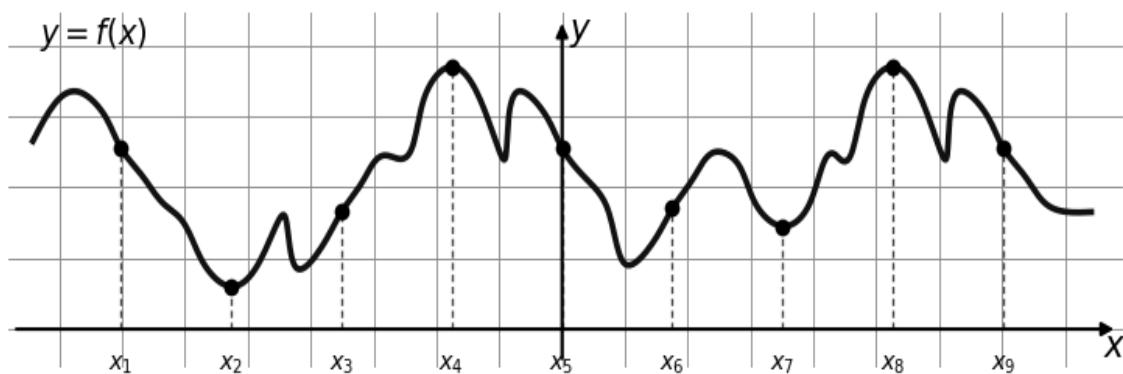
40. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



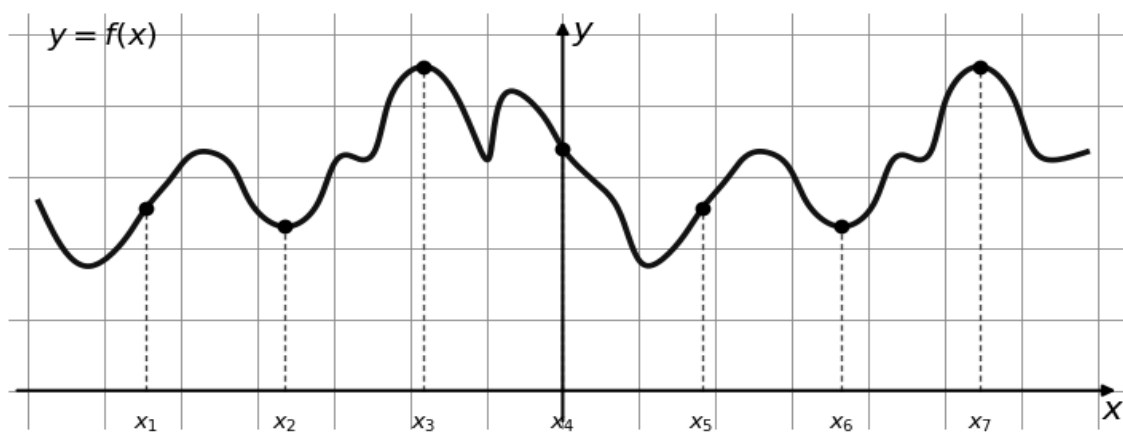
41. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



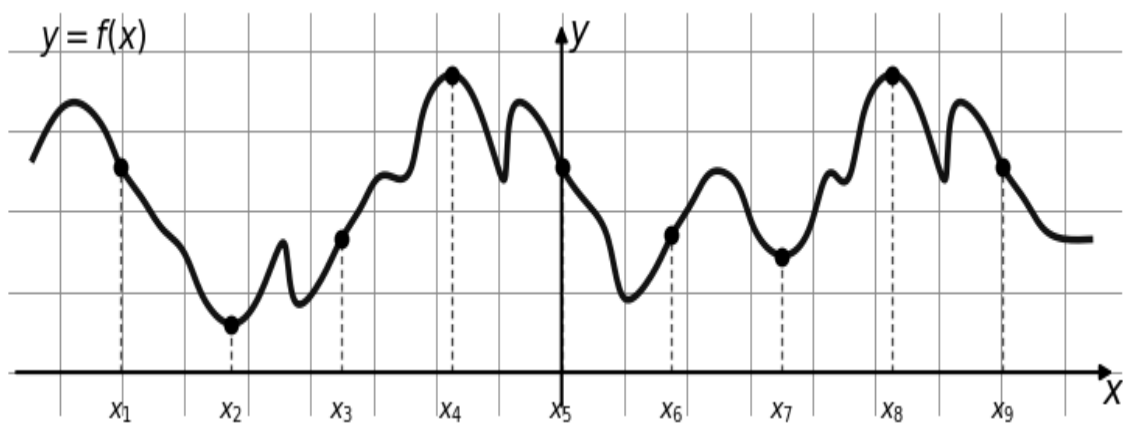
42. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



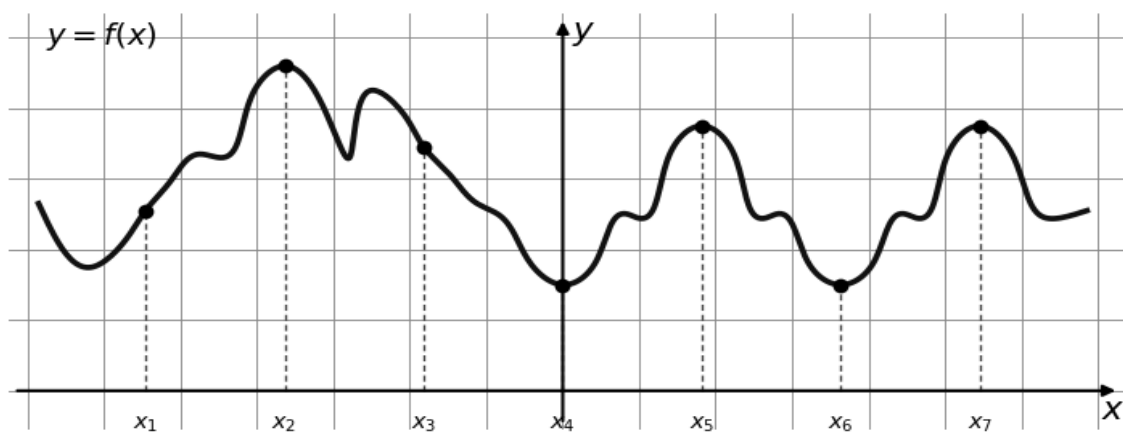
43. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



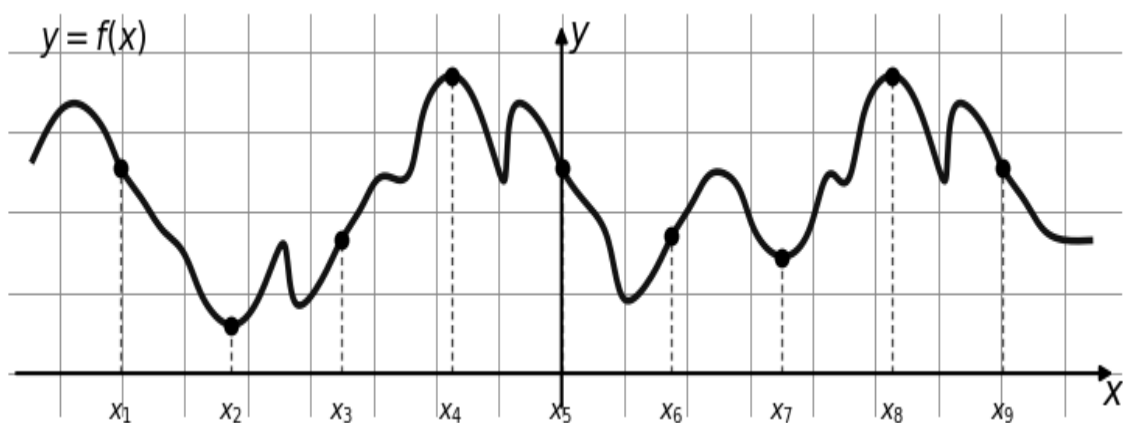
44. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



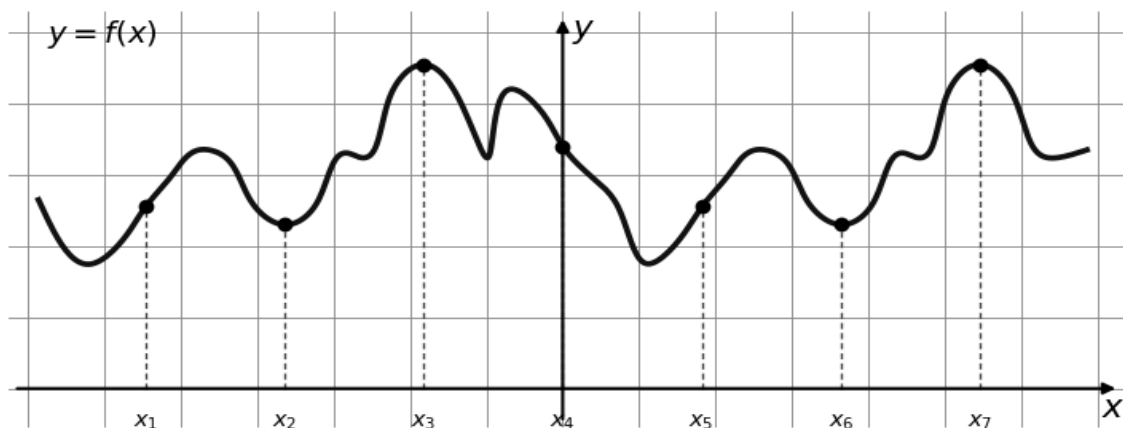
45. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



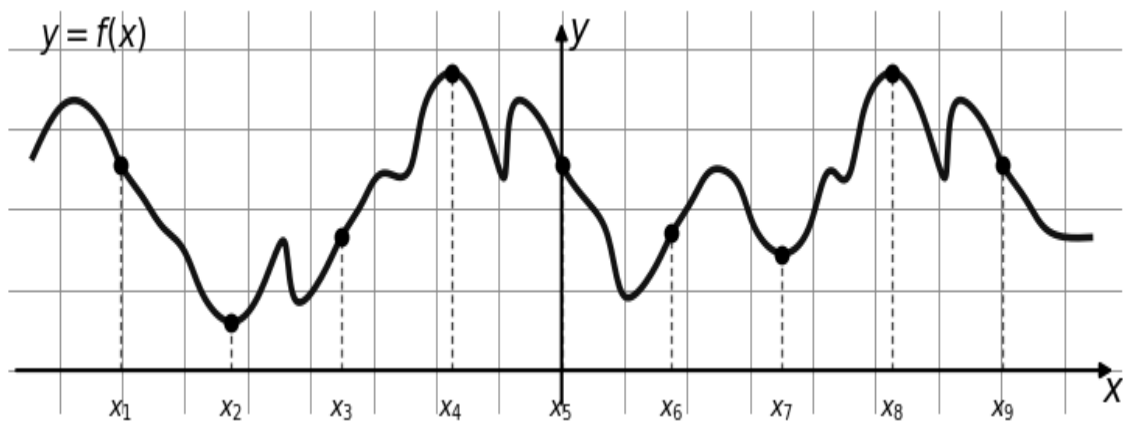
46. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



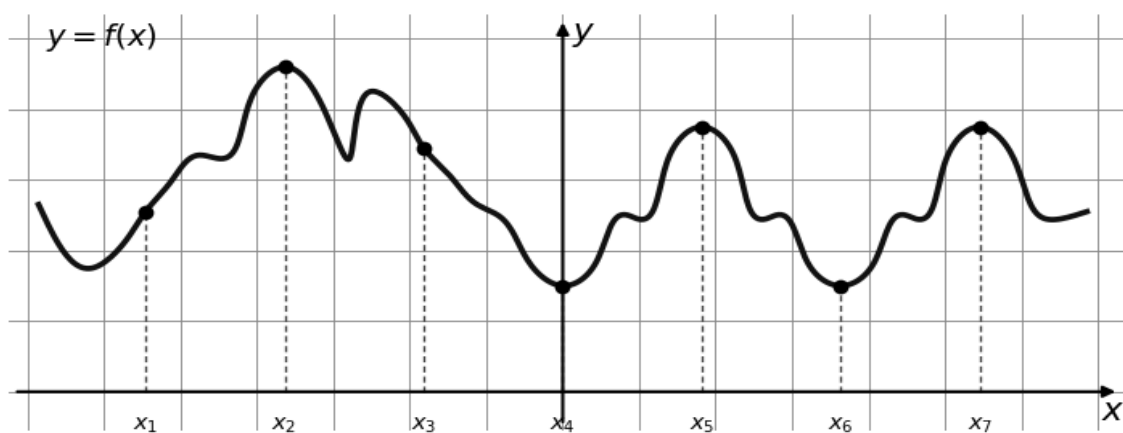
47. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



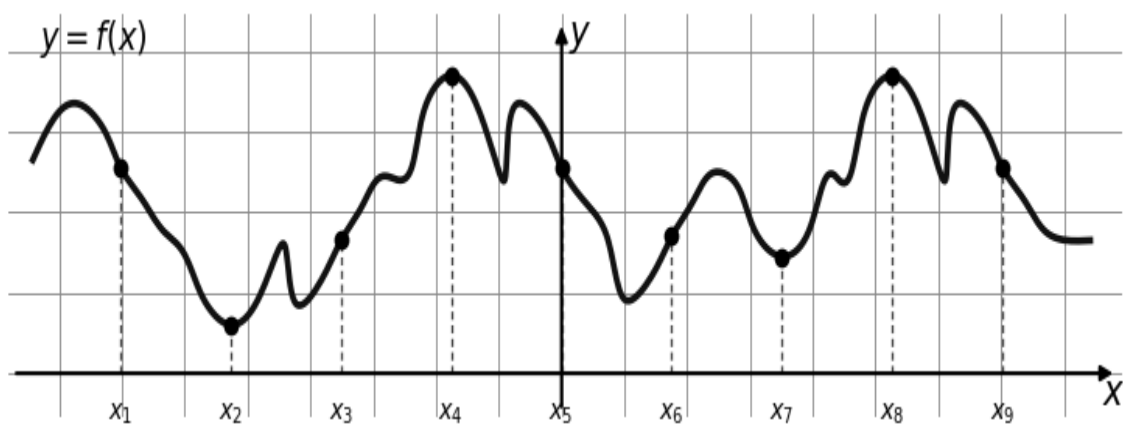
48. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



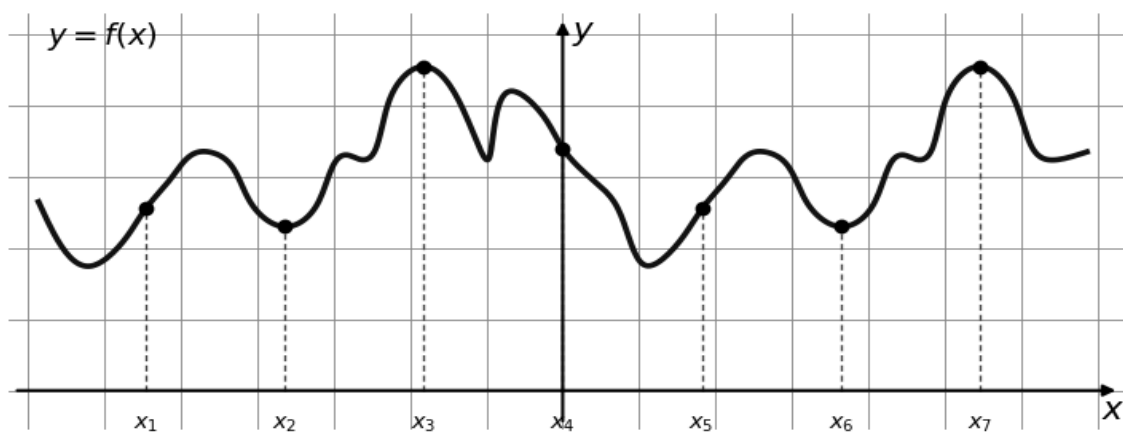
49. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



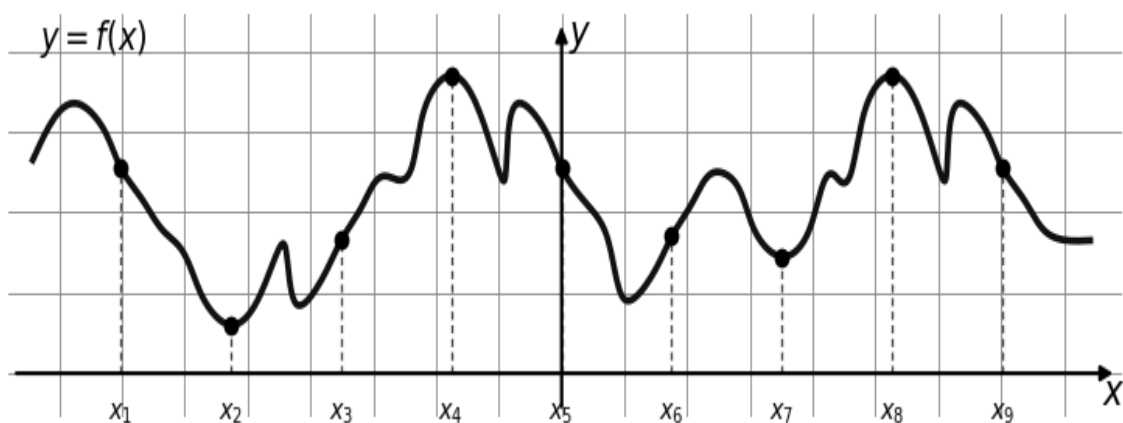
50. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



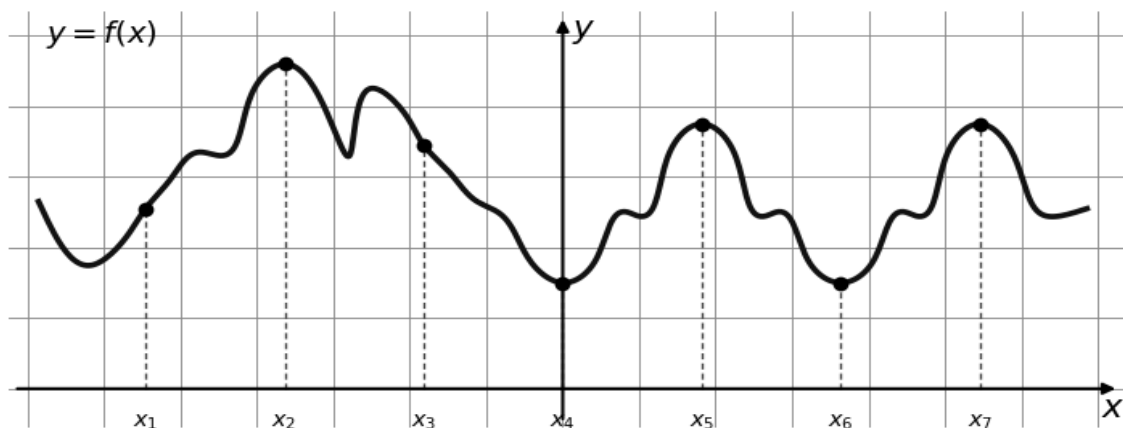
51. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



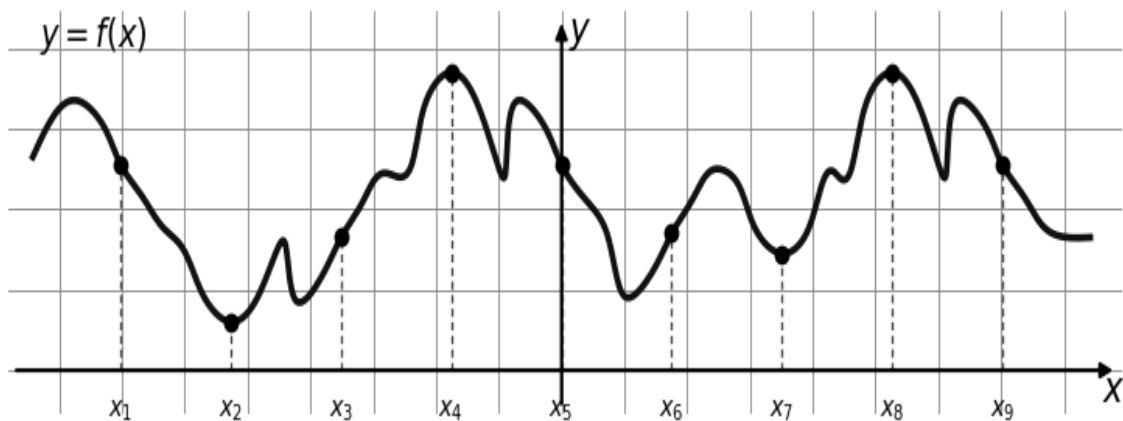
52. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



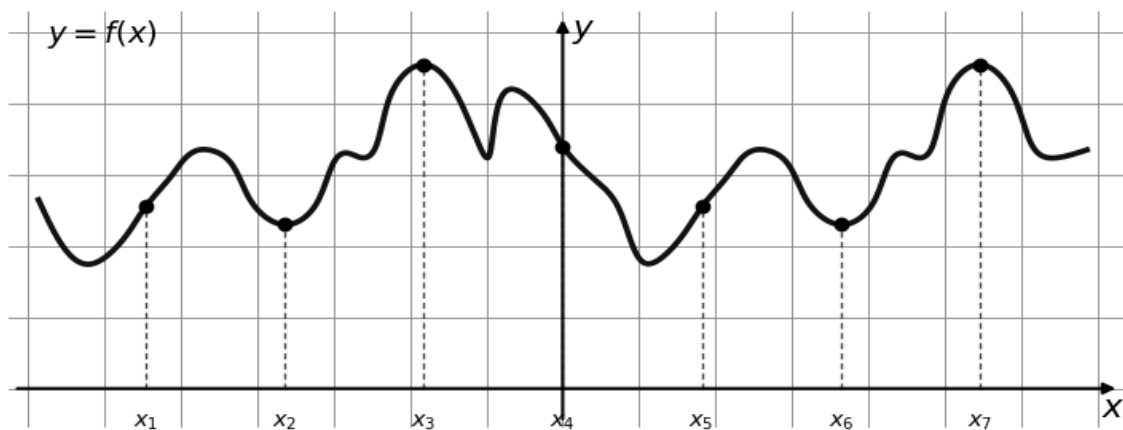
53. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



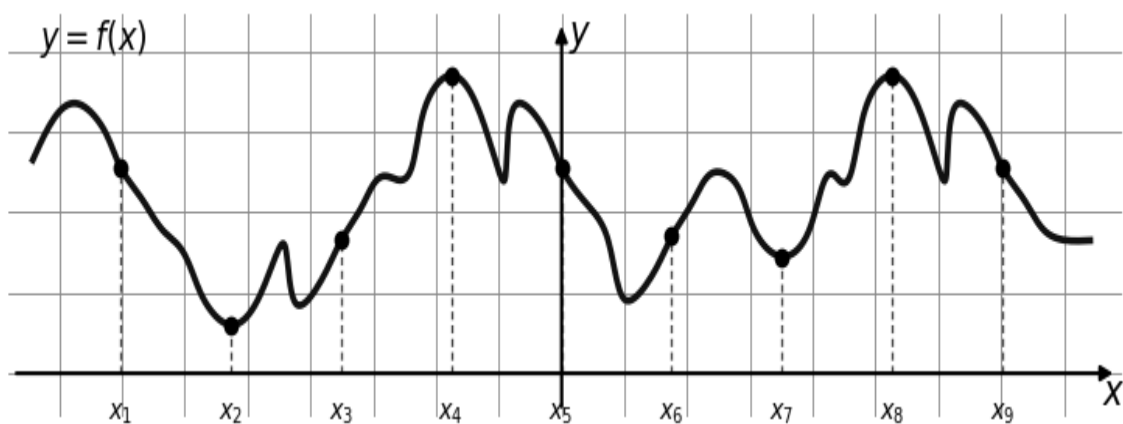
54. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



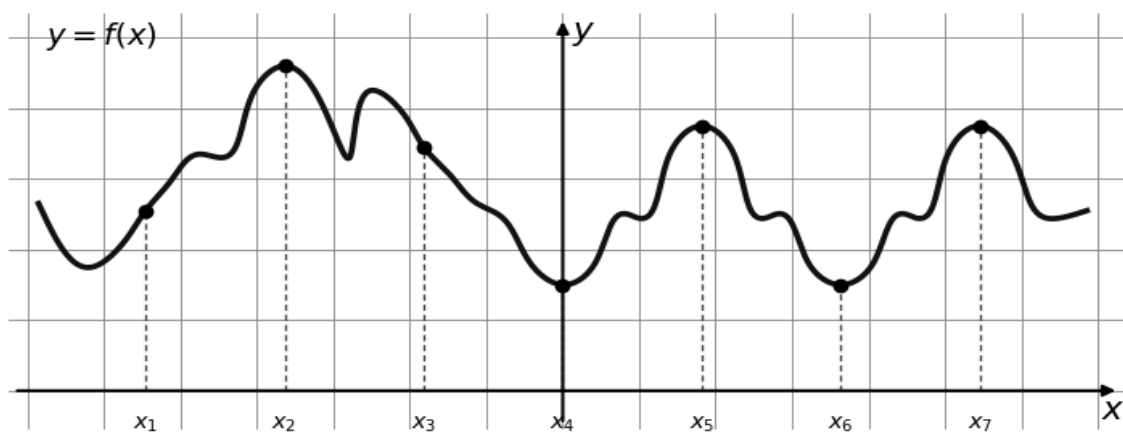
55. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



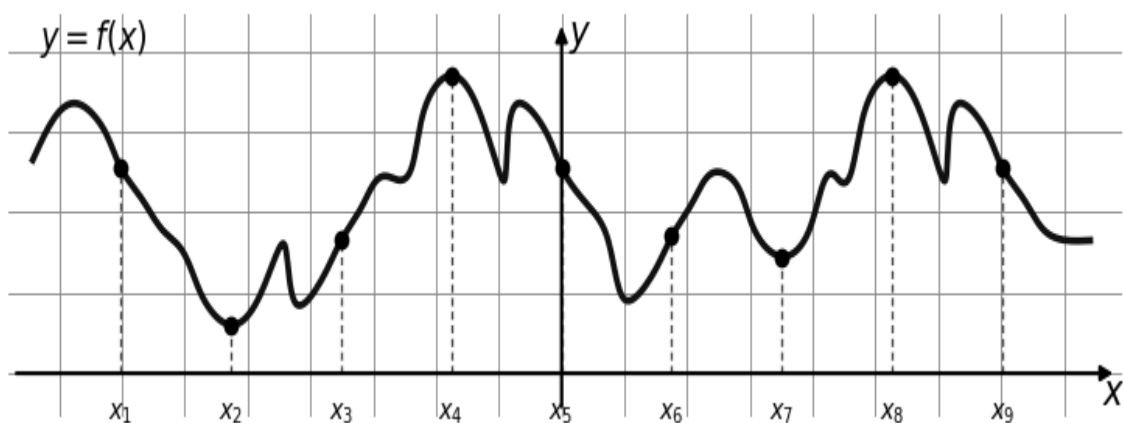
56. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



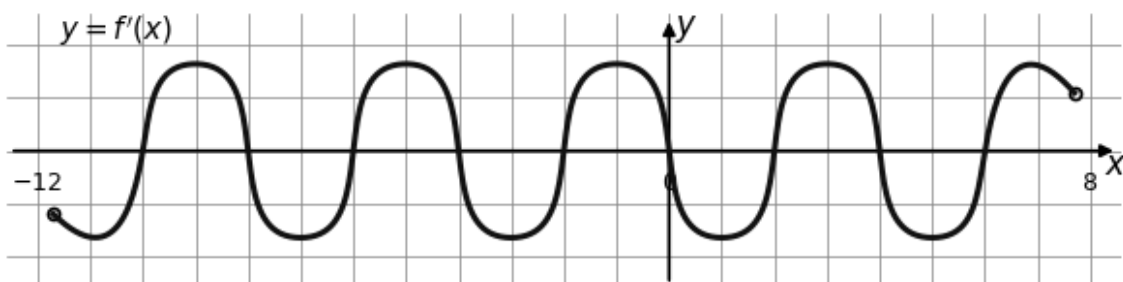
57. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 8 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



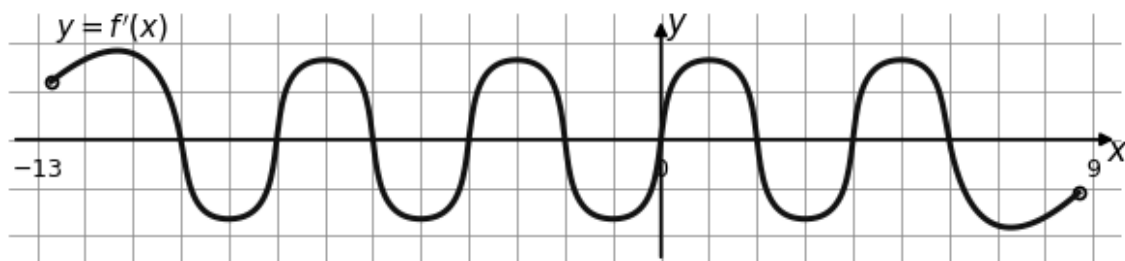
58. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и 10 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



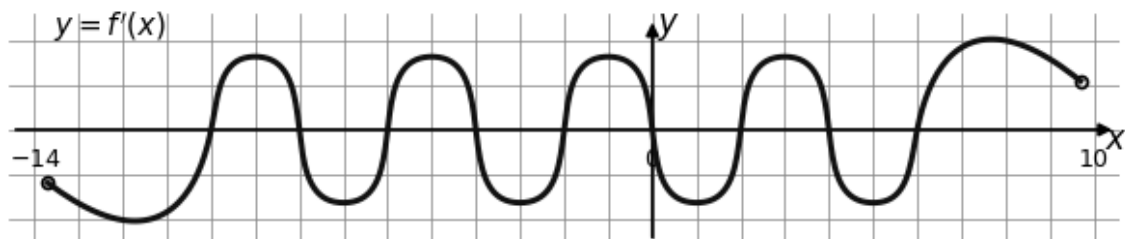
59. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 8)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



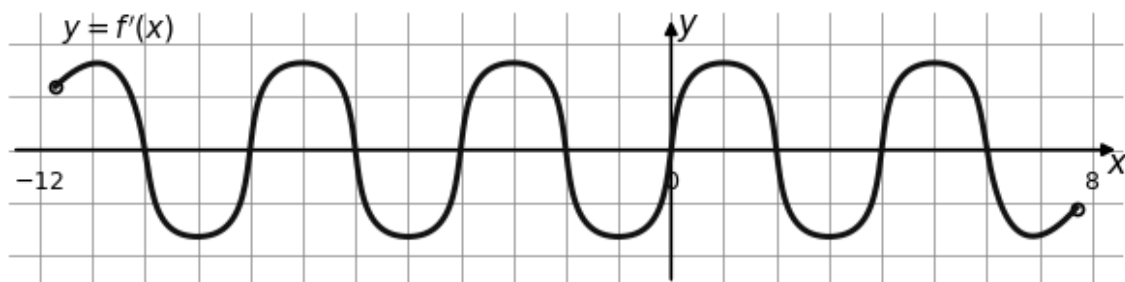
60. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



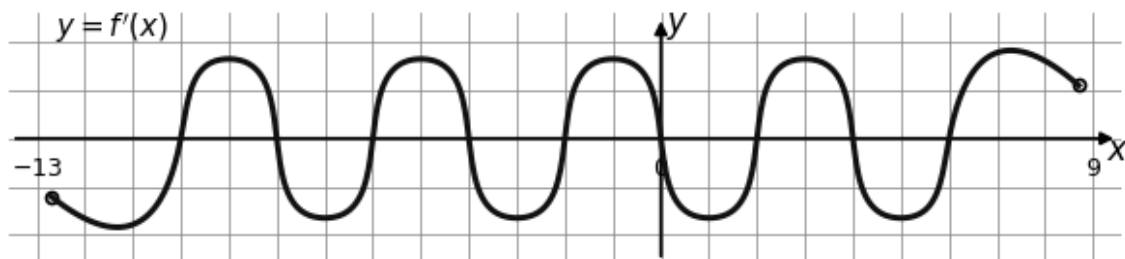
61. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



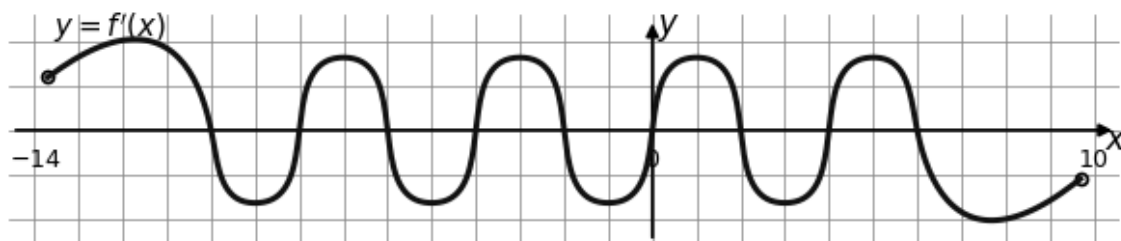
62. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 8)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



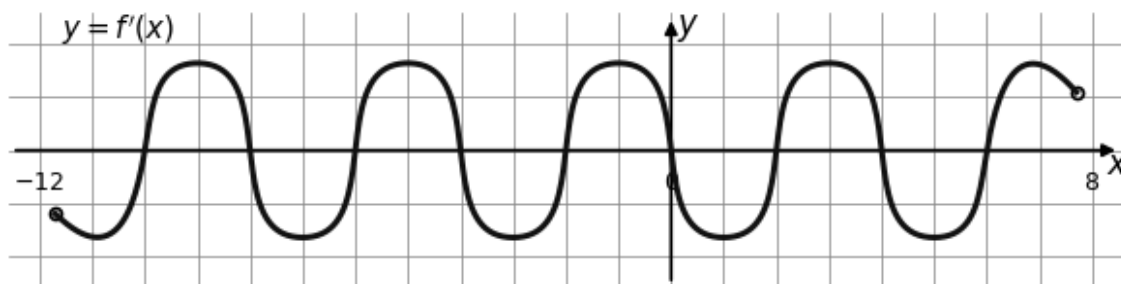
63. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



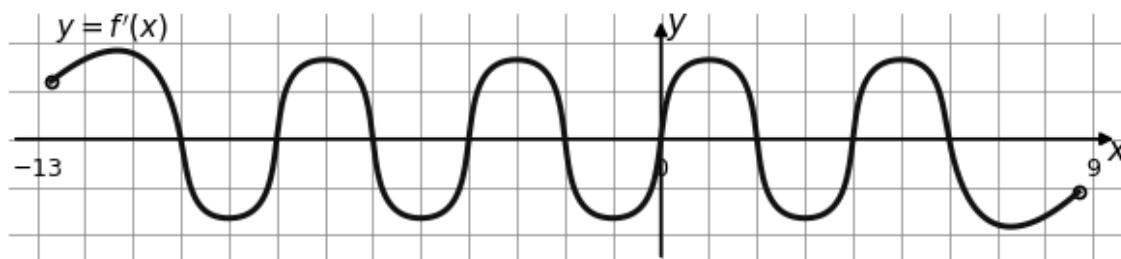
64. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



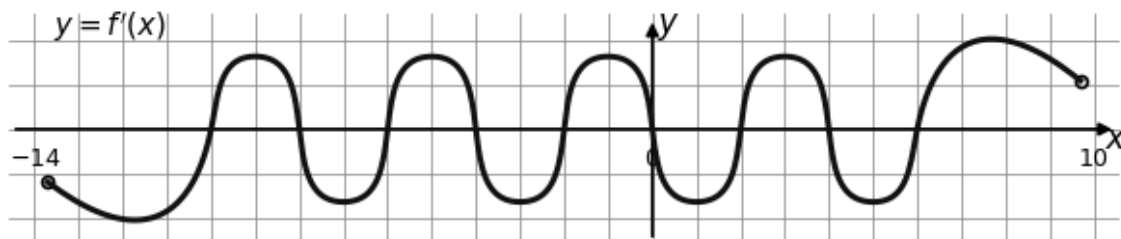
65. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 8)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



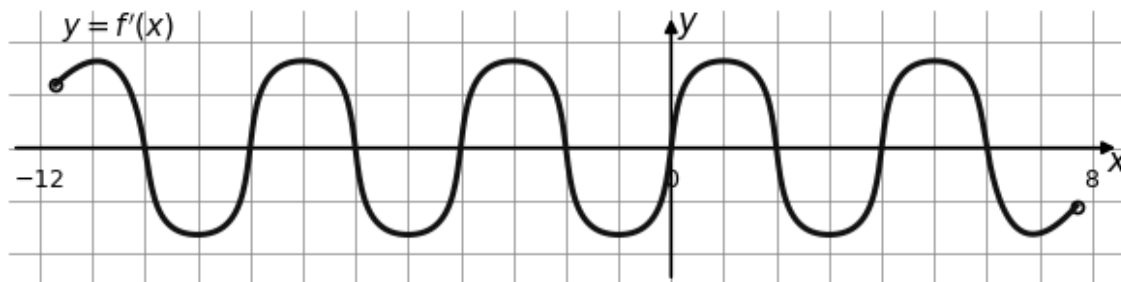
66. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



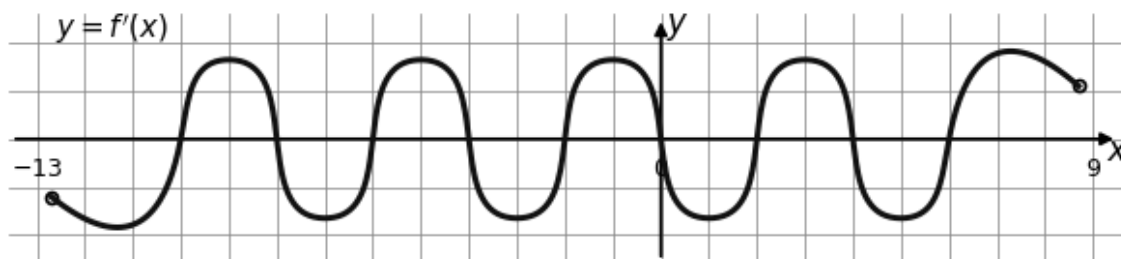
67. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



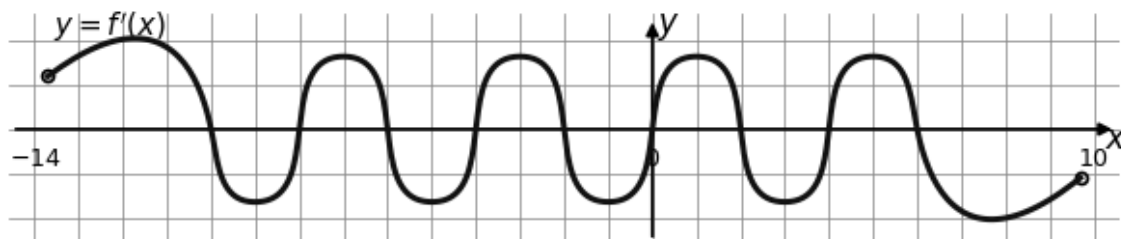
68. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 8)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



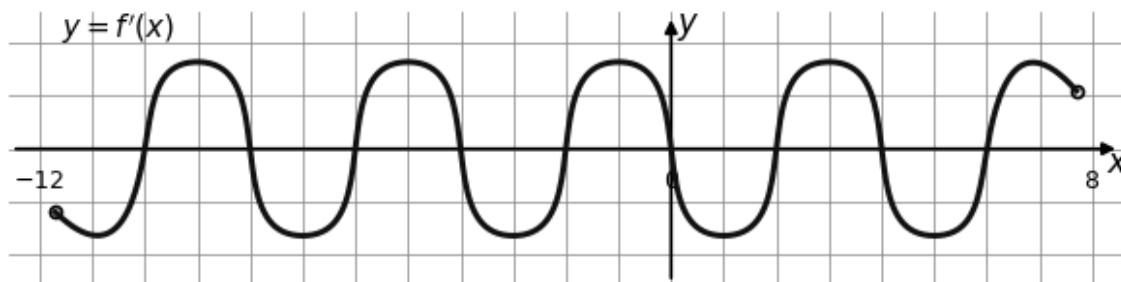
69. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



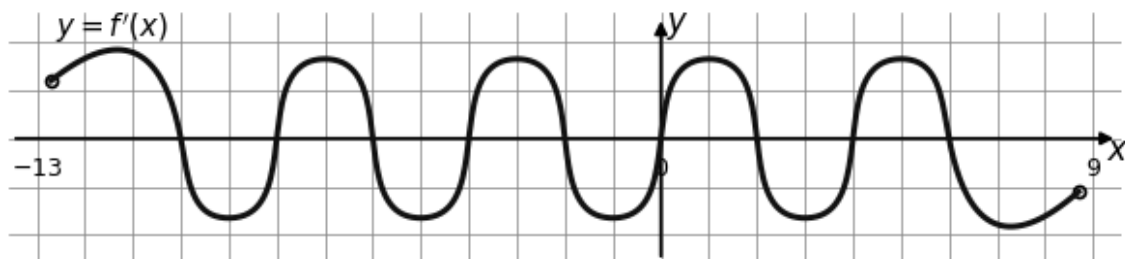
70. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



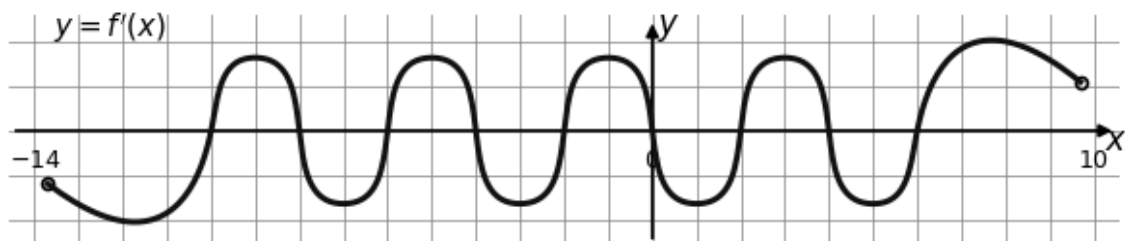
71. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 8)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



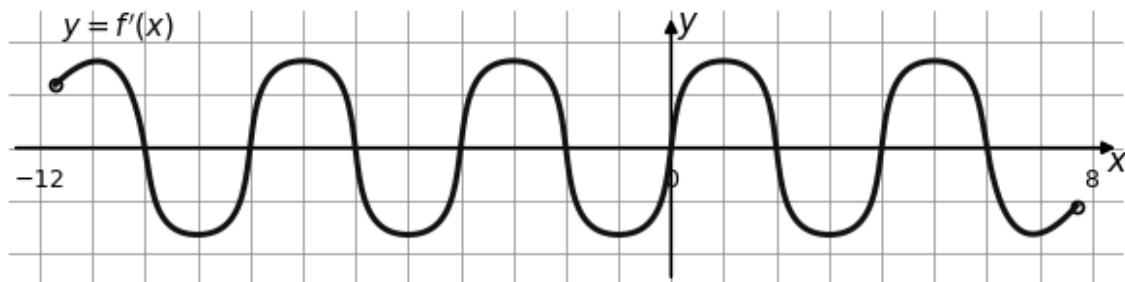
72. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



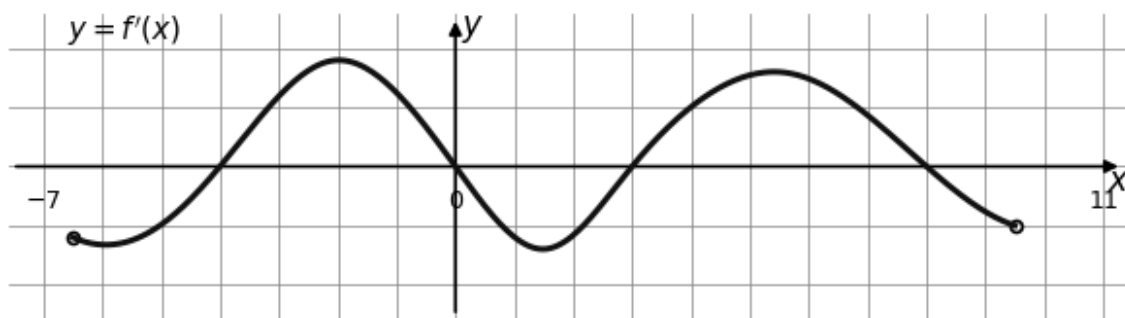
73. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



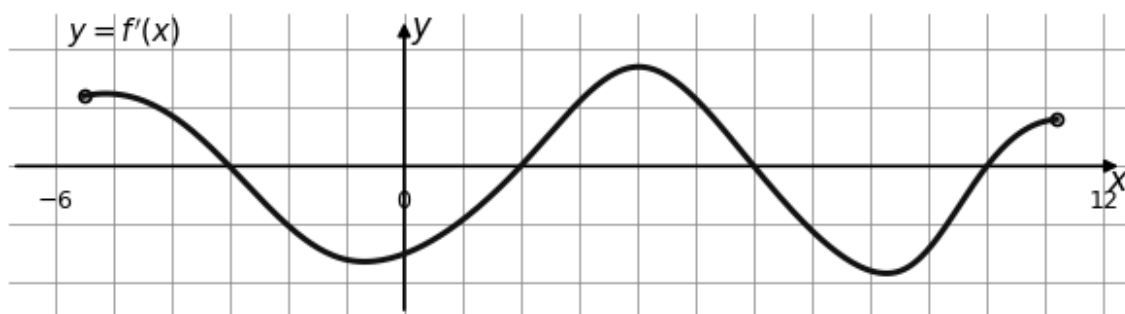
74. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 8)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 6]$.



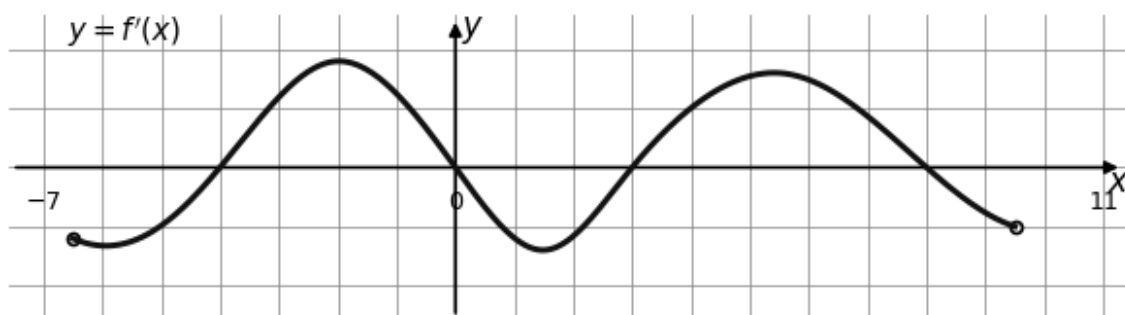
75. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 11)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



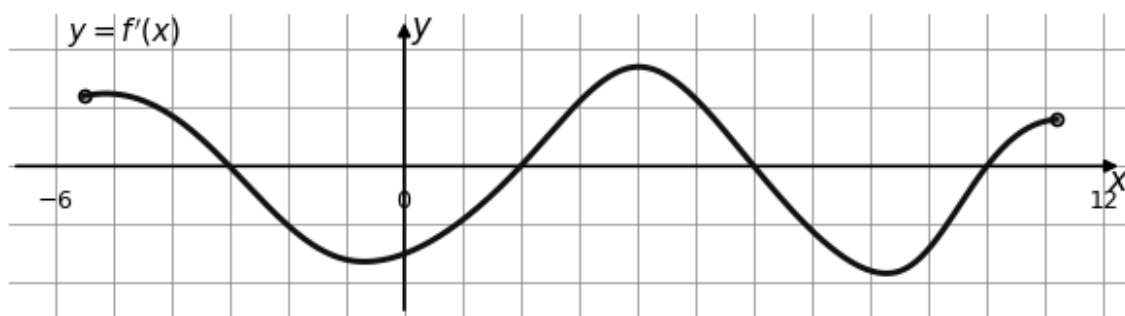
76. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



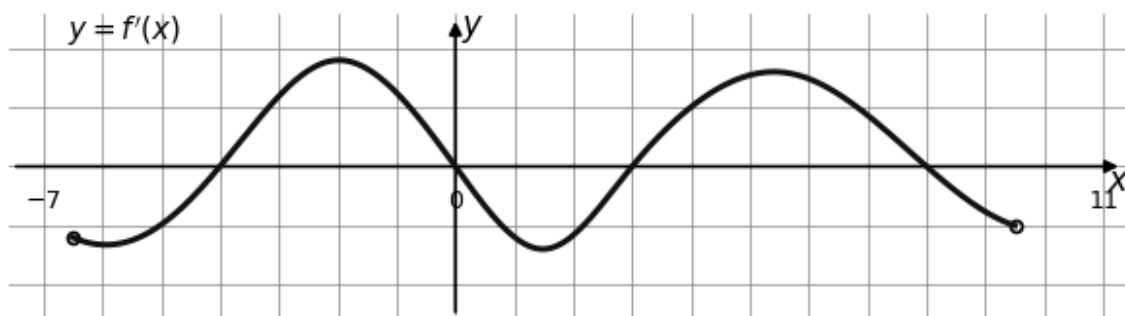
77. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 11)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



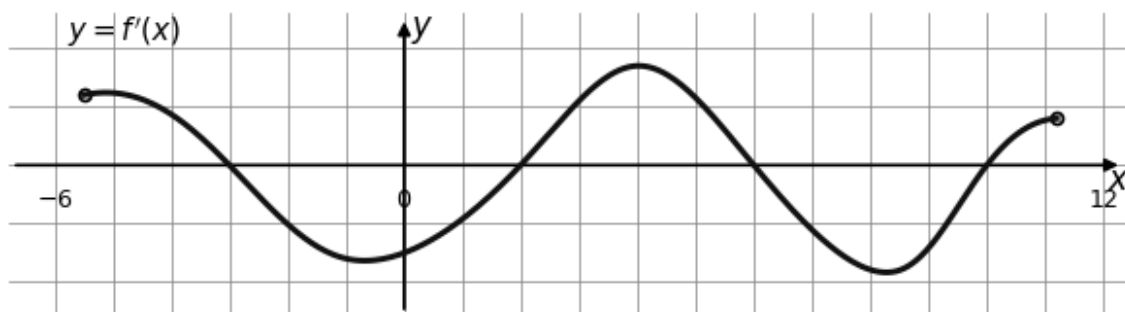
78. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



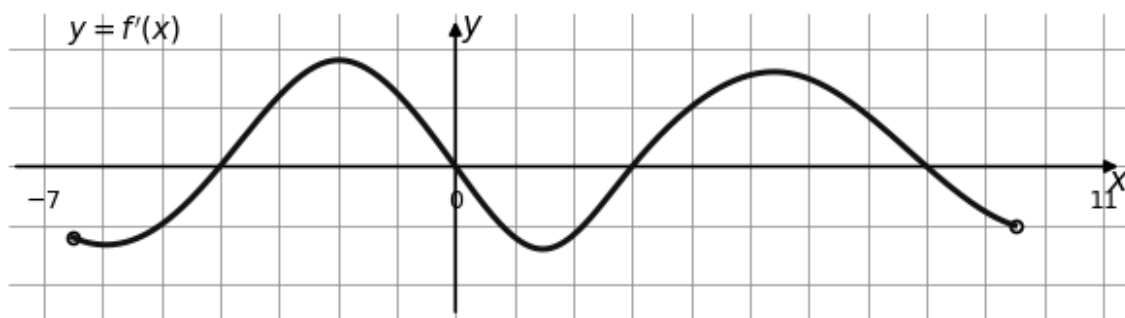
79. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 11)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



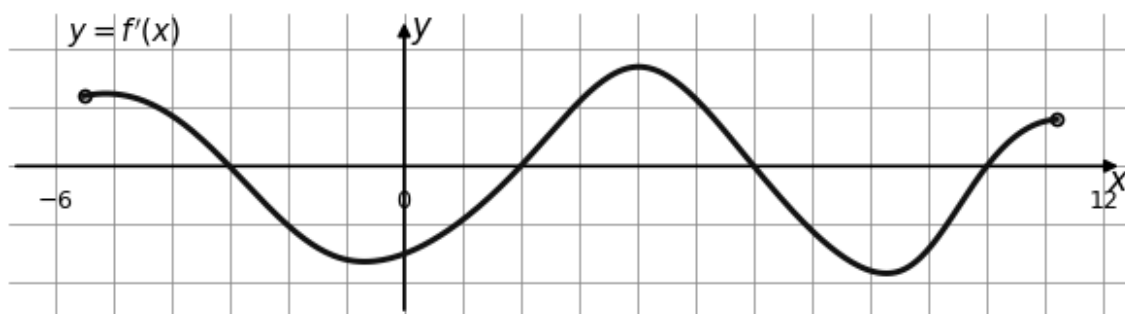
80. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



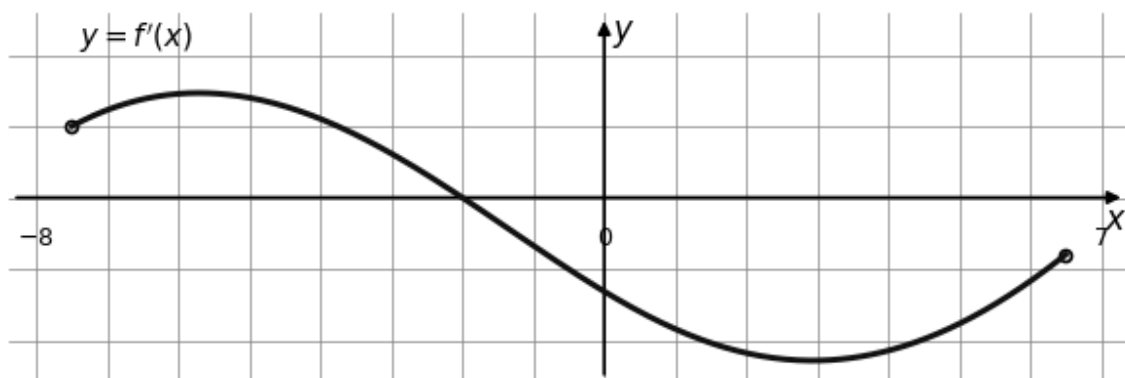
81. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 11)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



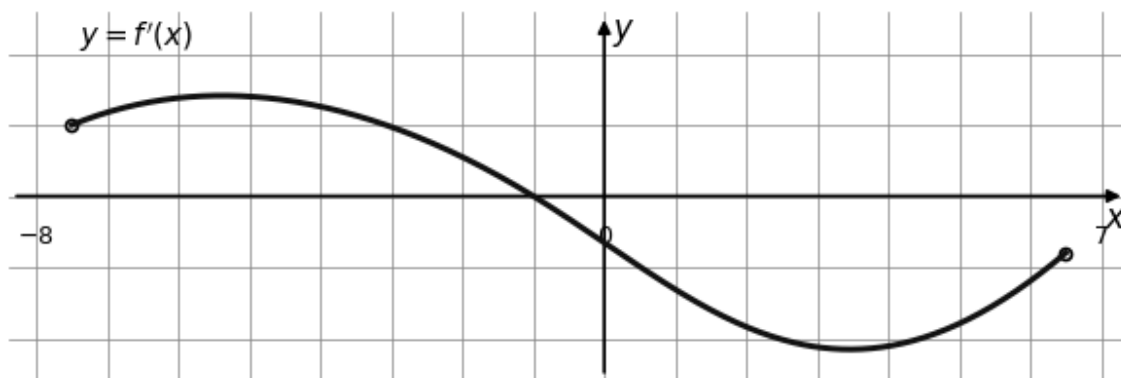
82. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



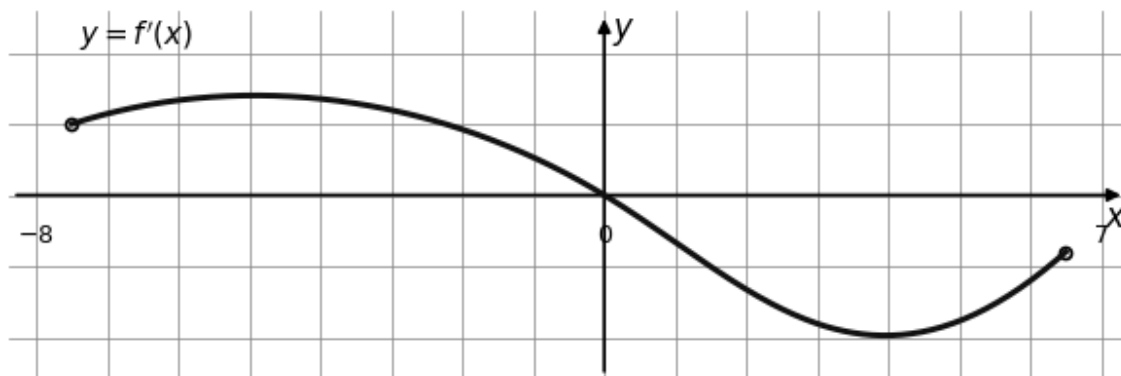
83. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



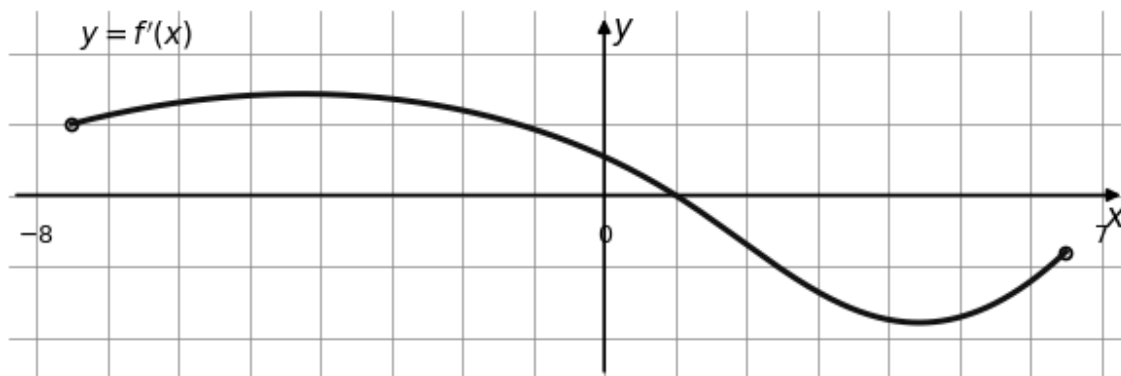
84. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



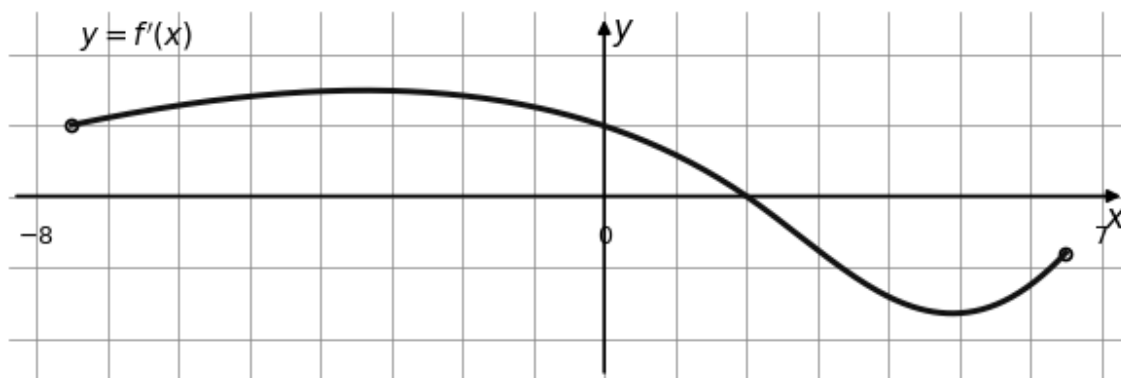
85. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



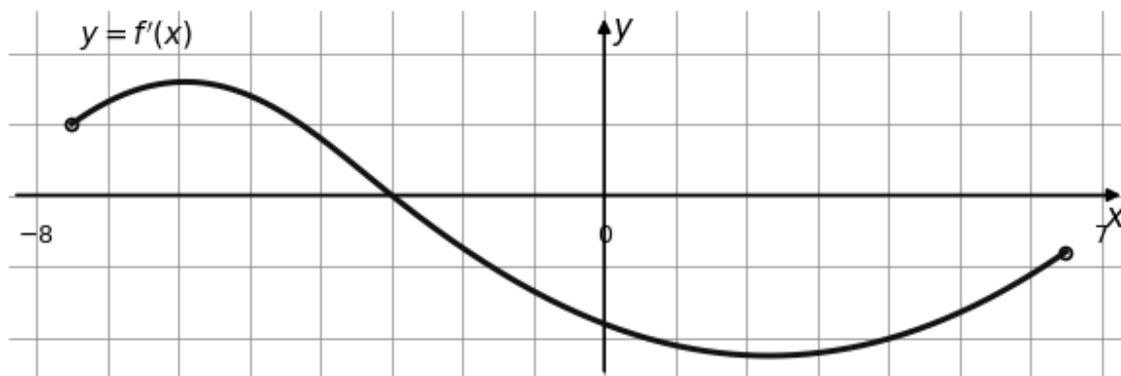
86. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



87. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



88. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответы

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1	1	2	3	3	4	4	5
9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
3	4	5	1	1	5	4	3
17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
-1	-6	3	7	1	1	2	3
25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.
2	2	2	3	2	2	2	3
33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
2	2	2	3	2	2	2	3
41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.
2	2	4	5	5	4	5	6
49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.
1	6	2	5	2	5	3	6
57.	58.	59.	60.	61.	62.	63.	64.
2	7	5	5	9	4	4	9
65.	66.	67.	68.	69.	70.	71.	72.
5	5	9	4	4	9	5	5
73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
9	4	5	4	5	4	5	4
81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.
5	4	-2	-1	0	1	2	-3

Исследование функции. Точки экстремума и наибольшие/наименьшие значения

1. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 75x + 23$.
2. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 192x + 14$.
3. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-7; -1]$.
4. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^5 - 20x^3 - 13$ на отрезке $[-6; 1]$.
5. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+36}{x}$.
6. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2+484}{x}$.
7. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2+900}$.
8. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2+225}$.
9. Найдите точку максимума функции $y = 6 + 15x - 4x\sqrt{x}$.
10. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 24x + 14$.
11. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[7; 10]$.
12. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 12x + 3$ на отрезке $[0; 100]$.
13. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$.
14. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$.
15. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x + 19$.
16. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x + 15$.
17. Найдите точку минимума функции $y = 6^{x^2-8x+28}$.
18. Найдите точку минимума функции $y = 7^{x^2-30x+235}$.
19. Найдите точку максимума функции $y = (24 - x)e^{x+24}$.
20. Найдите точку максимума функции $y = (15 - x)e^{x+15}$.
21. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 20x - 20)e^{2-x}$ на отрезке $[-2; 3]$.
22. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 21x - 21)e^{2-x}$ на отрезке $[-1; 4]$.
23. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 19x + 19)e^{x+20}$.
24. Найдите точку минимума функции $y = (2x^2 - 26x + 26)e^{x-17}$.

25. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 4$ на отрезке $[-1; 2]$.
26. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 9e^x - 2$ на отрезке $[1; 3]$.
27. Найдите наибольшее значение функции $y = 28\sqrt{2} \sin x - 28x + 7\pi + 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
28. Найдите наименьшее значение функции $y = -28 - \frac{7\pi}{2} + 14x - 14\sqrt{2} \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
29. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\sqrt{2} \cos x + 6x - \frac{3\pi}{2} + 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
30. Найдите наименьшее значение функции $y = -22 + \frac{9\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}x - 27\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
31. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 11) - 5x + 2$.
32. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 10) - 5x + 7$.
33. Найдите точку минимума функции $y = \log_2(x^2 - 14x + 72) - 8$.
34. Найдите точку минимума функции $y = \log_3(x^2 - 24x + 148) + 1$.
35. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5\ln(x + 3) + 4$ на отрезке $[-2,5; 0]$.
36. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - 6\ln(x + 3) + 4$ на отрезке $[-2,5; 0]$.
37. Найдите точку максимума функции $y = 1,5x^2 - 39x + 108\ln x - 8$.
38. Найдите точку минимума функции $y = 0,5x^2 - 11x + 30\ln x + 8$.
39. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 13x + 11\ln x + 12$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.
40. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 7$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

Ответы

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
−5	8	48	51	6	−22	−30	15
9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
6.25	256	54	−253	4	11	64	144
17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
4	15	23	14	24	25	0	11
25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.
0	−22,25	43	−42	21	−31.5	11.2	10.2
33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
7	12	−6	−8	4	6	0	−10

Первообразная. Значение первообразной в точке

1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 11x + 5$ в точке 0 равно 6. Найдите $F(-3)$.
2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -5x + 8$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(4)$.
3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ в точке 0 равно 4. Найдите $F(4)$.
4. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 2x^2 + 9x - 4$ в точке 0 равно 7. Найдите $F(-3)$.
5. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -6x^2 - 2x + 5$ в точке 0 равно 9. Найдите $F(5)$.
6. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ в точке 0 равно -5. Найдите $F(2)$.
7. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -x^3 + 10x - 7$ в точке 0 равно 12. Найдите $F(-2)$.
8. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \frac{x^3}{5} - 3x^2 + 7x - 8$ в точке 0 равно -21. Найдите $F(5)$.
9. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 9x^8$ в точке 0 равно -13. Найдите $F(-1)$.
10. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -18x^4$ в точке 0 равно 17. Найдите $F(2)$.
11. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -5\sin x$ в точке 0 равно 17. Найдите $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
12. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 11\sin x$ в точке 0 равно -9. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
13. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 21\sin x$ в точке 0 равно 6. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
14. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 8\cos x$ в точке $-\pi$ равно 13. Найдите $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

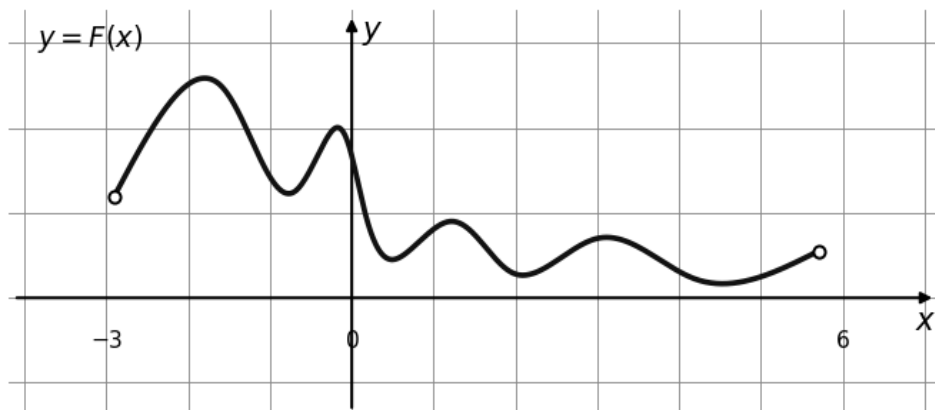
15. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 10\cos x$ в точке $\frac{\pi}{2}$ равно -4 . Найдите $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
16. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 6e^x$ в точке 0 равно -18 . Найдите $F(\ln 3)$.
17. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -8e^x$ в точке 0 равно 3 . Найдите $F(\ln 7)$.
18. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 12e^x$ в точке 0 равно 7 . Найдите $F(-\ln 5)$.
19. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \frac{7}{x}$ в точке 1 равно -11 . Найдите $F(e^2)$.
20. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -\frac{10}{x}$ в точке 1 равно 8 . Найдите $F(e^4)$.

Ответы

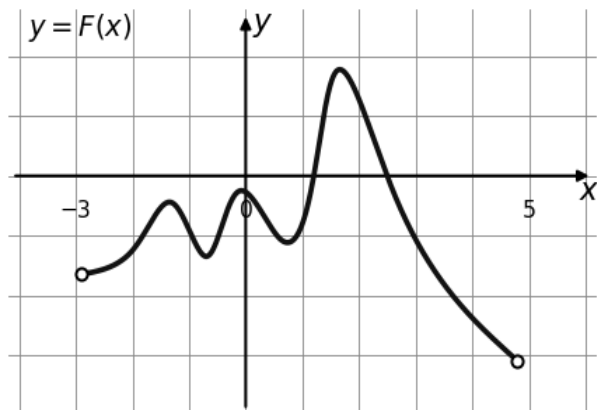
1.	2.	3.	4.	5.
40.5	-5	16	41.5	-241
6.	7.	8.	9.	10.
17	42	-67.25	-14	-98,2
11.	12.	13.	14.	15.
14.5	-3.5	27	17	-19
16.	17.	18.	19.	20.
-6	-45	-2.6	3	-32

Первообразная по графику. Площадь. Разность значений первообразной

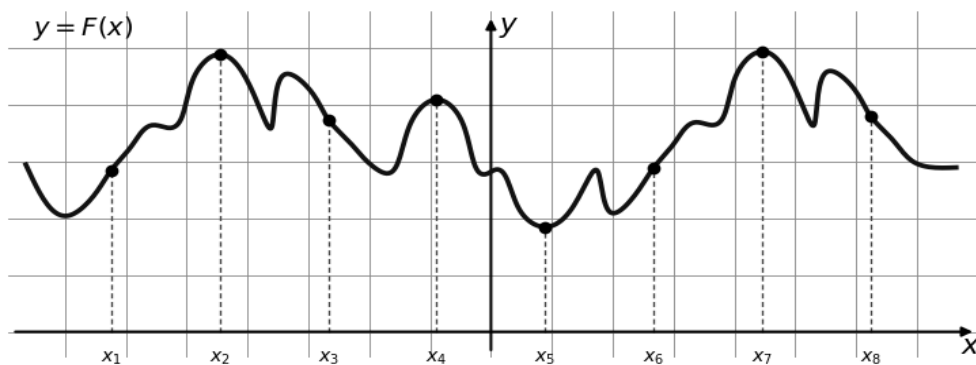
1. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



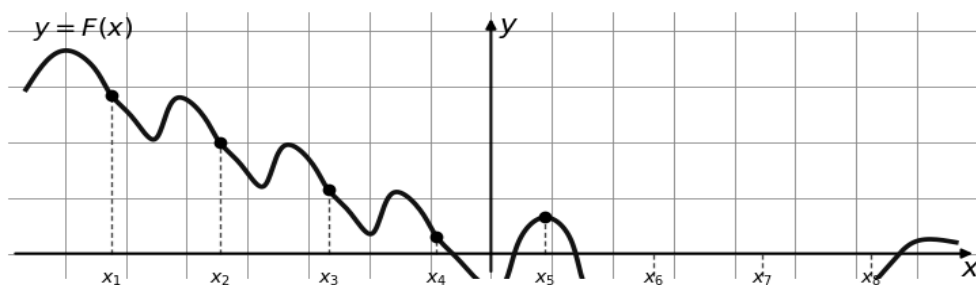
2. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



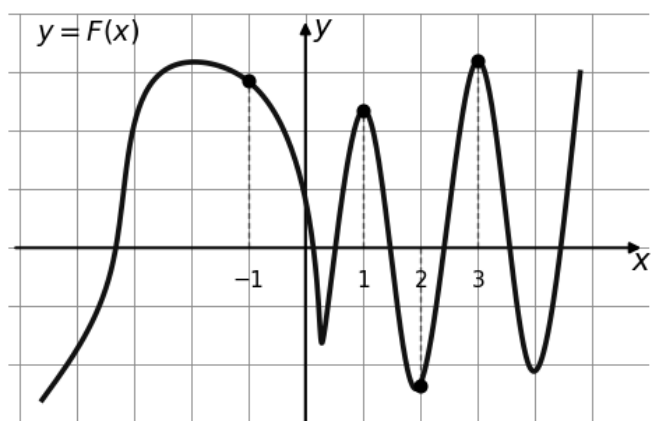
3. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



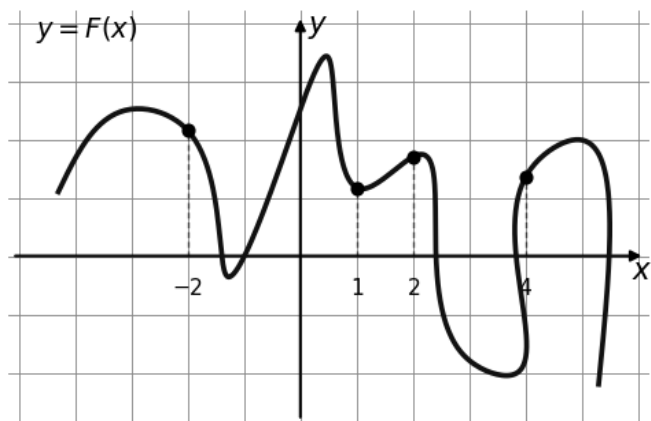
4. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



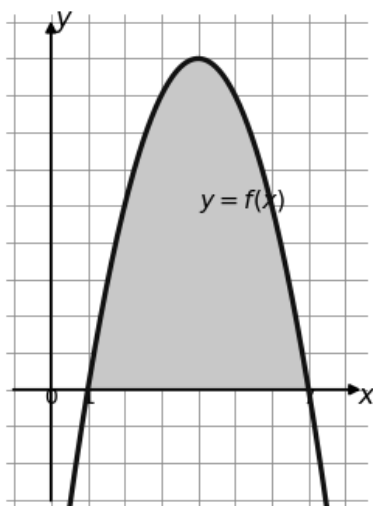
5. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки $-1, 1, 2, 3$. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наименьшее? В ответе укажите эту точку.



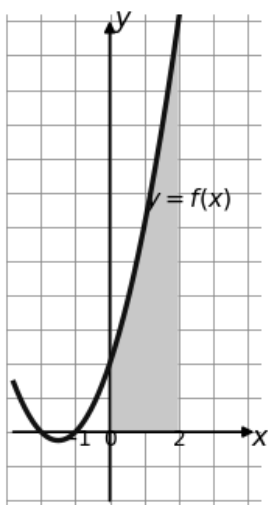
6. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки $-2, 1, 2, 4$. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наибольшее? В ответе укажите эту точку.



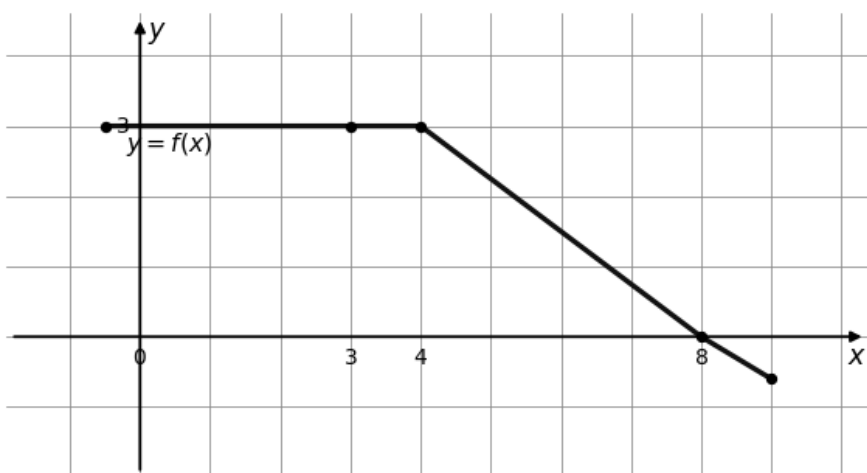
7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 7x + 11$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



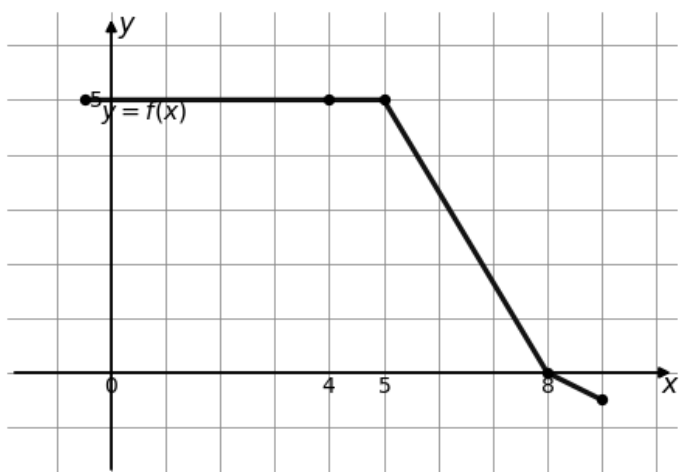
8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - 14$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



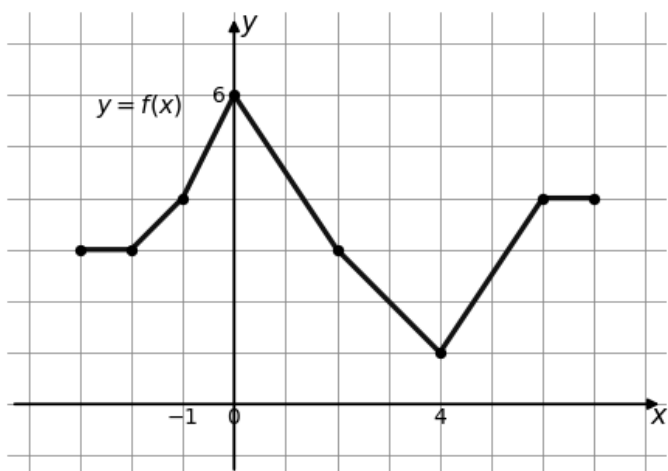
9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



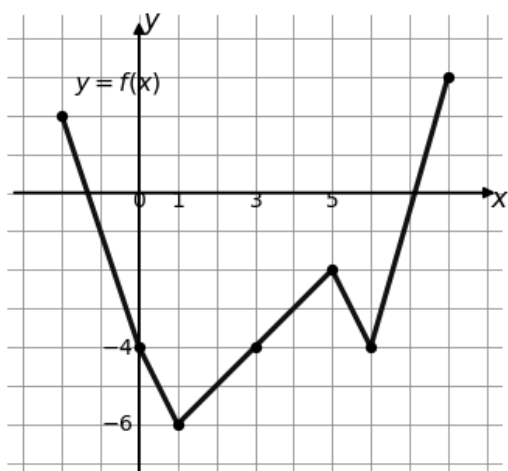
10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



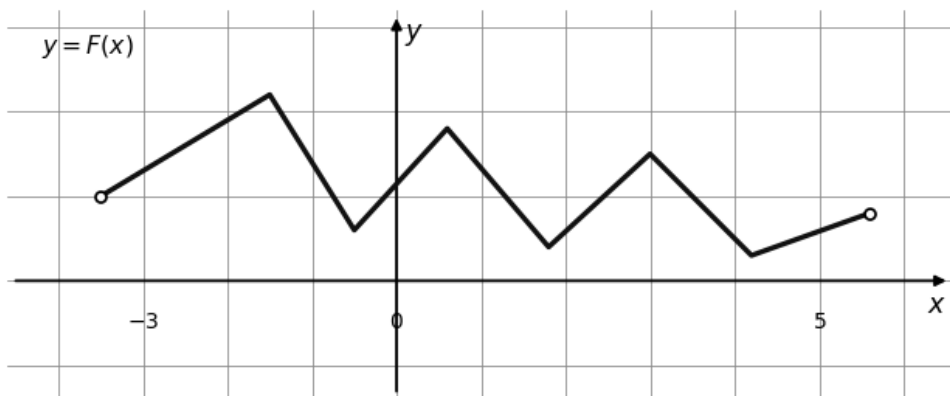
11. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой $F(x)$. Найдите разность $F(4) - F(-1)$.



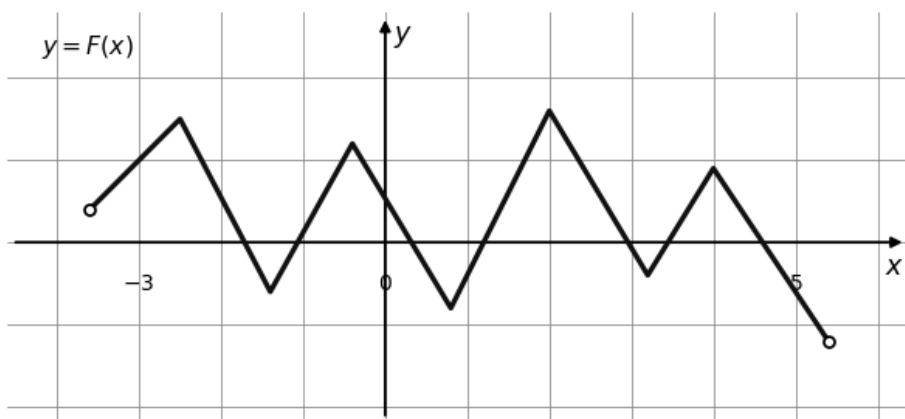
12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой $F(x)$. Найдите разность $F(5) - F(1)$.



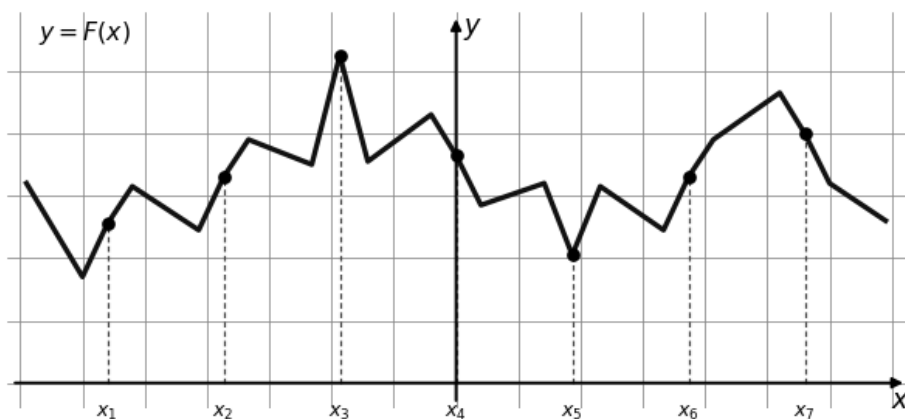
13. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



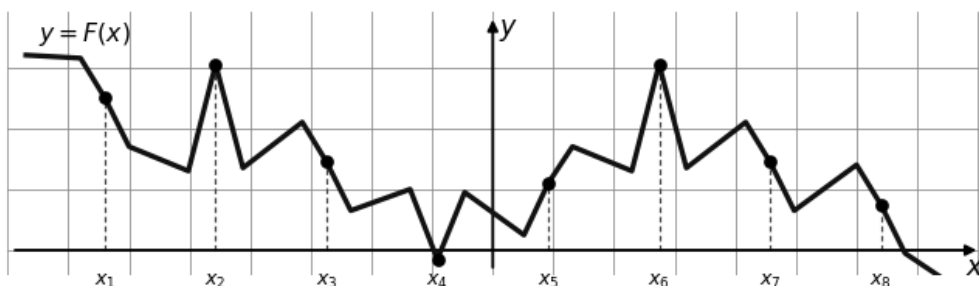
14. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



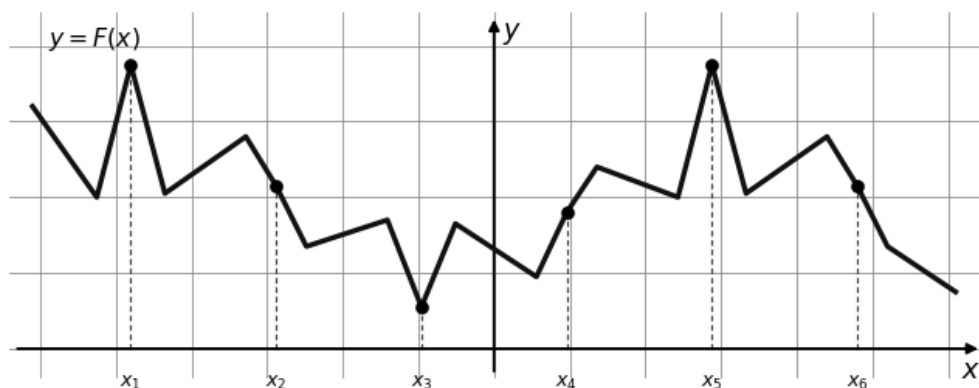
15. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



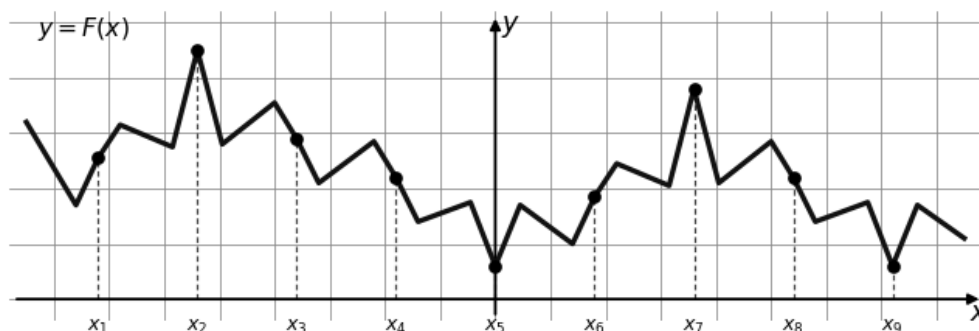
16. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



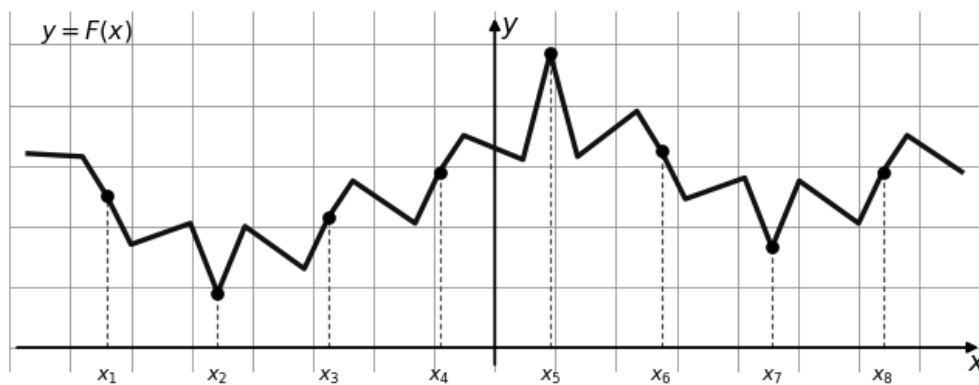
17. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, \dots, x_6$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



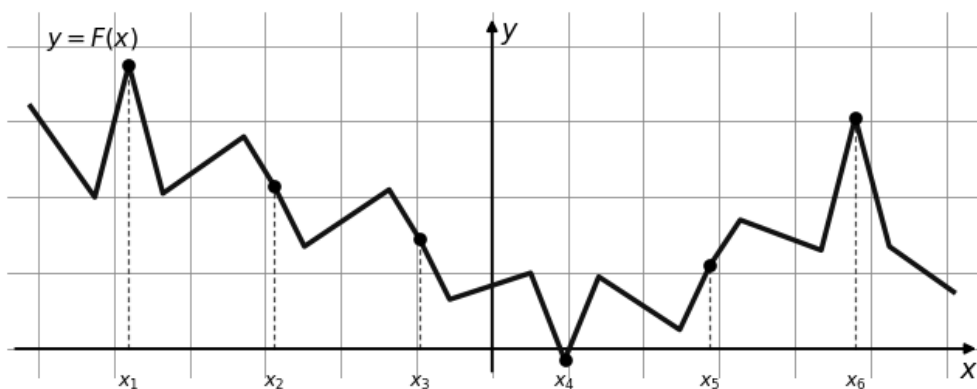
18. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, \dots, x_9$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



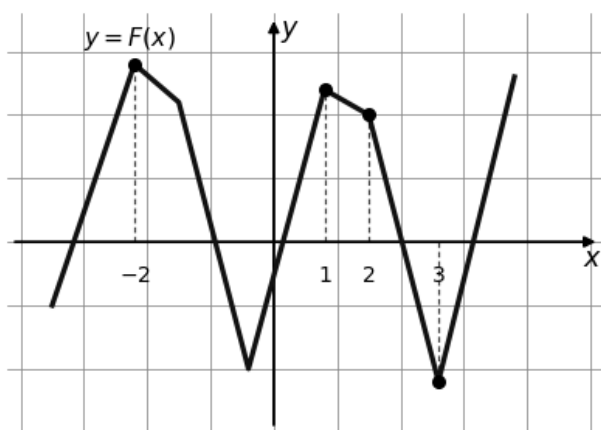
19. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



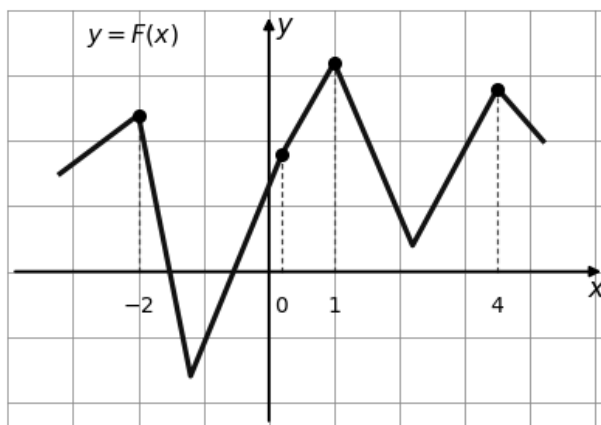
20. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, \dots, x_6$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



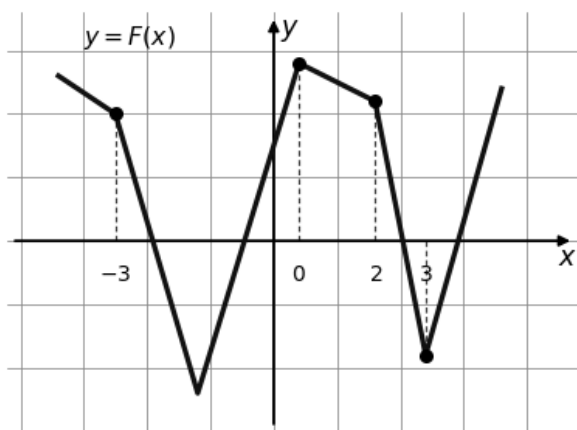
21. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки $-2, 1, 2, 3$. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наименьшее? В ответе укажите эту точку.



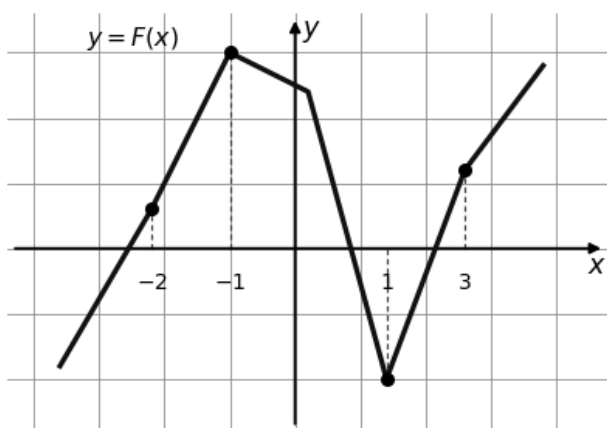
22. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки $-2, 0, 1, 4$. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наибольшее? В ответе укажите эту точку.



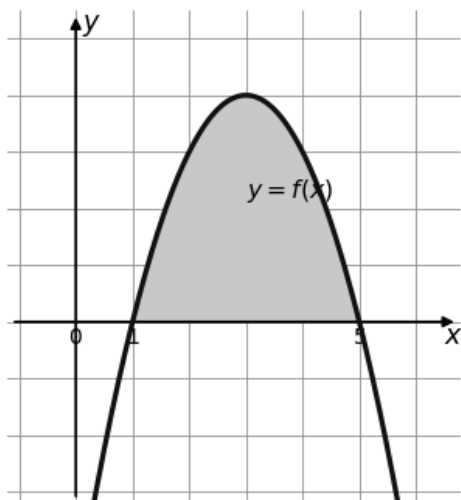
23. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки $-3, 0, 2, 3$. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наименьшее? В ответе укажите эту точку.



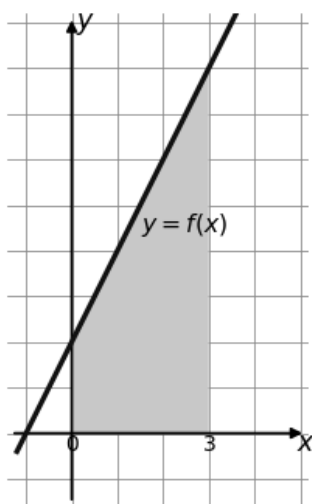
24. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки $-2, -1, 1, 3$. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наибольшее? В ответе укажите эту точку.



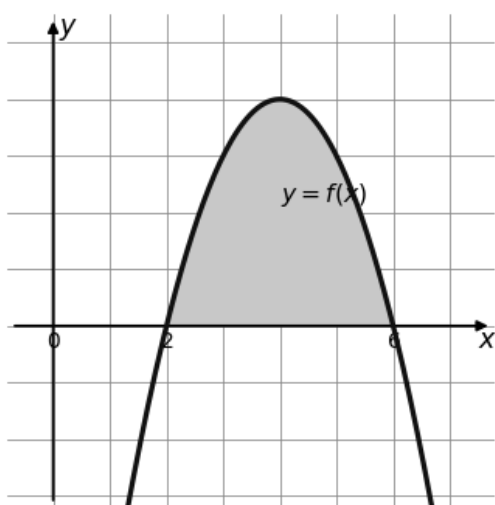
25. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 2$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



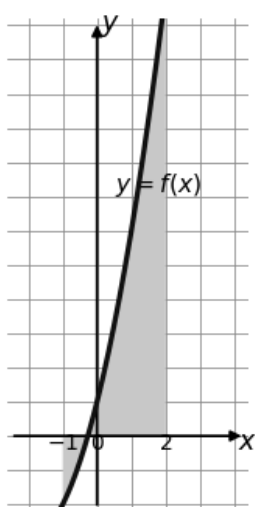
26. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = x^2 + 2x$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



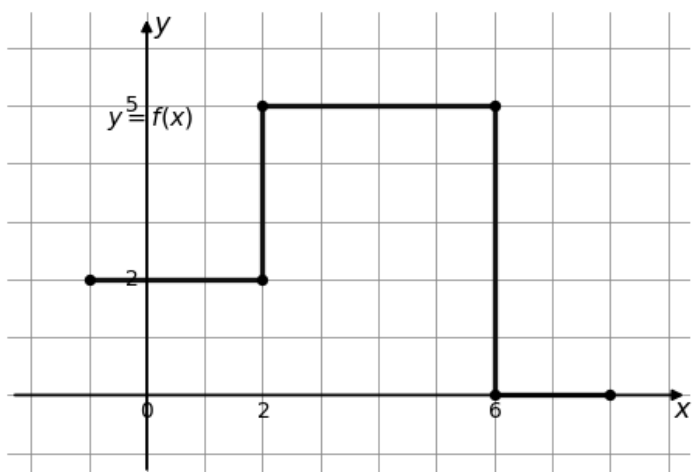
27. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x + 1$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



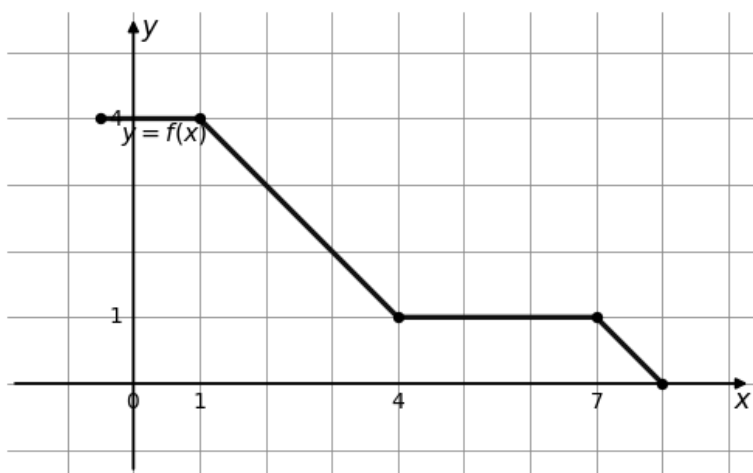
28. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



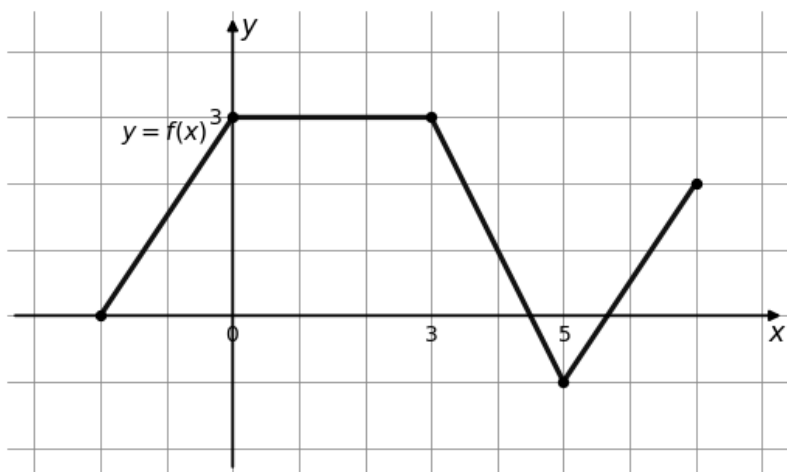
29. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(6) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



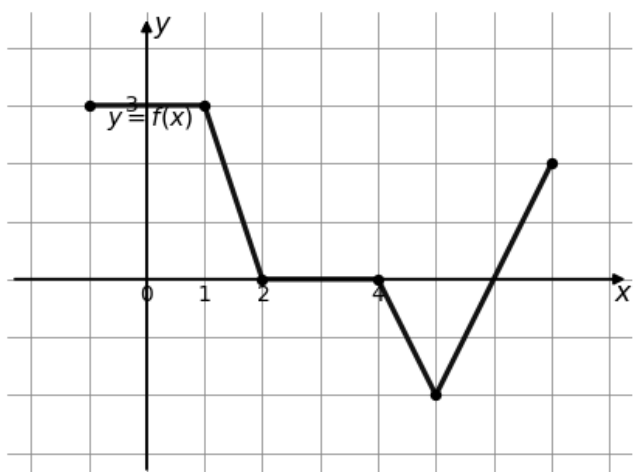
30. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(1)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



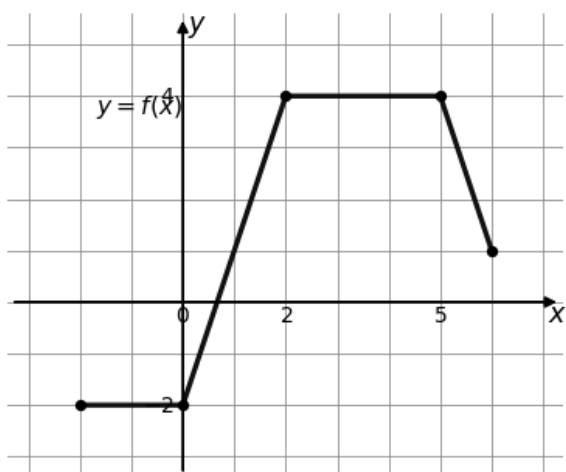
31. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите разность $F(5) - F(0)$.



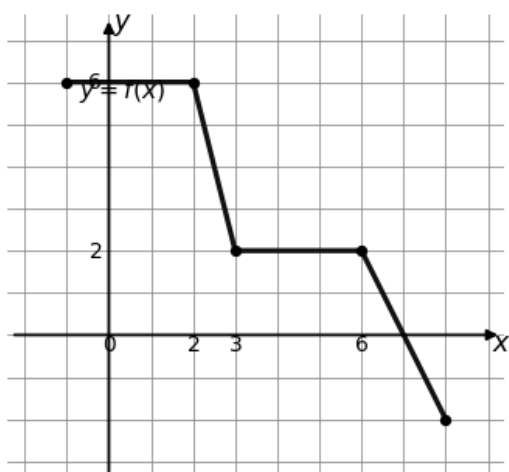
32. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите разность $F(4) - F(1)$.



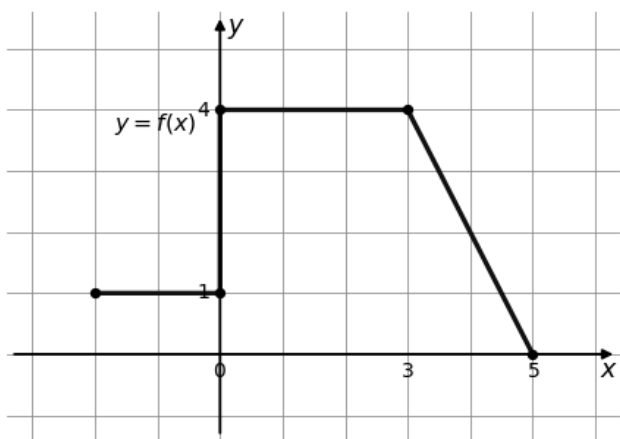
33. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите разность $F(5) - F(0)$.



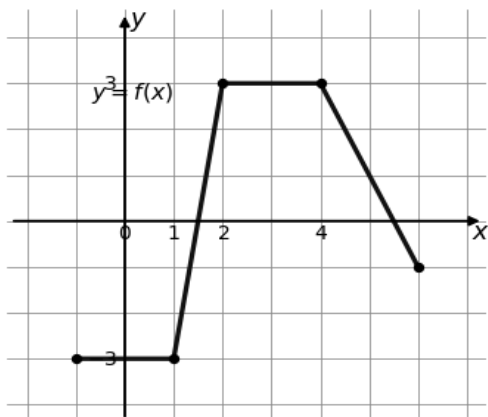
34. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите разность $F(6) - F(2)$.



35. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите разность $F(5) - F(0)$.



36. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите разность $F(4) - F(1)$.



Ответы

1.	2.	3.	4.	5.	6.
8	7	2	4	-1	4
7.	8.	9.	10.	11.	12.
36	$38/3$	9	$25/2$	18	-16
13.	14.	15.	16.	17.	18.
6	6	3	4	1	3
19.	20.	21.	22.	23.	24.
3	2	2	0	-3	-2
25.	26.	27.	28.	29.	30.
$32/3$	15	$32/3$	11	20	$21/2$
31.	32.	33.	34.	35.	36.
11	$3/2$	14	10	16	6

Вычисление значения производной в точке

1.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=3x^2 \ln x+5x-10$	13	8	9	6	14
2.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=5x \ln x-10x^2+3$	-10	-12	15	-15	18
3.	Вычислить $f'(\pi/4)$, где $f(x)=3x \sin 2x+4x^2-5$	$2\pi+3$	3π	$3+3\pi$	$3+\frac{\pi^2}{4}$	3
4.	Вычислить $f'(0)$, где $f(x)=3(x+1)\sin x+6x^2-7$	6	0	-3	-1	3
5.	Вычислить $f'(\pi/4)$, где $f(x)=x^2 e^{\sin 2x}$	$2\pi e$	$e/2(\pi+\pi^2)$	$\frac{\pi}{4}e$	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}$	$\frac{\pi}{2}e$
6.	Вычислить $f'(-0,5)$, где $f(x)=x^2 \sin(2x+1)+0,5x-1$	1	-1	-2	-1/2	3/2
7.	Вычислить $f'(0,5)$, где $f(x)=6x^2 \sin(2x-1)+4x$	10	7	5	11/2	7/2
8.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=5x^2 \ln x+2x^{-1}$	17	13	7	6	3
9.	Вычислить $f'(0)$, где $f(x)=5(x+1)\sin 2x+3x^2+5$	10	21	11	-4	4
10.	Вычислить $f'(0)$, где $f(x)=3(x-5)\sin 2x+10x^2-16$	-30	-25	-20	5	10
11.	Вычислить $f'(\pi/4)$, где $f(x)=(x-\pi/8)^2 e^{\sin 2x}$	$3/4 \pi e$	$3/8 \pi e$	$\frac{2\pi+\pi^2}{8}e$	$\frac{\pi}{4}e$	$\frac{\pi}{8}e$
12.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=10x^3 \ln x+3x^{-2}$	4	8	12	16	24
13.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=13x^3 \ln x^2+5x^{-2}$	16	36	3	55	14
14.	Вычислить $f'(\pi/4)$, где $f(x)=0,5 \sin(\cos 2x)$	1	1/2	-1/2	1/4	-1
15.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=(\sqrt{x}+1)/\sqrt{x}$	1/2	-1/2	1	-3/2	-1
16.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=x\sqrt{x}/(x+1)$	-1/2	1	3/2	-1	1/2
17.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x)=(5-2\sqrt{x})/(2\sqrt{x}-1)$	1	3	-1	-4	2
18.	Вычислить $f'(\pi/2)$, где $f(x)=(6x\pi^{-1}-5) \operatorname{ctg} x$	$2/\pi$	π	2	-2	$\frac{3\pi}{2}$
19.	Вычислить $f'(\pi/2)$, где $f(x)=\sqrt{\sin 2x+1}$	-1	$1/(2\sqrt{2})$	1	0,5	-0,5

20.	Вычислить $f'(\sqrt{3})$, где $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$	3,5	$\frac{8+\sqrt{3}}{4}$	5	1/2	1,5
21.	Вычислить $f'(\sqrt{2})$, где $f(x) = 2x\sqrt{6-x^2}$	6	$4\sqrt{2}$	2	$8/\sqrt{2}$	1
22.	Вычислить $f'(1)$, где $f(x) = 2\sqrt{x}/(2-x)$	-1	1	4	3	0
23.	Вычислить $f'(\pi/2)$, где $f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x/\pi^2$	0,25	$\frac{4-\pi}{4\pi}$	-1/4	-1/2 π	$\pi/4$
24.	Вычислить $f'(\pi/6)$, где $f(x) = \operatorname{ctg} x + 12x^3\pi^2$	-2	-3	$\frac{\pi}{18} - 2$	5	$\frac{\pi}{18} - 4$
25.	Вычислить $f'(\pi/12)$, где $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$	3	1	$3/\sqrt{2}$	2	6
26.	Вычислить $f'(\pi/2)$, где $f(x) = x \operatorname{tg} 2x$	- $\pi/2$	$1 + \pi/2$	π	$-\pi$	$1 + \pi$
27.	Вычислить $f'(\pi/2)$, где $f(x) = \cos 2x e^{\sin 2x}$	1	-2	0	2	4
28.	Вычислить $f'(2)$, где $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$	$4/\sqrt{5}$	0,4	0,8	1/5	-2/5
29.	Вычислить $f'(\pi/2)$, где $f(x) = 2x \operatorname{ctg} x$	-2 π	2 π	π	$-\pi$	$\pi/2$

Ответы

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
2	4	1	5	5	1	2	3	1	1	4	1	1	1	4
16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	
5	4	3	1	1	3	4	3	2	3	3	4	2	4	

Задача с развернутым решением. Прикладные задачи на наибольшее и наименьшее значение функции (*Каждая задача оценивается в 2 балла: обоснованно получен верный ответ — 2 балла; верная последовательность всех шагов решения при неверном ответе из-за вычислительной ошибки — 1 балл; решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев — 0 баллов*).

1. На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P , которая может быть выделена нагрузкой?

2. Генератор постоянного тока имеет ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. К генератору подключён реостат, позволяющий изменять сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, а тепловая мощность, выделяемая в нагрузке, — формулой Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова наибольшая тепловая мощность P (в ваттах), которая может быть выделена нагрузкой?

3. Аккумулятор с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом замкнут на нагрузку с сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, а выделяемая в нагрузке мощность равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшее значение мощности P (в ваттах).

4. Батарея с ЭДС $\varepsilon = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 3$ Ом питает нагрузку сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность, выделяемая в нагрузке, равна $P = I^2 R$. Какова наибольшая тепловая мощность P (в ваттах), выделяемая нагрузкой?

5. Аккумулятор с ЭДС $\varepsilon = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом питает нагреватель сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, тепловая мощность на нагревателе равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшую мощность (в ваттах), которую можно получить на нагревателе, подбирая $R > 0$.

6. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 60$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом подключён к нагрузке сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность нагрузки равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшую мощность P (в ваттах), которую можно выделить в нагрузку.

7. Ветрогенератор моделируют источником с ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом. Мощность, отдаваемая в сеть с сопротивлением R (в омах), равна $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. Какова наибольшая мощность (в ваттах), отдаваемая в сеть?

8. Солнечная батарея имеет ЭДС $\varepsilon = 36$ В и внутреннее сопротивление $r = 4$ Ом. К ней подключают потребитель с сопротивлением R (в омах). Мощность на потребителе равна $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. При каком сопротивлении нагрузки мощность будет наибольшей? В ответе укажите это сопротивление (в омах) и самую наибольшую мощность (в ваттах).

9. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 30$ В и внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом замкнут на реостат с сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность, выделяемая на реостате, равна $P = I^2 R$. При каком сопротивлении R (в омах) мощность будет наибольшей?

10. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 40$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом отдаёт во внешнюю цепь мощность $P(I) = \varepsilon I - I^2 r$, где I — сила тока в цепи (в амперах). При каком значении силы тока I (в амперах) отдаваемая во внешнюю цепь мощность будет наибольшей?

11. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,91$ — коэффициент, зависящий от отношения ширины корабля к длине волны, $\theta_0 = 9^\circ$ — угол наибольшего волнового склона, τ — период волны (в секундах), $T = 14,7$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

12. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,91$, $\theta_0 = 9^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 19,6$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

13. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,88$, $\theta_0 = 8^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 24$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,1568$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

14. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,95$, $\theta_0 = 6^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 18$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,38$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

15. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,84$, $\theta_0 = 7^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 12$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,72$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

16. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,90$, $\theta_0 = 5^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 13,5$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,38$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

17. Амплитуда колебаний радиоприёмного контура описывается формулой $A = k \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $T = 9,8$ мкс — период собственных колебаний контура, $n = 0,0792$, $k > 0$ — постоянный коэффициент, τ — период внешней радиоволны. При каком τ амплитуда будет наибольшей? Ответ дайте в микросекундах.

18. Амплитуда раскачивания подвесного моста под порывами ветра задаётся формулой $A = c \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $T = 4,9$ с — период собственных колебаний моста, $n = 0,0792$, $c > 0$ — постоянный коэффициент, τ — характерный период порывов ветра. Найдите период τ (в секундах), при котором амплитуда наибольшая.

19. К источнику переменного напряжения с амплитудой $U = 220$ В и круговой частотой ω (в радианах в секунду) последовательно подключены резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатор ёмкостью $C = 0,05$ Ф. Амплитуда силы тока в цепи (в амперах) выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

20. В последовательной цепи переменного тока с амплитудой напряжения $U = 120$ В сопротивление резистора равно $R = 15$ Ом, индуктивность катушки $L = 2,5$ Гн, ёмкость конденсатора $C = 0,1$ Ф. Амплитуда силы тока (в амперах) в зависимости от круговой частоты ω (в радианах в секунду) выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

21. Струя воды, вытекающая из сопла со скоростью $v = 12$ метров в секунду, падает на лопасти турбины, которые движутся в том же направлении со скоростью u (в метрах в секунду), причём $0 \leq u \leq v$. Мощность, передаваемая струёй лопастям, выражается формулой $N(u) = 2\rho S u (v - u)^2$, где ρ — плотность воды, S — площадь поперечного сечения струи. При какой скорости u (в метрах в секунду) передаваемая мощность будет наибольшей?

22. Лампа висит над центром круглого стола на высоте h (в метрах) от его поверхности. Освещённость точки края стола, удалённой от центра на $a = 3\sqrt{2}$ м, выражается формулой

$$E(h) = \frac{Jh}{(h^2 + a^2)\sqrt{h^2 + a^2}},$$

где J — сила света лампы. На какой высоте h (в метрах) надо повесить лампу, чтобы освещённость края стола была наибольшей?

23. Из круглого бревна диаметром $d = 30$ см выпиливают балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h (в сантиметрах), причём $b^2 + h^2 = d^2$. Прочность балки на изгиб пропорциональна величине $W = \frac{bh^2}{6}$. При какой ширине b (в сантиметрах) прочность балки будет наибольшей?

24. Расход топлива автомобилем на один километр пути (в литрах) зависит от скорости v (в километрах в час) по формуле

$$f(v) = 0,001 v + \frac{1,6}{v}.$$

При какой скорости v (в километрах в час) расход топлива на один километр пути будет наименьшим?

25. Сила тяги двигателя транспортного средства убывает с ростом скорости v (в метрах в секунду) по закону $F(v) = 180 - 0,15 v^2$ (в ньютонах), а полезная мощность равна $N(v) = F(v) \cdot v$. При какой скорости v (в метрах в секунду) полезная мощность будет наибольшей?

26. Концентрация лекарственного препарата в крови (в миллиграммах на литр) через t часов после приёма выражается формулой $c(t) = 5 t e^{-0,5t}$, где $t > 0$. Через сколько часов после приёма концентрация препарата в крови будет наибольшей?

27. В боковой стенке высокого сосуда, наполненного водой до уровня $H = 1,8$ м, на глубине h (в метрах) от поверхности воды проделано малое отверстие. Дальность полёта

струи вдоль горизонтального дна выражается формулой $L(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$. При какой глубине h (в метрах) дальность полёта струи будет наибольшей?

28. Количество вещества, получаемого в химическом реакторе за единицу времени, моделируется функцией $v(x) = \frac{200x}{(x+5)^2}$, где $x > 0$ — расход сырья. При каком расходе сырья скорость образования продукта наибольшая и чему она равна?

29. Прибыль фирмы (в тысячах рублей) при объёме выпуска x (в сотнях изделий) задаётся формулой $\Pi(x) = \frac{480x}{(x+6)^2}$, где $x > 0$. Найдите объём выпуска, при котором прибыль наибольшая, и саму наибольшую прибыль.

30. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+2}$ часть курса, а забывает $\frac{t}{18}$ часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена наибольшая часть курса?

31. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты 500 м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения; коэффициент пропорциональности $k = 100$ килограммов в секунду. Считая начальную скорость $v_0 = 0$, ускорение свободного падения $g = 10$ метров на секунду в квадрате и пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите наибольшую кинетическую энергию тела.

32. Из деревянного шара радиуса R требуется вырезать цилиндр наибольшего объёма. Найдите размеры этого цилиндра.

33. Требуется огородить забором прямоугольную площадку площадью 36 квадратных метров. Какую форму должна иметь площадка, чтобы расход материала был наименьшим?

34. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R , вырезают сектор так, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости. Найдите угол этого сектора.

35. Окно имеет форму прямоугольника с полукругом наверху. Периметр окна равен P . Каким должно быть соотношение между шириной окна и его высотой, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?

36. Число 12 разделите на две такие части, чтобы сумма удвоенной одной части и квадрата другой была наименьшей.

37. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 метров в секунду по двум прямым, образующим угол $\frac{\pi}{2}$, в направлении к вершине этого угла. В начале движения первое тело находилось от вершины на расстоянии a м, а второе — на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

- 38.** Каким должно быть сопротивление r электронагревательного прибора, включённого в цепь с сопротивлением R , чтобы в приборе выделилось наибольшее количество теплоты, если $Q = rJ^2$, где $J = \frac{E}{R+r}$?
- 39.** Из трёх одинаковых тонких досок ширины a изготовлен жёлоб с наибольшим поперечным сечением. Определите угол между большим основанием и боковой стороной сечения жёлоба.
- 40.** В прямоугольном листе картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивают открытую прямоугольную коробку. Какой должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объём коробки был наибольшим?
- 41.** Керосиновая цистерна, имеющая форму цилиндра, завершённого конусом, должна быть построена на данном круглом фундаменте радиуса R и иметь заданный объём V . При каком угле при вершине осевого сечения конуса для постройки цистерны потребуется наименьшее количество материала?
- 42.** Водный канал должен иметь заданную глубину h и заданную площадь поперечного сечения S . Поперечное сечение канала — равнобокая трапеция. Каким должен быть угол наклона её боковых сторон, чтобы потери на трение при движении воды были наименьшими, то есть чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшей?
- 43.** Суточные расходы при плавании судна состоят из постоянной части, равной a рублей, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости с коэффициентом k . При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?
- 44.** Из круглого бревна диаметра d вытёсывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b , а высота равна h . При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность пропорциональна bh^2 ?
- 45.** Прямоугольный участок площадью $S = 294$ квадратных метра огорожен забором и разделён таким же забором на две равные части. При каких линейных размерах участка общая длина забора будет наименьшей?
- 46.** На странице книги печатный текст должен занимать 5 квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое — по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?
- 47.** Требуется изготовить ящик с крышкой объёмом 72 кубических сантиметра, причём стороны основания должны относиться как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

48. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой 5,6 м. На каком расстоянии должен встать человек с уровнем глаз 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?
49. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что её нижний край на 1,8 м выше глаз человека. На каком расстоянии от стены должен встать человек, чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим?
50. Три пункта A , B и C расположены так, что угол ABC равен 60° . Из пункта A выходит автомобиль, одновременно из пункта B — поезд. Автомобиль движется к B со скоростью 80 километров в час, поезд — к C со скоростью 50 километров в час. В какой момент времени от начала движения расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?
51. Сумма высоты h и длины l окружности сечения цилиндрической почтовой посылки не должна превышать 150 см. Вычислите размеры наибольшей по объёму цилиндрической посылки, которую можно послать почтой.
52. Цена алмаза при прочих равных условиях пропорциональна квадрату его веса. Цена алмаза в 1 карат составляет a рублей. Какова наименьшая суммарная стоимость двух алмазов общим весом 4 карата?
53. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?
54. Найдите соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объёме наименьшую полную поверхность.
55. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определите его основание x и высоту y .
56. В результате измерений некоторой величины получены n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Найдите такое число x , чтобы сумма квадратов отклонений данных чисел от x была наименьшей.
57. Из зенитного орудия вертикально вверх вылетел снаряд со скоростью $v_0 = 200$ метров в секунду. Через сколько времени он достигнет наивысшего положения? Ускорение свободного падения считайте равным 10 метрам на секунду в квадрате.
58. Резервуар с квадратным дном, открытый сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каким должно быть соотношение между стороной основания и высотой, чтобы было израсходовано наименьшее количество свинца?
59. Сахарный завод производит x единиц продукции в месяц; суммарные издержки производства равны $K(x) = \frac{x}{50} + 15x + 800$. Зависимость удельной цены p от количества x единиц продукции, которое можно продать по этой цене, такова: $p = 50 - \frac{x}{10}$. При каком объёме выпуска прибыль (выручка равна xp) будет наибольшей?

Решения

Задача 1. На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P , которая может быть выделена нагрузкой?

Решение 1. Используя данные в условии формулы, выразим выделяемую тепловую мощность через ЭДС и сопротивление:

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}.$$

Подставив заданные значения ε и r , получим функцию $P(R) = \frac{2500R}{(R+1)^2}$. Найдём производную этой функции:

$$P'(R) = \frac{2500(1 - R)}{(R + 1)^3}.$$

Поскольку сопротивление нагрузки не может быть отрицательным, будем рассматривать поведение функции $P(R)$ при $R \geq 0$. Производная положительна при $0 \leq R < 1$ и отрицательна при $R > 1$. Значит, функция $P(R)$ возрастает на отрезке $[0; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$. Следовательно, функция $P(R)$ достигает наибольшего значения в точке 1:

$$P(1) = \frac{2500 \cdot 1}{4} = 625.$$

Таким образом, наибольшая тепловая мощность, которая может выделяться нагрузкой, равна 625 Вт.

Ответ: 625 Вт.

Задача 2. Генератор постоянного тока имеет ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. К генератору подключён реостат, позволяющий изменять сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, а тепловая мощность, выделяемая в нагрузке, — формулой Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова наибольшая тепловая мощность P (в ваттах), которая может быть выделена нагрузкой?

Решение 2. Выразим мощность через ЭДС и сопротивление:

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2} = \frac{10\,000R}{(R + 2)^2}.$$

Найдём производную при $R \geq 0$:

$$P'(R) = \frac{10\,000((R+2)^2 - R \cdot 2(R+2))}{(R+2)^4} = \frac{10\,000(2-R)}{(R+2)^3}.$$

Производная положительна при $0 \leq R < 2$ и отрицательна при $R > 2$, значит, $R = 2$ — точка максимума. Тогда

$$P_{\max} = \frac{10\,000 \cdot 2}{16} = 1250.$$

Ответ: 1250 Вт.

Задача 3. Аккумулятор с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом замкнут на нагрузку с сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, а выделяемая в нагрузке мощность равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшее значение мощности P (в ваттах).

Решение 3. Мощность нагрузки равна

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2} = \frac{144R}{(R+0,5)^2}, \quad R \geq 0.$$

Производная равна

$$P'(R) = \frac{144(0,5 - R)}{(R+0,5)^3}.$$

Она положительна при $0 \leq R < 0,5$ и отрицательна при $R > 0,5$, поэтому наибольшее значение достигается при $R = 0,5$:

$$P_{\max} = \frac{144 \cdot 0,5}{1} = 72.$$

Ответ: 72 Вт.

Задача 4. Батарея с ЭДС $\varepsilon = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 3$ Ом питает нагрузку сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность, выделяемая в нагрузке, равна $P = I^2 R$. Какова наибольшая тепловая мощность P (в ваттах), выделяемая нагрузкой?

Решение 4. Мощность нагрузки равна

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2} = \frac{576R}{(R+3)^2}, \quad R \geq 0.$$

Производная равна

$$P'(R) = \frac{576(3 - R)}{(R+3)^3}.$$

Она положительна при $0 \leq R < 3$ и отрицательна при $R > 3$, поэтому $R = 3$ — точка максимума. Тогда

$$P_{\max} = \frac{576 \cdot 3}{36} = 48.$$

Ответ: 48 Вт.

Задача 5. Аккумулятор с ЭДС $\varepsilon = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом питает нагреватель сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, тепловая мощность на нагревателе равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшую мощность (в ваттах), которую можно получить на нагревателе, подбирая $R > 0$.

Решение 5. Мощность на нагревателе равна

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2} = \frac{576R}{(R + 2)^2}, \quad R > 0.$$

Найдём производную:

$$P'(R) = \frac{576((R + 2)^2 - R \cdot 2(R + 2))}{(R + 2)^4} = \frac{576(2 - R)}{(R + 2)^3}.$$

При $R > 0$ имеем $P'(R) > 0$ на промежутке $(0; 2)$ и $P'(R) < 0$ на промежутке $(2; +\infty)$. Значит, $R = 2$ — точка максимума:

$$P(2) = \frac{576 \cdot 2}{16} = 72.$$

Ответ: 72 Вт.

Задача 6. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 60$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом подключён к нагрузке сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность нагрузки равна $P = I^2 R$. Найдите наибольшую мощность P (в ваттах), которую можно выделить в нагрузке.

Решение 6. Мощность нагрузки равна

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2} = \frac{3600R}{(R + 5)^2}, \quad R \geq 0.$$

Производная равна

$$P'(R) = \frac{3600(5 - R)}{(R + 5)^3}.$$

Она положительна при $0 \leq R < 5$ и отрицательна при $R > 5$, поэтому $R = 5$ — точка максимума. Тогда

$$P_{\max} = \frac{3600 \cdot 5}{100} = 180.$$

Ответ: 180 Вт.

Задача 7. Ветрогенератор моделируют источником с ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом. Мощность, отдаваемая в сеть с сопротивлением R (в омах), равна $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. Какова наибольшая мощность (в ваттах), отдаваемая в сеть?

Решение 7. Мощность, отдаваемая в сеть, равна

$$P(R) = \frac{10\,000R}{(R+5)^2}, \quad P'(R) = \frac{10\,000(5-R)}{(R+5)^3}.$$

Производная положительна при $0 < R < 5$ и отрицательна при $R > 5$, поэтому наибольшее значение достигается при $R = 5$:

$$P(5) = \frac{10\,000 \cdot 5}{100} = 500.$$

Ответ: 500 Вт.

Задача 8. Солнечная батарея имеет ЭДС $\varepsilon = 36$ В и внутреннее сопротивление $r = 4$ Ом. К ней подключают потребитель с сопротивлением R (в омах). Мощность на потребителе равна $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. При каком сопротивлении нагрузки мощность будет наибольшей? В ответе укажите это сопротивление (в омах) и самую наибольшую мощность (в ваттах).

Решение 8. Мощность на потребителе равна

$$P(R) = \frac{1296R}{(R+4)^2}, \quad R > 0.$$

Найдём производную:

$$P'(R) = \frac{1296(4-R)}{(R+4)^3}.$$

Она положительна при $0 < R < 4$ и отрицательна при $R > 4$, значит, максимум достигается при $R = 4$:

$$P(4) = \frac{1296 \cdot 4}{64} = 81.$$

Ответ: 4 Ом, 81 Вт.

Задача 9. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 30$ В и внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом замкнут на реостат с сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, мощность,

выделяемая на реостате, равна $P = I^2 R$. При каком сопротивлении R (в омах) мощность будет наибольшей?

Решение 9. Мощность, выделяемая на реостате, равна

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2} = \frac{900R}{(R + 6)^2}, \quad R \geq 0.$$

Найдём производную:

$$P'(R) = \frac{900(6 - R)}{(R + 6)^3}.$$

Производная положительна при $0 \leq R < 6$ и отрицательна при $R > 6$. Значит, функция $P(R)$ возрастает на отрезке $[0; 6]$ и убывает на луче $[6; +\infty)$, то есть наибольшая мощность выделяется при $R = 6$. Заметим, что это совпадает с внутренним сопротивлением источника.

Ответ: 6 Ом.

Задача 10. Источник тока с ЭДС $\varepsilon = 40$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом отдаёт во внешнюю цепь мощность $P(I) = \varepsilon I - I^2 r$, где I — сила тока в цепи (в амперах). При каком значении силы тока I (в амперах) отдаваемая во внешнюю цепь мощность будет наибольшей?

Решение 10. Подставим числовые данные:

$$P(I) = 40I - 2I^2, \quad I > 0.$$

Найдём производную:

$$P'(I) = 40 - 4I.$$

Она положительна при $0 < I < 10$ и отрицательна при $I > 10$, поэтому $I = 10$ — точка максимума. Наибольшая отдаваемая мощность равна

$$P(10) = 40 \cdot 10 - 2 \cdot 100 = 200.$$

Таким образом, наибольшая отдаваемая мощность равна 200 Вт.

Ответ: 10 А.

Задача 11. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,91$ — коэффициент, зависящий от отношения ширины корабля к длине волны, $\theta_0 = 9^\circ$ — угол наибольшего волнового склона, τ — период волны (в секундах), $T = 14,7$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Решение 11. Так как $A > 0$, то максимумы A и A^2 достигаются в одной точке. Положим $x = \tau^2$, $x > 0$. Достаточно исследовать на экстремум функцию $A^2 = (k\theta_0)^2 f(x)$, где при $x > 0$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + (n-2)T^2x + T^4}.$$

Знаменатель при $x > 0$ положителен. Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + (n-2)T^2x + T^4) - x^2(2x + (n-2)T^2)}{(x^2 + (n-2)T^2x + T^4)^2}.$$

После упрощения получаем:

$$f'(x) = \frac{T^2x(2T^2 - (2-n)x)}{(x^2 + (n-2)T^2x + T^4)^2}.$$

В области определения множители T^2x и знаменатель положительны, поэтому

$$f'(x) = 0; \quad 2T^2 - (2-n)x = 0; \quad x_0 = \frac{T^2}{1 - \frac{n}{2}}.$$

Так как $n = 0,0792$, то $f'(x) > 0$ при $0 < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, поэтому x_0 — точка максимума функции f . Следовательно,

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n}{2}}} = \frac{14,7}{\sqrt{1 - \frac{0,0792}{2}}} = \frac{14,7}{0,98} = 15.$$

Ответ: 15.

Задача 12. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2T^2}}$, где $k = 0,91$, $\theta_0 = 9^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 19,6$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Решение 12. Как и в задаче 11, положим $x = \tau^2$, $x > 0$; максимумы A и A^2 достигаются в одной точке, причём

$$A^2 = (k\theta_0)^2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + (n-2)T^2x + T^4}.$$

Производная дроби равна

$$\frac{T^2x(2T^2 - (2-n)x)}{(x^2 + (n-2)T^2x + T^4)^2},$$

она положительна при $0 < x < x_0$ и отрицательна при $x > x_0$, где $x_0 = \frac{T^2}{1-\frac{n}{2}}$.

Следовательно,

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{n}{2}}} = \frac{19,6}{\sqrt{1-\frac{0,0792}{2}}} = \frac{19,6}{0,98} = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 13. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2-\tau^2)^2+n\tau^2T^2}}$, где $k = 0,88$, $\theta_0 = 8^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 24$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,1568$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Решение 13. Рассуждая так же, как в задаче 11, получаем точку максимума $x_0 = \frac{T^2}{1-\frac{n}{2}}$ для $x = \tau^2$, откуда

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{n}{2}}} = \frac{24}{\sqrt{1-\frac{0,1568}{2}}} = \frac{24}{\sqrt{0,9216}} = \frac{24}{0,96} = 25.$$

Ответ: 25.

Задача 14. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2-\tau^2)^2+n\tau^2T^2}}$, где $k = 0,95$, $\theta_0 = 6^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 18$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,38$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Решение 14. Рассуждая так же, как в задаче 11, получаем

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{n}{2}}} = \frac{18}{\sqrt{1-\frac{0,38}{2}}} = \frac{18}{\sqrt{0,81}} = \frac{18}{0,9} = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 15. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2-\tau^2)^2+n\tau^2T^2}}$, где $k = 0,84$, $\theta_0 = 7^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 12$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,72$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Решение 15. Рассуждая так же, как в задаче 11, получаем

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n}{2}}} = \frac{12}{\sqrt{1 - \frac{0,72}{2}}} = \frac{12}{\sqrt{0,64}} = \frac{12}{0,8} = 15.$$

Ответ: 15.

Задача 16. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $k = 0,90$, $\theta_0 = 5^\circ$, τ — период волны (в секундах), $T = 13,5$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0,38$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

Решение 16. Рассуждая так же, как в задаче 11, получаем

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n}{2}}} = \frac{13,5}{\sqrt{1 - \frac{0,38}{2}}} = \frac{13,5}{\sqrt{0,81}} = \frac{13,5}{0,9} = 15.$$

Ответ: 15.

Задача 17. Амплитуда колебаний радиоприёмного контура описывается формулой $A = k \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $T = 9,8$ мкс — период собственных колебаний контура, $n = 0,0792$, $k > 0$ — постоянный коэффициент, τ — период внешней радиоволны. При каком τ амплитуда будет наибольшей? Ответ дайте в микросекундах.

Решение 17. Положим $x = \tau^2 > 0$. Максимумы величины A и функции

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + (n - 2)T^2x + T^4}$$

совпадают. Аналогично задаче 11 получаем

$$f'(x) = \frac{T^2x(2T^2 - (2 - n)x)}{(x^2 + (n - 2)T^2x + T^4)^2},$$

откуда точка максимума $x_0 = \frac{T^2}{1 - \frac{n}{2}}$ и

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n}{2}}} = \frac{9,8}{\sqrt{1 - 0,0396}} = \frac{9,8}{\sqrt{0,9604}} = \frac{9,8}{0,98} = 10.$$

Ответ: 10 мкс.

Задача 18. Амплитуда раскачивания подвешенного моста под порывами ветра задаётся формулой $A = c \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$, где $T = 4,9$ с — период собственных колебаний моста, $n = 0,0792$, $c > 0$ — постоянный коэффициент, τ — характерный период порывов ветра. Найдите период τ (в секундах), при котором амплитуда наибольшая.

Решение 18. Положим $x = \tau^2 > 0$. Максимумы величины A и функции

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + (n - 2)T^2x + T^4}$$

совпадают. Аналогично задаче 11

$$f'(x) = \frac{T^2x(2T^2 - (2 - n)x)}{(x^2 + (n - 2)T^2x + T^4)^2},$$

поэтому точка максимума задаётся равенством

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n}{2}}} = \frac{4,9}{\sqrt{1 - \frac{0,0792}{2}}} = \frac{4,9}{\sqrt{0,9604}} = \frac{4,9}{0,98} = 5.$$

Ответ: 5 с.

Задача 19. К источнику переменного напряжения с амплитудой $U = 220$ В и круговой частотой ω (в радианах в секунду) последовательно подключены резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатор ёмкостью $C = 0,05$ Ф. Амплитуда силы тока в цепи (в амперах) выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

Решение 19. Числитель дроби постоянен, поэтому сила тока $I(\omega)$ наибольшая тогда, когда подкоренное выражение наименьшее. Так как слагаемое R^2 постоянно, достаточно найти наименьшее значение функции

$$g(\omega) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2, \quad \omega > 0.$$

Величина $g(\omega)$ неотрицательна, поэтому её наименьшее значение равно нулю и достигается, если такое ω существует. Действительно,

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Подставим числовые данные:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 0,05}} = \frac{1}{\sqrt{0,01}} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

При этом значении $I = \frac{U}{R} = \frac{220}{40} = 5,5$ А.

Ответ: 10 радиан в секунду.

Задача 20. В последовательной цепи переменного тока с амплитудой напряжения $U = 120$ В сопротивление резистора равно $R = 15$ Ом, индуктивность катушки $L = 2,5$ Гн, ёмкость конденсатора $C = 0,1$ Ф. Амплитуда силы тока (в амперах) в зависимости от круговой частоты ω (в радианах в секунду) выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

Решение 20. Как и в задаче 19, сила тока наибольшая при обращении в нуль разности $\omega L - \frac{1}{\omega C}$, то есть при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Подставим данные:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2,5 \cdot 0,1}} = \frac{1}{\sqrt{0,25}} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Ответ: 2 радиана в секунду.

Задача 21. Струя воды, вытекающая из сопла со скоростью $v = 12$ метров в секунду, падает на лопасти турбины, которые движутся в том же направлении со скоростью u (в метрах в секунду), причём $0 \leq u \leq v$. Мощность, передаваемая струёй лопастям, выражается формулой $N(u) = 2\rho S u(v - u)^2$, где ρ — плотность воды, S — площадь поперечного сечения струи. При какой скорости u (в метрах в секунду) передаваемая мощность будет наибольшей?

Решение 21. Подставим $v = 12$ в формулу мощности:

$$N(u) = 2\rho S u(12 - u)^2, \quad 0 \leq u \leq 12.$$

Множитель $2\rho S$ положителен и постоянен, поэтому достаточно исследовать функцию $\varphi(u) = u(12 - u)^2$. Найдём производную:

$$\varphi'(u) = (12 - u)^2 - 2u(12 - u) = (12 - u)(12 - 3u).$$

На отрезке $[0; 12]$ множитель $12 - u$ неотрицателен, поэтому знак производной совпадает со знаком выражения $12 - 3u$: производная положительна при $0 \leq u < 4$ и отрицательна при $4 < u < 12$. Значит, $u = 4$ — точка максимума.

Ответ: 4 метра в секунду.

Задача 22. Лампа висит над центром круглого стола на высоте h (в метрах) от его поверхности. Освещённость точки края стола, удалённой от центра на $a = 3\sqrt{2}$ м, выражается формулой

$$E(h) = \frac{Jh}{(h^2 + a^2)\sqrt{h^2 + a^2}},$$

где J — сила света лампы. На какой высоте h (в метрах) надо повесить лампу, чтобы освещённость края стола была наибольшей?

Решение 22. Рассмотрим функцию $E(h) = \frac{Jh}{(h^2 + a^2)\sqrt{h^2 + a^2}}$ при $h > 0$. Дифференцируя, после упрощения получаем:

$$E'(h) = \frac{J(a^2 - 2h^2)}{(h^2 + a^2)^2\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Знаменатель положителен, поэтому знак производной совпадает со знаком выражения $a^2 - 2h^2$: производная положительна при $0 < h < \frac{a}{\sqrt{2}}$ и отрицательна при $h > \frac{a}{\sqrt{2}}$. Значит, $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — точка максимума. Подставим $a = 3\sqrt{2}$:

$$h = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$$

Ответ: 3 м.

Задача 23. Из круглого бревна диаметром $d = 30$ см выпиливают балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h (в сантиметрах), причём $b^2 + h^2 = d^2$. Прочность балки на изгиб пропорциональна величине $W = \frac{bh^2}{6}$. При какой ширине b (в сантиметрах) прочность балки будет наибольшей?

Решение 23. Из условия $b^2 + h^2 = d^2$ получаем $h^2 = 900 - b^2$, где $0 < b < 30$. Тогда

$$W(b) = \frac{b(900 - b^2)}{6} = 150b - \frac{b^3}{6}.$$

Найдём производную:

$$W'(b) = 150 - \frac{b^2}{2} = \frac{300 - b^2}{2}.$$

Производная положительна при $0 < b < 10\sqrt{3}$ и отрицательна при $10\sqrt{3} < b < 30$, поэтому $b = 10\sqrt{3}$ — точка максимума. При этом высота сечения равна $h = \sqrt{900 - 300} = 10\sqrt{6}$ см.

Ответ: $10\sqrt{3} \approx 17,3$ см.

Задача 24. Расход топлива автомобилем на один километр пути (в литрах) зависит от скорости v (в километрах в час) по формуле

$$f(v) = 0,001 v + \frac{1,6}{v}.$$

При какой скорости v (в километрах в час) расход топлива на один километр пути будет наименьшим?

Решение 24. Рассмотрим функцию $f(v) = 0,001 v + \frac{1,6}{v}$ при $v > 0$ и найдём её производную:

$$f'(v) = 0,001 - \frac{1,6}{v^2} = \frac{0,001 v^2 - 1,6}{v^2}.$$

Знаменатель положителен, а числитель обращается в нуль при $v^2 = 1600$, то есть при $v = 40$. Производная отрицательна при $0 < v < 40$ и положительна при $v > 40$, значит, $v = 40$ — точка минимума. Наименьший расход равен $f(40) = 0,001 \cdot 40 + \frac{1,6}{40} = 0,04 + 0,04 = 0,08$ литра на километр.

Ответ: 40 километров в час.

Задача 25. Сила тяги двигателя транспортного средства убывает с ростом скорости v (в метрах в секунду) по закону $F(v) = 180 - 0,15 v^2$ (в ньютонах), а полезная мощность равна $N(v) = F(v) \cdot v$. При какой скорости v (в метрах в секунду) полезная мощность будет наибольшей?

Решение 25. Полезная мощность равна

$$N(v) = (180 - 0,15 v^2)v = 180v - 0,15 v^3, \quad v > 0.$$

Найдём производную:

$$N'(v) = 180 - 0,45 v^2.$$

Она обращается в нуль при $v^2 = 400$, то есть при $v = 20$; при $0 < v < 20$ производная положительна, при $v > 20$ — отрицательна. Значит, $v = 20$ — точка максимума, а наибольшая мощность равна

$$N(20) = 180 \cdot 20 - 0,15 \cdot 8000 = 3600 - 1200 = 2400.$$

Таким образом, наибольшая полезная мощность равна 2400 Вт.

Ответ: 20 метров в секунду.

Задача 26. Концентрация лекарственного препарата в крови (в миллиграммах на литр) через t часов после приёма выражается формулой $c(t) = 5 t e^{-0,5t}$, где $t > 0$. Через сколько часов после приёма концентрация препарата в крови будет наибольшей?

Решение 26. Найдём производную функции $c(t) = 5 t e^{-0,5t}$ при $t > 0$:

$$c'(t) = 5e^{-0,5t} + 5t \cdot (-0,5)e^{-0,5t} = 5e^{-0,5t}(1 - 0,5t).$$

Множитель $5e^{-0,5t}$ положителен, поэтому знак производной совпадает со знаком выражения $1 - 0,5t$: производная положительна при $0 < t < 2$ и отрицательна при $t > 2$. Значит, $t = 2$ — точка максимума.

Ответ: через 2 часа.

Задача 27. В боковой стенке высокого сосуда, наполненного водой до уровня $H = 1,8$ м, на глубине h (в метрах) от поверхности воды проделано малое отверстие. Дальность полёта струи вдоль горизонтального дна выражается формулой $L(h) = 2\sqrt{h(H - h)}$. При какой глубине h (в метрах) дальность полёта струи будет наибольшей?

Решение 27. Так как $L(h) > 0$ при $0 < h < H$, максимумы L и L^2 достигаются в одной точке. Рассмотрим

$$L^2(h) = 4h(1,8 - h) = 7,2h - 4h^2.$$

Это квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом; её производная равна $7,2 - 8h$ и обращается в нуль при $h = 0,9$, причём слева от этой точки производная положительна, а справа отрицательна. Значит, $h = 0,9$ — точка максимума, а наибольшая дальность равна

$$L(0,9) = 2\sqrt{0,9 \cdot 0,9} = 1,8.$$

Таким образом, наибольшая дальность полёта струи равна 1,8 м.

Ответ: 0,9 м.

Задача 28. Количество вещества, получаемого в химическом реакторе за единицу времени, моделируется функцией $v(x) = \frac{200x}{(x+5)^2}$, где $x > 0$ — расход сырья. При каком расходе сырья скорость образования продукта наибольшая и чему она равна?

Решение 28. Найдём производную функции $v(x) = \frac{200x}{(x+5)^2}$ при $x > 0$:

$$v'(x) = \frac{200((x+5)^2 - x \cdot 2(x+5))}{(x+5)^4} = \frac{200(5-x)}{(x+5)^3}.$$

Производная положительна при $0 < x < 5$ и отрицательна при $x > 5$, поэтому $x = 5$ — точка максимума:

$$v(5) = \frac{200 \cdot 5}{36} = \frac{1000}{36} = \frac{250}{9}.$$

Ответ: расход 5, скорость $\frac{250}{9}$.

Задача 29. Прибыль фирмы (в тысячах рублей) при объёме выпуска x (в сотнях изделий) задаётся формулой $P(x) = \frac{480x}{(x+6)^2}$, где $x > 0$. Найдите объём выпуска, при котором прибыль наибольшая, и саму наибольшую прибыль.

Решение 29. Найдём производную функции $P(x) = \frac{480x}{(x+6)^2}$ при $x > 0$:

$$P'(x) = \frac{480((x+6)^2 - x \cdot 2(x+6))}{(x+6)^4} = \frac{480(6-x)}{(x+6)^3}.$$

Производная положительна при $0 < x < 6$ и отрицательна при $x > 6$, поэтому $x = 6$ — точка максимума:

$$P(6) = \frac{480 \cdot 6}{144} = 20.$$

Ответ: 6 сотен изделий, 20 тыс. руб.

Задача 30. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+2}$ часть курса, а забывает $\frac{t}{18}$ часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена наибольшая часть курса?

Решение 30. К моменту t изучена часть курса

$$f(t) = \frac{t}{t+2} - \frac{t}{18}, \quad t > 0.$$

Найдём производную:

$$f'(t) = \frac{2}{(t+2)^2} - \frac{1}{18}.$$

Она обращается в нуль при $(t+2)^2 = 36$, то есть при $t = 4$; при $0 < t < 4$ производная положительна, при $t > 4$ — отрицательна. Значит, $t = 4$ — точка максимума, причём

$$f(4) = \frac{4}{6} - \frac{4}{18} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: 4 дня.

Задача 31. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты 500 м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения; коэффициент пропорциональности $k = 100$ килограммов в секунду. Считая начальную скорость $v_0 = 0$, ускорение свободного падения $g = 10$ метров на секунду в квадрате и пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите наибольшую кинетическую энергию тела.

Решение 31. Масса тела равна $m(t) = 3000 - 100t$, скорость равна $v(t) = gt = 10t$, поэтому кинетическая энергия равна

$$E(t) = \frac{m(t)v^2(t)}{2} = \frac{(3000 - 100t) \cdot 100t^2}{2} = 150\,000t^2 - 5000t^3.$$

Время падения найдём из равенства $500 = \frac{gt^2}{2} = 5t^2$, откуда $t = 10$ с. Значит, $0 \leq t \leq 10$.
Далее,

$$E'(t) = 300\,000t - 15\,000t^2 = 15\,000t(20 - t).$$

На промежутке $(0; 10)$ производная положительна (критическая точка $t = 20$ лежит вне отрезка), поэтому энергия возрастает и наибольшее значение принимает в момент падения:

$$E(10) = 150\,000 \cdot 100 - 5000 \cdot 1000 = 10\,000\,000.$$

Ответ: 10^7 Дж.

Задача 32. Из деревянного шара радиуса R требуется вырезать цилиндр наибольшего объёма. Найдите размеры этого цилиндра.

Решение 32. Пусть r — радиус основания цилиндра, а h — половина его высоты; тогда $r^2 + h^2 = R^2$ и

$$V(h) = 2\pi r^2 h = 2\pi h(R^2 - h^2), \quad 0 < h < R.$$

Найдём производную:

$$V'(h) = 2\pi(R^2 - 3h^2).$$

Она положительна при $0 < h < \frac{R}{\sqrt{3}}$ и отрицательна при $h > \frac{R}{\sqrt{3}}$, значит, $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. Тогда высота цилиндра равна $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, радиус основания равен

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{3}, \quad V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}.$$

Ответ: высота $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, радиус основания $\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

Задача 33. Требуется огородить забором прямоугольную площадку площадью 36 квадратных метров. Какую форму должна иметь площадка, чтобы расход материала был наименьшим?

Решение 33. Если одна сторона равна x , то другая равна $\frac{36}{x}$, и длина забора равна

$$P(x) = 2x + \frac{72}{x}, \quad x > 0.$$

Найдём производную:

$$P'(x) = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x^2 - 36)}{x^2}.$$

Она отрицательна при $0 < x < 6$ и положительна при $x > 6$, поэтому $x = 6$ — точка минимума. Тогда вторая сторона тоже равна 6 м, а длина забора равна 24 м.

Ответ: квадрат со стороной 6 м.

Задача 34. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R , вырезают сектор так, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости. Найдите угол этого сектора.

Решение 34. Пусть r — радиус основания воронки; её образующая равна R , а высота равна $\sqrt{R^2 - r^2}$. Тогда

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Так как $V > 0$, максимум V достигается там же, где максимум величины V^2 , то есть где максимальна функция $g(u) = u^2(R^2 - u)$ при $u = r^2$, $0 < u < R^2$. Далее,

$$g'(u) = 2uR^2 - 3u^2 = u(2R^2 - 3u),$$

производная положительна при $0 < u < \frac{2R^2}{3}$ и отрицательна при $u > \frac{2R^2}{3}$, значит, $u = \frac{2R^2}{3}$ — точка максимума. Тогда

$$r = \frac{R\sqrt{6}}{3}.$$

Угол сектора равен

$$\varphi = \frac{2\pi r}{R} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 294^\circ.$$

Ответ: $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 294^\circ$.

Задача 35. Окно имеет форму прямоугольника с полукругом наверху. Периметр окна равен P . Каким должно быть соотношение между шириной окна и его высотой, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?

Решение 35. Пусть ширина окна равна $2r$ (это диаметр полукруга), а высота прямоугольной части равна y . Тогда

$$P = 2r + 2y + \pi r, \quad S = 2ry + \frac{\pi r^2}{2}.$$

Из первого равенства $y = \frac{P - (2 + \pi)r}{2}$, поэтому

$$S(r) = r(P - (2 + \pi)r) + \frac{\pi r^2}{2} = Pr - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2.$$

Это квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом; её производная $S'(r) = P - (4 + \pi)r$ обращается в нуль при $r = \frac{P}{4+\pi}$, что и даёт максимум. При этом

$$y = \frac{P - (2 + \pi) \frac{P}{4 + \pi}}{2} = \frac{P}{4 + \pi} = r,$$

то есть высота окна равна $y + r = 2r$ и совпадает с его шириной.

Ответ: ширина окна равна его высоте.

Задача 36. Число 12 разделите на две такие части, чтобы сумма удвоенной одной части и квадрата другой была наименьшей.

Решение 36. Пусть части равны x и $12 - x$, где $0 < x < 12$. Рассмотрим

$$f(x) = 2x + (12 - x)^2.$$

Найдём производную:

$$f'(x) = 2 - 2(12 - x) = 2(x - 11).$$

Она отрицательна при $x < 11$ и положительна при $x > 11$, значит, $x = 11$ — точка минимума, и наименьшая сумма равна $22 + 1 = 23$.

Ответ: 11 и 1.

Задача 37. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 метров в секунду по двум прямым, образующим угол $\frac{\pi}{2}$, в направлении к вершине этого угла. В начале движения первое тело находилось от вершины на расстоянии a м, а второе — на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

Решение 37. Через t секунд тела удалены от вершины угла на $a - v_1 t$ и $b - v_2 t$. Так как угол прямой, квадрат расстояния между телами равен

$$d^2(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2.$$

Минимумы d и d^2 достигаются в одной точке. Найдём производную:

$$(d^2)'(t) = -2v_1(a - v_1 t) - 2v_2(b - v_2 t) = 2((v_1^2 + v_2^2)t - av_1 - bv_2).$$

Это линейная функция, меняющая знак с минуса на плюс, поэтому точка минимума единственна:

$$t = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Ответ: $t = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$ с.

Задача 38. Каким должно быть сопротивление r электронагревательного прибора, включённого в цепь с сопротивлением R , чтобы в приборе выделилось наибольшее количество теплоты, если $Q = rJ^2$, где $J = \frac{E}{R+r}$?

Решение 38. Подставив выражение для силы тока, получим

$$Q(r) = \frac{E^2 r}{(R + r)^2}, \quad r > 0.$$

Найдём производную:

$$Q'(r) = \frac{E^2((R + r)^2 - r \cdot 2(R + r))}{(R + r)^4} = \frac{E^2(R - r)}{(R + r)^3}.$$

Она положительна при $0 < r < R$ и отрицательна при $r > R$, поэтому $r = R$ — точка максимума, причём $Q_{\max} = \frac{E^2}{4R}$.

Ответ: $r = R$.

Задача 39. Из трёх одинаковых тонких досок ширины a изготовлен жёлоб с наибольшим поперечным сечением. Определите угол между большим основанием и боковой стороной сечения жёлоба.

Решение 39. Сечение жёлоба — равнобокая трапеция с нижним основанием a и боковыми сторонами a ; пусть φ — угол наклона боковой стороны к горизонту, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда верхнее основание равно $a + 2a\cos\varphi$, высота равна $a\sin\varphi$, а площадь равна

$$S(\varphi) = \frac{(a + a + 2a\cos\varphi)a\sin\varphi}{2} = a^2(1 + \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Найдём производную:

$$S'(\varphi) = a^2(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1) = a^2(2\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + 1).$$

Множитель $\cos\varphi + 1$ положителен, поэтому производная положительна при $\cos\varphi > \frac{1}{2}$ и отрицательна при $\cos\varphi < \frac{1}{2}$, то есть $\varphi = 60^\circ$ — точка максимума. Большим основанием служит верхнее (оно равно $2a$), и угол между ним и боковой стороной равен φ ; угол при меньшем основании равен 120° .

Ответ: 60° .

Задача 40. В прямоугольном листе картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивают открытую прямоугольную коробку. Какой должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объём коробки был наибольшим?

Решение 40. Если сторона вырезаемого квадрата равна x , то

$$V(x) = x(48 - 2x)(30 - 2x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x, \quad 0 < x < 15.$$

Найдём производную:

$$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440 = 12(x - 6)(x - 20).$$

На промежутке $(0; 15)$ множитель $x - 20$ отрицателен, поэтому производная положительна при $x < 6$ и отрицательна при $x > 6$. Значит, $x = 6$ — точка максимума, и

$$V(6) = 6 \cdot 36 \cdot 18 = 3888.$$

Ответ: 6 см (объём 3888 кубических сантиметров).

Задача 41. Керосиновая цистерна, имеющая форму цилиндра, завершённого конусом, должна быть построена на данном круглом фундаменте радиуса R и иметь заданный объём V . При каком угле при вершине осевого сечения конуса для постройки цистерны потребуется наименьшее количество материала?

Решение 41. Пусть h — высота конуса, H — высота цилиндра. Из условия на объём

$$V = \pi R^2 H + \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{h}{3}.$$

Количество материала пропорционально сумме боковых поверхностей цилиндра и конуса:

$$S(h) = 2\pi R H + \pi R \sqrt{R^2 + h^2} = \frac{2V}{R} - \frac{2\pi R h}{3} + \pi R \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Найдём производную:

$$S'(h) = -\frac{2\pi R}{3} + \frac{\pi R h}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Она обращается в нуль при $\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{2}{3}$, то есть при $5h^2 = 4R^2$ и $h = \frac{2R}{\sqrt{5}}$; при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс, значит, это точка минимума. Если β — половина угла при вершине осевого сечения, то

$$\sin \beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad 2\beta = 2\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 96^\circ.$$

Ответ: $2\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 96^\circ$.

Задача 42. Водный канал должен иметь заданную глубину h и заданную площадь поперечного сечения S . Поперечное сечение канала — равнобокая трапеция. Каким должен быть угол наклона её боковых сторон, чтобы потери на трение при движении воды были наименьшими, то есть чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшей?

Решение 42. Пусть α — угол наклона боковой стороны к нижнему основанию, b — нижнее основание. Боковая сторона равна $\frac{h}{\sin\alpha}$, верхнее основание равно $b + \frac{2h\cos\alpha}{\sin\alpha}$, поэтому

$$S = h \left(b + \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha} \right) \Rightarrow b = \frac{S}{h} - \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тогда сумма нижнего основания и боковых сторон равна

$$L(\alpha) = b + \frac{2h}{\sin\alpha} = \frac{S}{h} + h \cdot \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Найдём производную:

$$L'(\alpha) = h \cdot \frac{\sin^2\alpha - (2 - \cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = h \cdot \frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Она отрицательна при $\cos\alpha > \frac{1}{2}$ и положительна при $\cos\alpha < \frac{1}{2}$, значит, $\alpha = 60^\circ$ — точка минимума.

Ответ: 60° .

Задача 43. Суточные расходы при плавании судна состоят из постоянной части, равной a рублей, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости с коэффициентом k . При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

Решение 43. Пусть длина рейса равна s . Плавание занимает $\frac{s}{v}$ суток, а суточные расходы равны $a + kv^3$, поэтому стоимость рейса равна

$$C(v) = \frac{s}{v}(a + kv^3) = s \left(\frac{a}{v} + kv^2 \right), \quad v > 0.$$

Найдём производную:

$$C'(v) = s \left(-\frac{a}{v^2} + 2kv \right) = \frac{s(2kv^3 - a)}{v^2}.$$

Она отрицательна при $v^3 < \frac{a}{2k}$ и положительна при $v^3 > \frac{a}{2k}$, поэтому наименьшая стоимость достигается при

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

Ответ: $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

Задача 44. Из круглого бревна диаметра d вытёсывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b , а высота равна h . При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность пропорциональна bh^2 ?

Решение 44. Из равенства $b^2 + h^2 = d^2$ получаем $h^2 = d^2 - b^2$, поэтому прочность пропорциональна

$$W(b) = b(d^2 - b^2), \quad 0 < b < d.$$

Найдём производную:

$$W'(b) = d^2 - 3b^2.$$

Она положительна при $0 < b < \frac{d}{\sqrt{3}}$ и отрицательна при $b > \frac{d}{\sqrt{3}}$, значит, максимум достигается при

$$b = \frac{d\sqrt{3}}{3}, \quad h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}.$$

Задача 23 — частный случай при $d = 30$ см.

Ответ: $b = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $h = \frac{d\sqrt{6}}{3}$.

Задача 45. Прямоугольный участок площадью $S = 294$ квадратных метра огорожен забором и разделён таким же забором на две равные части. При каких линейных размерах участка общая длина забора будет наименьшей?

Решение 45. Пусть стороны участка равны x и y , причём перегородка параллельна стороне длины y . Тогда $xy = 294$ и общая длина забора равна

$$L(x) = 2x + 3y = 2x + \frac{882}{x}, \quad x > 0.$$

Найдём производную:

$$L'(x) = 2 - \frac{882}{x^2} = \frac{2(x^2 - 441)}{x^2}.$$

Она отрицательна при $0 < x < 21$ и положительна при $x > 21$, поэтому $x = 21$ — точка минимума. Тогда $y = 14$ и $L = 84$ м.

Ответ: 21 м и 14 м.

Задача 46. На странице книги печатный текст должен занимать 5 квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое — по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Решение 46. Пусть x и y — ширина и высота печатного текста, $xy = 5$. Площадь страницы равна

$$A(x) = (x + 2b)(y + 2a) = xy + 2ax + 2by + 4ab = 5 + 2ax + \frac{10b}{x} + 4ab.$$

Найдём производную:

$$A'(x) = 2a - \frac{10b}{x^2} = \frac{2(ax^2 - 5b)}{x^2}.$$

Она отрицательна при $x < \sqrt{\frac{5b}{a}}$ и положительна при $x > \sqrt{\frac{5b}{a}}$, поэтому

$$x = \sqrt{\frac{5b}{a}}, \quad y = \frac{5}{x} = \sqrt{\frac{5a}{b}}.$$

Размеры страницы: ширина $\sqrt{\frac{5b}{a}} + 2b$, высота $\sqrt{\frac{5a}{b}} + 2a$.

Ответ: ширина $\sqrt{\frac{5b}{a}} + 2b$ см, высота $\sqrt{\frac{5a}{b}} + 2a$ см.

Задача 47. Требуется изготовить ящик с крышкой объёмом 72 кубических сантиметра, причём стороны основания должны относиться как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

Решение 47. Пусть стороны основания равны a и $2a$, а высота равна H . Из условия $2a^2H = 72$ получаем $H = \frac{36}{a^2}$. Полная поверхность равна

$$S(a) = 2 \cdot 2a^2 + 2aH + 2 \cdot 2aH = 4a^2 + 6aH = 4a^2 + \frac{216}{a}, \quad a > 0.$$

Найдём производную:

$$S'(a) = 8a - \frac{216}{a^2} = \frac{8(a^3 - 27)}{a^2}.$$

Она отрицательна при $0 < a < 3$ и положительна при $a > 3$, поэтому $a = 3$ — точка минимума. Тогда стороны основания равны 3 см и 6 см, высота равна 4 см, а полная поверхность равна 108 квадратных сантиметров.

Ответ: 3 см, 6 см и 4 см.

Задача 48. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой 5,6 м. На каком расстоянии должен встать человек с уровнем глаз 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

Решение 48. Нижний край статуи выше уровня глаз на $5,6 - 1,6 = 4$ м, верхний — на $4 + 4 = 8$ м. Если человек стоит на расстоянии x от колонны, то угол зрения равен $\theta = \arctg \frac{8}{x} - \arctg \frac{4}{x}$, и

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{8}{x} - \frac{4}{x}}{1 + \frac{32}{x^2}} = \frac{4x}{x^2 + 32}.$$

Так как тангенс возрастает на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$, достаточно найти максимум последней дроби:

$$\left(\frac{4x}{x^2 + 32} \right)' = \frac{4(32 - x^2)}{(x^2 + 32)^2}.$$

Производная положительна при $0 < x < \sqrt{32}$ и отрицательна при $x > \sqrt{32}$, значит, $x = 4\sqrt{2} \approx 5,7$ м — точка максимума.

Ответ: $4\sqrt{2} \approx 5,7$ м.

Задача 49. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что её нижний край на 1,8 м выше глаз человека. На каком расстоянии от стены должен встать человек, чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим?

Решение 49. Нижний край картины выше глаз на 1,8 м, верхний — на $1,8 + 1,4 = 3,2$ м. Как и в задаче 48,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(3,2 - 1,8)x}{x^2 + 1,8 \cdot 3,2} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76},$$

$$\left(\frac{1,4x}{x^2 + 5,76} \right)' = \frac{1,4(5,76 - x^2)}{(x^2 + 5,76)^2}.$$

Производная положительна при $0 < x < 2,4$ и отрицательна при $x > 2,4$, поэтому $x = \sqrt{5,76} = 2,4$ м — точка максимума.

Ответ: 2,4 м.

Задача 50. Три пункта A , B и C расположены так, что угол ABC равен 60° . Из пункта A выходит автомобиль, одновременно из пункта B — поезд. Автомобиль движется к B со скоростью 80 километров в час, поезд — к C со скоростью 50 километров в час. В какой момент времени от начала движения расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?

Решение 50. Через t часов автомобиль находится на расстоянии $200 - 80t$ от пункта B , а поезд — на расстоянии $50t$. По теореме косинусов

$$\begin{aligned} d^2(t) &= (200 - 80t)^2 + (50t)^2 - 2(200 - 80t) \cdot 50t \cdot \cos 60^\circ \\ &= 12\,900t^2 - 42\,000t + 40\,000. \end{aligned}$$

Минимумы d и d^2 достигаются в одной точке. Производная равна $25\,800t - 42\,000$; она отрицательна при $t < \frac{70}{43}$ и положительна при $t > \frac{70}{43}$, значит,

$$t = \frac{42\,000}{25\,800} = \frac{70}{43} \approx 1,63.$$

Ответ: через $\frac{70}{43} \approx 1,63$ часа.

Задача 51. Сумма высоты h и длины l окружности сечения цилиндрической почтовой посылки не должна превышать 150 см. Вычислите размеры наибольшей по объёму цилиндрической посылки, которую можно послать почтой.

Решение 51. Очевидно, объём наибольший, когда сумма равна 150 см. Так как $l = 2\pi R$, то $h = 150 - 2\pi R$ и

$$V(R) = \pi R^2(150 - 2\pi R) = 150\pi R^2 - 2\pi^2 R^3, \quad 0 < R < \frac{75}{\pi}.$$

Найдём производную:

$$V'(R) = 300\pi R - 6\pi^2 R^2 = 6\pi R(50 - \pi R).$$

Она положительна при $0 < R < \frac{50}{\pi}$ и отрицательна при $R > \frac{50}{\pi}$, поэтому $R = \frac{50}{\pi} \approx 15,9$ см — точка максимума. Тогда $l = 100$ см, $h = 50$ см и

$$V_{\max} = \frac{125\,000}{\pi} \approx 39\,800.$$

Ответ: $R = \frac{50}{\pi} \approx 15,9$ см, $h = 50$ см.

Задача 52. Цена алмаза при прочих равных условиях пропорциональна квадрату его веса. Цена алмаза в 1 карат составляет a рублей. Какова наименьшая суммарная стоимость двух алмазов общим весом 4 карата?

Решение 52. Пусть веса алмазов равны x и $4 - x$, где $0 < x < 4$. Тогда суммарная стоимость равна

$$C(x) = a(x^2 + (4 - x)^2).$$

Найдём производную:

$$C'(x) = a(2x - 2(4 - x)) = 4a(x - 2).$$

Она отрицательна при $x < 2$ и положительна при $x > 2$, значит, $x = 2$ — точка минимума и $C(2) = 8a$.

Ответ: $8a$ рублей.

Задача 53. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?

Решение 53. Пусть высота воронки равна h ; тогда радиус основания удовлетворяет равенству $r^2 = 400 - h^2$ и

$$V(h) = \frac{\pi}{3}h(400 - h^2), \quad 0 < h < 20.$$

Найдём производную:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(400 - 3h^2).$$

Она положительна при $0 < h < \frac{20}{\sqrt{3}}$ и отрицательна при $h > \frac{20}{\sqrt{3}}$, поэтому максимум достигается при

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,5.$$

Ответ: $\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,5$ см.

Задача 54. Найдите соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объёме наименьшую полную поверхность.

Решение 54. Из равенства $V = \pi R^2 H$ получаем $H = \frac{V}{\pi R^2}$, поэтому полная поверхность равна

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R H = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \quad R > 0.$$

Найдём производную:

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = \frac{2(2\pi R^3 - V)}{R^2}.$$

Она отрицательна при $2\pi R^3 < V$ и положительна при $2\pi R^3 > V$, поэтому минимум достигается при $R^3 = \frac{V}{2\pi}$. Тогда

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{2\pi R^3}{\pi R^2} = 2R.$$

Ответ: $H = 2R$.

Задача 55. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определите его основание x и высоту y .

Решение 55. Пусть основание прямоугольника равно $x = 2u$, где u — половина основания; тогда высота равна $y = \sqrt{R^2 - u^2}$ и площадь равна $S = 2u\sqrt{R^2 - u^2}$. Максимумы S и S^2 достигаются в одной точке, поэтому исследуем

$$S^2(u) = 4u^2(R^2 - u^2), \quad 0 < u < R.$$

Найдём производную:

$$(S^2)'(u) = 8u(R^2 - 2u^2).$$

Она положительна при $0 < u < \frac{R}{\sqrt{2}}$ и отрицательна при $u > \frac{R}{\sqrt{2}}$, значит, $u = \frac{R}{\sqrt{2}}$ — точка максимума. Тогда

$$x = R\sqrt{2}, \quad y = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad S_{\max} = R^2.$$

Ответ: $x = R\sqrt{2}, y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Задача 56. В результате измерений некоторой величины получены n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Найдите такое число x , чтобы сумма квадратов отклонений данных чисел от x была наименьшей.

Решение 56. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2.$$

Найдём производную:

$$f'(x) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x) = 2 \left(nx - \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Она отрицательна левее точки $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ и положительна правее неё, значит, x_0 — точка минимума.

Ответ: среднее арифметическое $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Задача 57. Из зенитного орудия вертикально вверх вылетел снаряд со скоростью $v_0 = 200$ метров в секунду. Через сколько времени он достигнет наивысшего положения? Ускорение свободного падения считайте равным 10 метрам на секунду в квадрате.

Решение 57. Высота снаряда равна $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Найдём производную:

$$y'(t) = v_0 - gt.$$

Она положительна при $t < \frac{v_0}{g}$ и отрицательна при $t > \frac{v_0}{g}$, поэтому наивысшее положение достигается при

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{200}{10} = 20.$$

Ответ: через 20 с.

Задача 58. Резервуар с квадратным дном, открытый сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каким должно быть соотношение между стороной основания и высотой, чтобы было израсходовано наименьшее количество свинца?

Решение 58. Пусть сторона основания равна a , высота равна H , объём равен $V = a^2 H$. Тогда $H = \frac{V}{a^2}$, а площадь, которую надо выложить свинцом, равна

$$S(a) = a^2 + 4aH = a^2 + \frac{4V}{a}, \quad a > 0.$$

Найдём производную:

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2} = \frac{2(a^3 - 2V)}{a^2}.$$

Она отрицательна при $a^3 < 2V$ и положительна при $a^3 > 2V$, поэтому минимум достигается при $a^3 = 2V$. Тогда

$$H = \frac{V}{a^2} = \frac{a^3}{2a^2} = \frac{a}{2}.$$

Ответ: сторона основания вдвое больше высоты.

Задача 59. Сахарный завод производит x единиц продукции в месяц; суммарные издержки производства равны $K(x) = \frac{x}{50} + 15x + 800$. Зависимость удельной цены p от количества x единиц продукции, которое можно продать по этой цене, такова: $p = 50 - \frac{x}{10}$. При каком объёме выпуска прибыль (выручка равна xp) будет наибольшей?

Решение 59. Прибыль равна разности выручки и издержек:

$$\Pi(x) = xp - K(x) = x\left(50 - \frac{x}{10}\right) - \left(\frac{x}{50} + 15x + 800\right) = \frac{1749}{50}x - \frac{x^2}{10} - 800.$$

Это квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом. Найдём производную:

$$\Pi'(x) = \frac{1749}{50} - \frac{x}{5}.$$

Она положительна при $x < 174,9$ и отрицательна при $x > 174,9$, поэтому $x = 174,9$ — точка максимума, и

$$\Pi(174,9) \approx 2258,8.$$

Так как выпуск измеряется целым числом единиц, наибольшая прибыль достигается при $x = 175$.

Ответ: 175 единиц продукции.

Ответы

Задача	Ответ	Задача	Ответ
1	625 Вт	31	10^7 Дж
2	1250 Вт	32	высота $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, радиус $\frac{R\sqrt{6}}{3}$
3	72 Вт	33	квадрат со стороной 6 м
4	48 Вт	34	$\frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 294^\circ$
5	72 Вт	35	ширина равна высоте
6	180 Вт	36	11 и 1
7	500 Вт	37	$\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ с
8	4 Ом; 81 Вт	38	$r = R$
9	6 Ом	39	60°
10	10 А	40	6 см
11	15	41	$2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 96^\circ$
12	20	42	60°
13	25	43	$\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$
14	20	44	$b = \frac{d\sqrt{3}}{3}, h = \frac{d\sqrt{6}}{3}$
15	15	45	21 м и 14 м
16	15	46	$\sqrt{\frac{5b}{a}} + 2b$ и $\sqrt{\frac{5a}{b}} + 2a$ см
17	10 мкс	47	3 см, 6 см, 4 см
18	5 с	48	$4\sqrt{2} \approx 5,7$ м
19	10 радиан в секунду	49	2,4 м
20	2 радиана в секунду	50	$\frac{70}{43} \approx 1,63$ ч
21	4 метра в секунду	51	$R = \frac{50}{\pi} \approx 15,9$ см, $h = 50$ см
22	3 м	52	8а рублей
23	$10\sqrt{3}$ см	53	$\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,5$ см
24	40 километров в час	54	$H = 2R$
25	20 метров в секунду	55	$x = R\sqrt{2}, y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$
26	2 часа	56	среднее арифметическое
27	0,9 м	57	20 с
28	$5; \frac{250}{9}$	58	сторона вдвое больше высоты
29	6 сотен изделий; 20 тыс. руб.	59	175 единиц
30	4 дня		