

Элементы комбинаторики,
элементы теории вероятностей,
случайные величины и элементы
математической статистики

Ахвердиев Рустем
Фахраддинович

rustem-af.ru

Основные определения

- **Определение.** Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта, обозначают «А,В,С...»
- **Определение.** Событие называется элементарным, если его нельзя разложить на более мелкие составляющие.
- **Определение.** Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.
- **Определение.** Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

- *Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.*

- Задача. Бросается игральный кубик (6 граней).
- A — «Выпало число 3» - элементарное событие

- Задача. Бросается игральный кубик (6 граней).
- В — «Выпало 3 или 5» - не элементарное событие

- Задача. Бросается игральный кубик (6 граней).
- S — «Выпало 1,2,3,4,5 или 6» - достоверное событие, полная группа событий

- Задача. Бросается игральный кубик (6 граней).
- P – «Выпало число 7» - невозможное событие

Определение. Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.

*Вероятность события A равна отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта (**m**) к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий (**n**).*

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного — равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события — есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leq P(A) \leq & 1 \\ \text{невозможное} & & \text{достоверное} \\ \text{событие} & & \text{событие} \end{array}$$

1. В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 13 из них встречается вопрос по оптике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по оптике.

Решение: А- «не достался вопрос по оптике»

$$P(A) = \frac{25-13}{25} = \frac{12}{25} = 0.48;$$

2. На соревнования по толканию ядра приехали 7 спортсменов из России, 7 из Швеции и 6 из Сербии. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что седьмым будет выступать спортсмен из Швеции?

Решение: А- «седьмым прыгает швед»

$$P(A) = \frac{7}{7 + 7 + 6} = \frac{7}{20} = 0.35;$$

Комбинаторика изучает вопросы о том, сколько различных наборов, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из конечного множества элементов.

Способы подсчета количества наборов, удовлетворяющих заданным условиям: непосредственный подсчет, правило суммы, правило произведения, перестановки, сочетания, размещения.

Правило суммы: если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать n способами (при этом выбор A исключает B и наоборот), тогда A или B можно выбрать $(m+n)$ способами.

Правило произведения: если элемент A можно выбрать m способами, а затем элемент B можно выбрать n способами, тогда A и B можно выбрать $(m*n)$ способами.

- Факториалом числа **n** называется произведение всех натуральных чисел от **1** до **n** включительно.
- Обозначение: **$n!$**
- **$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$** ;
- **$0! = 1$; $1! = 1$** ;

Перестановки, размещения, сочетания

Перестановками называются наборы состоящие из одного и того же количества элементов, отличающихся только порядком следования элементов.

Размещениями называются упорядоченные наборы из m элементов выбранных из n элементов, которые отличаются друг от друга, как порядком следования, так и составом элементов.

Сочетаниями называются упорядоченные наборы из m элементов выбранных из n элементов, которые отличаются друг от друга составом элементов.

Перестановки

Без повторов

$$P_n = n!$$

С повторами

$$\left. \begin{array}{l} \overline{P}_n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_p = n \end{array} \right\}$$

Сочетания

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Размещения

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Комбинаторные задачи

- 3. Сколько различных способов переставить 10 различных книг на полке?
- Ответ: $10!$

Комбинаторные задачи

- 4. На 10 карточках написаны буквы М,А,Т,Е,М,А,Т,И,К,А. Сколько существует способов переставить эти буквы между собой?

$$\begin{array}{cccccc} m & a & t & e & u & k \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow$$
$$\frac{10!}{2!3!2!1!1!1!}$$

Комбинаторные задачи

- 5. Кодовый замок состоит из 6 барабанов, на каждом из которых цифры от 0 до 9. Сколько различных шестизначных числовых кодов существует?
- Размещения с повторами:

$$\overline{A_{10}^6} = 10^6$$

Комбинаторные задачи

- 6. Алфавит шифровальщика состоит из 6-ти различных символов, каждое слово состоит из 4 различных символов. Сколько различных слов в арсенале шифровальщика?
- Размещения без повторов:

$$A_6^4 = \frac{6!}{2!}$$

Комбинаторные задачи

- 7. В студенческой группе 15 студентов и 12 студенток. Требуется отправить 5 студентов и 3 студенток на конференцию в Прагу. Сколько различных комбинаций для формирования делегации существует?
- Сочетания без повторов и правило произведения:

$$C_{15}^5 C_{12}^3$$

Комбинаторные задачи

- 8. В студенческой группе 15 студентов и 12 студенток. Требуется отправить 5 студентов или 3 студенток на конференцию в Прагу. Сколько различных комбинаций для формирования делегации существует?
- Сочетания без повторов и правило суммы:

$$C_{15}^5 + C_{12}^3$$

Комбинаторные задачи

- 9. На олимпийские игры в Сочи в 2014 году прибыли команды с 5-ти континентов. На торжественное поднятие флага создаётся делегация из 18 участников. Сколько различных комбинаций для создания такой делегации существует, если от каждого континента должен быть хотя-бы один участник?
- Сочетания с повторами:

$$\overline{C_5^{13}} = C_{5+13-1}^{13} = C_{17}^{13} = \frac{17!}{4!13!}$$

- 10. В случайном эксперименте монету бросают трижды. Какова вероятность, что орел выпадет ровно 1 раз?

A – орел выпал один раз (можно перебрать варианты)

$$\{ rrr; orr; ror; rro; oor; oro; roo; ooo \} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8} = 0,375;$$

$$1 \text{ бросок монеты} - 2 \text{ варианта, бросков три} \Rightarrow \overline{A_2^3} = 2^3 = 8;$$

всего вариантов

$$orr - \text{число перестановок с повторами} \Rightarrow \overline{P_3} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{8} = 0,375;$$

- 11. Перед началом волейбольного матча судья бросает монету, чтобы определить какая команда будет владеть мячом первой. Команда «Байкал» по очереди играет с командами «Амур», «Енисей», «Вилюй», «Иртыш». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах команда «Байкал» будет владеть мячом первой.

A – ровно в двух матчах владеет мячом первой

1 бросок монеты - 2 варианта, бросков четыре $\Rightarrow \overline{A_2^4} = 2^4 = 16;$
всего вариантов

2 раза первой и 2 раза второй $\Rightarrow$ переставить 2211 $\Rightarrow \overline{P_4} = \frac{4!}{2! * 2!} = 6;$

$$P(A) = \frac{6}{16} = 0,375;$$

- 11*. Найдите вероятность, что при броске двух кубиков на обоих выпадет число большее трех.

	1	2	3	4	5	6	
1	*	*	*	*	*	*	
2	*	*	*	*	*	*	
3	*	*	*	*	*	*	$\Rightarrow P(A) = \frac{9}{36} = 0,25;$
4	*	*	*	+	+	+	
5	*	*	*	+	+	+	
6	*	*	*	+	+	+	

Повторные испытания.

Формула Бернулли.

- Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события A** .
- Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно m раз.

$$\begin{aligned}
 P_n(m) &= C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \\
 &= \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} ;
 \end{aligned}$$

- 12. Биатлонист стреляет по мишени. Вероятность попадания, в центр мишени, при одном выстреле 0,9. Он стреляет 5 раз. Какова вероятность, что он попал все 5 выстрелов в центр мишени? Округлите до сотых.
- 13. Биатлонист стреляет по мишени. Вероятность попадания, в центр мишени, при одном выстреле 0,7. Он стреляет 5 раз. Какова вероятность, что не попал ни разу в центр мишени?
- 14. Биатлонист стреляет по мишени. Вероятность попадания, в центр мишени, при одном выстреле 0,8. Он стреляет 5 раз. Какова вероятность, что он попал ровно один раз в центр мишени?

$$12. \Rightarrow n = 5; m = 5; p = 0.9;$$

$$13. \Rightarrow n = 5; m = 0; p = 0.7;$$

$$14. \Rightarrow n = 5; m = 1; p = 0.8;$$

$$12. P_5(5) = C_5^5 0,9^5 (1-0,9)^0 = 0,9^5 = 0,59049 = 0,59;$$

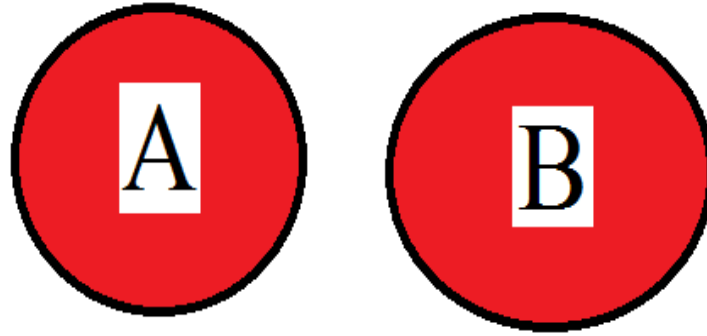
$$13. P_5(0) = C_5^0 0,7^0 (1-0,7)^5 = 0,3^5 = 0,00243;$$

$$14. P_5(1) = C_5^1 0,8^1 (1-0,8)^4 = 5 * 0,8 * 0,2^4 = 0,00064;$$

• Отношения между событиями

- **Определение.** События называются **несовместными** («или»), если появление одного из них исключает появление других, в противном случае они — совместны .
- **Определение.** События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.
- **Определение.** Событие A называется **независимым** от события B , вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. (между ними можно поставить « $\perp$ »)
- **Определение.** Событие A называется **зависимым** от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

- **Теорема** (сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных (появления хотя-бы одного из них) событий равна сумме вероятностей этих событий.

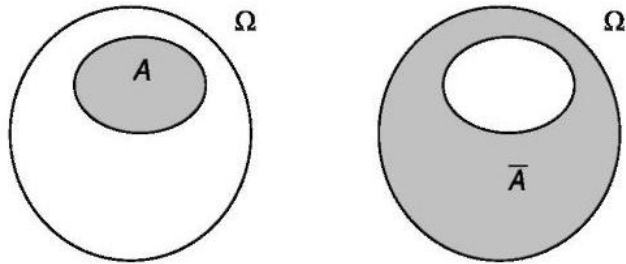


$$\begin{aligned} P(A \text{ или } B) &= P(A + B) = \\ &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{aligned}$$

- 15. На экзамене школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных. Вероятность того, что вопрос на тему «Тригонометрия» составляет 0,1. Вероятность, что на тему «Внешние углы» 0,15. Вопросов, относящихся одновременно к обоим этим темам, нет. Найдите вероятность, что на экзамене достанется вопрос по одной из этих двух тем.
- **Решение:** А-«Тригонометрия», В- «Внешние углы».
- Вопросов, относящихся одновременно к обоим этим темам, нет, то есть А и В несовместны, поэтому между ними можно написать «ИЛИ».
- С-«на экзамене достанется вопрос по одной из этих двух тем», следовательно,

$$\bullet P(C)=P(A)+P(B)=0,1+0,15=0,25;$$

- **Определение.** Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.
- Пример: *A*-«Натуральное число делиться на 5» и *B*-«Натуральное число не делиться на 5», вместе *A* и *B* образуют множество натуральных чисел.
- **Следствие:** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.



$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

- Если в тексте задачи присутствует «хотя бы один...», тогда, как правило нужно найти противоположное событие.
- 16. Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течении года 0,1. Какова вероятность, что в течении года хотя бы одна лампа не перегорит?

$$\left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 +++ \\
 ++- \\
 +-+ \\
 -++ \\
 +-+ \\
 -+- \\
 --+ \\

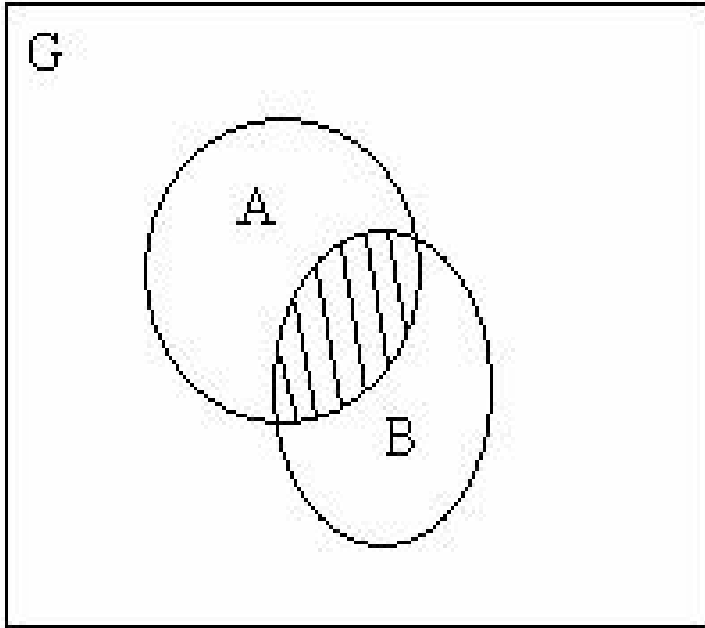
 \end{array} \right\} - A \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 --- \\
 --- \\
 --- \\

 \end{array} \right\} - \bar{A}
 \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ и } \bar{A} - \text{полная группа}$$

A – хотя – бы одна не перегорела $\Rightarrow$
 $\bar{A}$ – перегорели все

$P(A) + P(\bar{A}) = 1;$
 $P(\bar{A}) = 0,1^3 \Rightarrow P(A) = 1 - 0,001 = 0,999;$

- Два события совместны, если появление одного не исключает другого.
- Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.



$$\begin{aligned} P(A \text{ или } B) &= P(A + B) = P(A \cup B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

17. В аэропорту два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате кофе закончится равно 0,35. Вероятность того, что кофе закончиться в обоих автоматах 0,16. Какова вероятность, что кофе останется в обоих автоматах?

A – кофе закончился в первом автомате,

B – кофе закончился во втором автомате,

$A \cap B$ – кофе закончился в обоих автоматах,

C – кофе остался в обоих автоматах,

$\overline{C}$ – кофе закончился хотя – бы в одном автомате.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A) = P(B) = 0.35, P(A \cap B) = 0.16 \Rightarrow \\ P(\overline{C}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ 0.35 + 0.35 - 0.16 = 0.54 \Rightarrow \\ P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.54 = 0.46 \end{aligned}$$

- **Теорема (Умножения вероятностей).** Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(A \text{ и } B) = P(A \cap B) = P(A)P(B / A) = P(A)P_A(B)$$

$$P(A \text{ и } B) = P(A \cap B) = P(A)P(B) - \text{не зависимые события};$$

• 18 Вероятность того, что на тесте по физике учащийся решит больше 9 задач равна 0,61. вероятность того, что больше 8 задач равна 0,73. Какова вероятность, что учащийся решит ровно 9 задач?

• Решение: Разница между событиями – 9 задач, поэтому $0,73 - 0,61 = 0,12$;

• Решение: Меньше 10 и больше 8 одновременно, поэтому $(1 - 0,61) * 0,73 = 0,2847$;

• Решение: Разница между событиями – 9 задач,
поэтому $0,73 - 0,61 = 0,12$;

$$P(n > 8) = P(9 > n > 8) + P(n = 9) + P(n > 9)$$

$$P(9 > n > 8) = 0 \Rightarrow$$

$$0.73 = P(n = 9) + 0.61 \Rightarrow 0.12$$

• **Решение: Меньше 10 и больше 8
одновременно, поэтому $(1-0,61)*0,73=0,2847$;**

$$P(n = 9) = P(n > 8) * P(n < 10) \Rightarrow$$

$$P(n = 9) = P(n > 8) * (P(n < 9) + P(n = 9) + P(9 < n < 10))$$

$$P(9 < n < 10) = 0 \Rightarrow$$

$$P(n = 9) = P(n > 8) * (P(n < 9) + P(n = 9))$$

$$P(n = 9) = P(n > 8) * (P(n < 9) + P(n = 9)) \Rightarrow$$

$$P(n = 9) = P(n > 8) * P(n < 9) + P(n > 8) * P(n = 9)$$

$$P(n > 8) * P(n < 9) = 0 \Rightarrow$$

$$P(n = 9) = P(n > 8) * P(n = 9)$$

$$P(n = 9) = P(n > 8) * P(n = 9) \Rightarrow$$

$$P(n = 9) * (1 - P(n > 8)) = 0 \Rightarrow$$

$$P(n = 9) * (1 - 0.71) = 0 \Rightarrow$$

$$P(n = 9) = 0 \neq 0.2847$$

- 19. В параллели 51 учащийся. Их случайным образом распределяют на три группы по 17 человек. Какова вероятность, что два друга Сергей и Вадим окажутся в одной группе?
- **Решение:** Групп три, три события A, B, C . « A или B или C »- не совместны, K - «друзья в одной группе». $P(K)=P(A)+P(B)+P(C)=3*P(A)$, события равновероятны.

$$P(A) = \frac{C_{49}^{15}}{C_{51}^{17}} = \frac{\frac{49!}{15!34!}}{\frac{51!}{17!34!}} = \frac{49!17!34!}{15!34!51!} = \frac{16*17}{50*51} = \frac{16}{50*3};$$

$$P(K) = 3*P(A) = \frac{16}{50} = 0,32;$$

Формула полной вероятности

- Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий

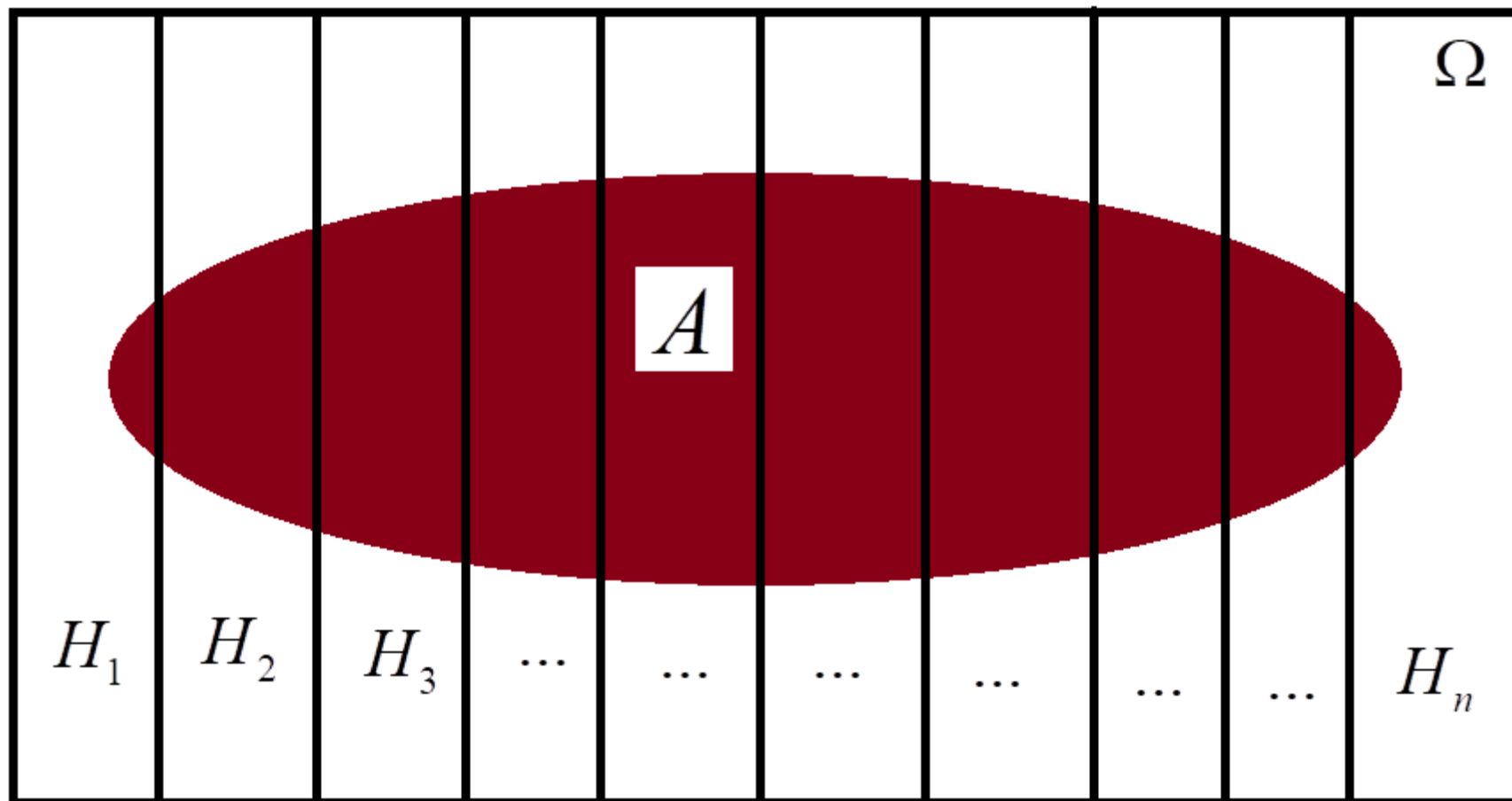
$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

составляющих полную группу событий.
Пусть известны вероятности этих событий

$$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$$

и условные вероятности наступления
события **A** при наступлении события

$$P(A / H_1), P(A / H_2), \dots, P(A / H_n)$$



- **Теорема.** Вероятность события A , которое может произойти вместе с одним из событий

$$H_1, H_2, \dots, H_n,$$

- образующих полную группу, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A .

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$$

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + \dots + P(H_n)P(A / H_n) =$$
$$\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i)$$

- 20. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая выпускает 45% всех стекол, вторая 55%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных фар, вторая 3%. Какова вероятность, что случайно купленное стекло бракованное?

H_1 – стекло сделано на первой фабрике $\Rightarrow P(H_1) = 0,45$;

H_2 – стекло сделано на второй фабрике $\Rightarrow P(H_2) = 0,55$;

$P(H_1) + P(H_2) = 0,45 + 0,55 = 1$; $\Rightarrow$

H_1, H_2 – полная группа событий

A – куплено бракованное стекло;

$P(A / H_1) = 0,05$ и $P(A / H_2) = 0,03$;

$P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) =$
 $0,45 * 0,05 + 0,55 * 0,03 = 0,039$;

- 21. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что по ошибке исправную, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет заблокирована системой контроля.

H_1 – батарея исправна $\Rightarrow P(H_1) = 0,95$;

H_2 – батарея не исправна $\Rightarrow P(H_2) = 0,05$;

$P(H_1) + P(H_2) = 0,95 + 0,05 = 1$; $\Rightarrow$

H_1, H_2 – полная группа событий

A – батарея заблокирована системой контроля;

$P(A / H_1) = 0,01$ – исправная

$P(A / H_2) = 0,96$ – не исправная

$P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) =$

$0,01 * 0,95 + 0,96 * 0,05 = 0,0575$;

- 22. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 43% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

H_1 – больной болен гепатитом $\Rightarrow P(H_1) = 0,43$;

H_2 – больной не болен гепатитом $\Rightarrow P(H_2) = 0,57$;

$P(H_1) + P(H_2) = 0,43 + 0,57 = 1$; $\Rightarrow$

H_1, H_2 – полная группа событий

A – положительный результат анализа;

$P(A / H_1) = 0,8$ – болен гепатитом

$P(A / H_2) = 0,03$ – не болен гепатитом

$P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) =$
 $0,8 * 0,43 + 0,03 * 0,57 = 0,3611$;

Тóмас Бáйес (*Thomas Bayes*)

1702, Лондон — 17 апреля 1761, Танбридж-Уэллс, Кент)

- британский математик,
- пресвитерианский священник,
член Лондонского королевского общества (1742)



Формула Байеса (формула гипотез)

- Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$
- с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$
- Пусть в результате опыта наступило событие A , условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A / H_1), P(A / H_2), \dots, P(A / H_n)$
- Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$
- относительно события A , т.е. условные вероятности $P(H_i / A)$

- **Теорема.** Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

- Эта формула называется **формулой Байеса**.

- 23. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая выпускает 45% всех стекол, вторая 55%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных фар, вторая 3%. Какова вероятность, что случайно купленное бракованное стекло выпущено на первой фабрике?

H_1 – стекло сделано на первой фабрике $\Rightarrow P(H_1) = 0,45$;

H_2 – стекло сделано на второй фабрике $\Rightarrow P(H_2) = 0,55$;

$P(H_1) + P(H_2) = 0,45 + 0,55 = 1$; $\Rightarrow$

H_1, H_2 – полная группа событий

A – куплено бракованное стекло;

$P(A / H_1) = 0,05$ и $P(A / H_2) = 0,03$;

$P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) =$
 $0,45 * 0,05 + 0,55 * 0,03 = 0,039$;

$$P(H_1 / A) = ?$$

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0,039; \\ P(A / H_1) = 0,05; \\ P(H_1) = 0.45 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$P(H_1 / A) = \frac{0.05 * 0.45}{0.039} = \frac{0.0225}{0.039} = \frac{225}{390} = \frac{15}{26};$$

- 24. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что по ошибке исправную, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка, заблокированная системой контроля, была исправна.

H_1 – батарея исправна $\Rightarrow P(H_1) = 0,95$;

H_2 – батарея не исправна $\Rightarrow P(H_2) = 0,05$;

$P(H_1) + P(H_2) = 0,95 + 0,05 = 1$; $\Rightarrow$

H_1, H_2 – полная группа событий

A – батарея заблокирована системой контроля;

$P(A / H_1) = 0,01$ – исправная

$P(A / H_2) = 0,96$ – не исправная

$P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) =$

$0,01 * 0,95 + 0,96 * 0,05 = 0,0575$;

$$P(H_1 / A) = ?$$

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0,0575; \\ P(A / H_1) = 0,01; \\ P(H_1) = 0.96 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$P(H_1 / A) = \frac{0.01 * 0.96}{0.0575} = \frac{0.0096}{0.0575} = \frac{96}{575};$$

- 25. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 43% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что положительный результат анализа оказался у здорового пациента.

H_1 – больной болен гепатитом $\Rightarrow P(H_1) = 0,43$;

H_2 – больной не болен гепатитом $\Rightarrow P(H_2) = 0,57$;

$P(H_1) + P(H_2) = 0,43 + 0,57 = 1$; $\Rightarrow$

H_1, H_2 – полная группа событий

A – положительный результат анализа;

$P(A / H_1) = 0,8$ – болен гепатитом

$P(A / H_2) = 0,03$ – не болен гепатитом

$P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) =$
 $0,8 * 0,43 + 0,03 * 0,57 = 0,3611$;

$$P(H_2 / A) = ?$$

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0,3611; \\ P(A / H_2) = 0,03; \\ P(H_2) = 0.57 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$P(H_2 / A) = \frac{0.03 * 0.57}{0.3611} = \frac{0.0171}{0.3611} = \frac{171}{3611};$$

- 26. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения цели при первом выстреле равна 0,3, при каждом последующем – 0,4. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,9?

A – цель уничтожена $\Rightarrow \bar{A}$ – цель не уничтожена

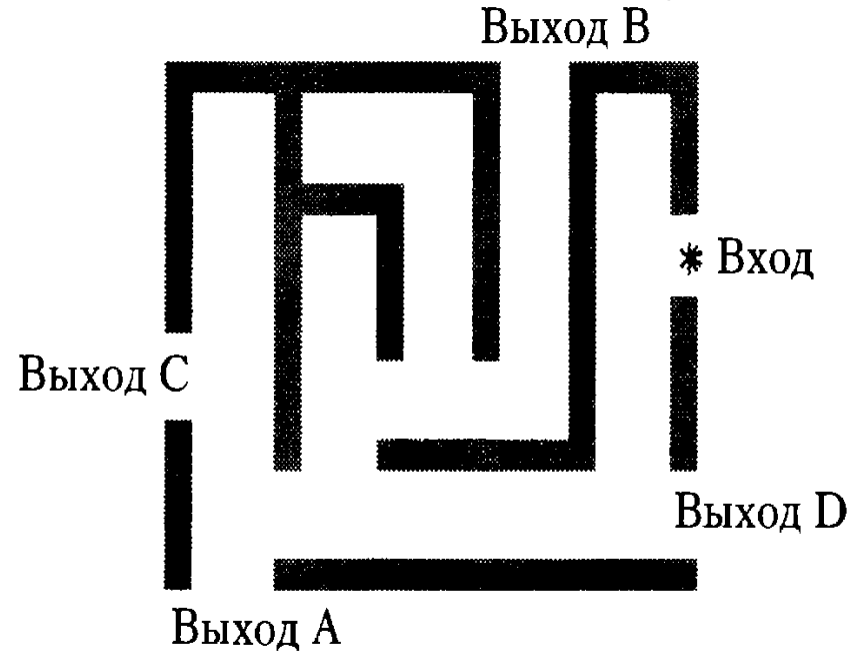
$$P(A) \geq 0.9 \Rightarrow P(\bar{A}) \leq 0.1$$

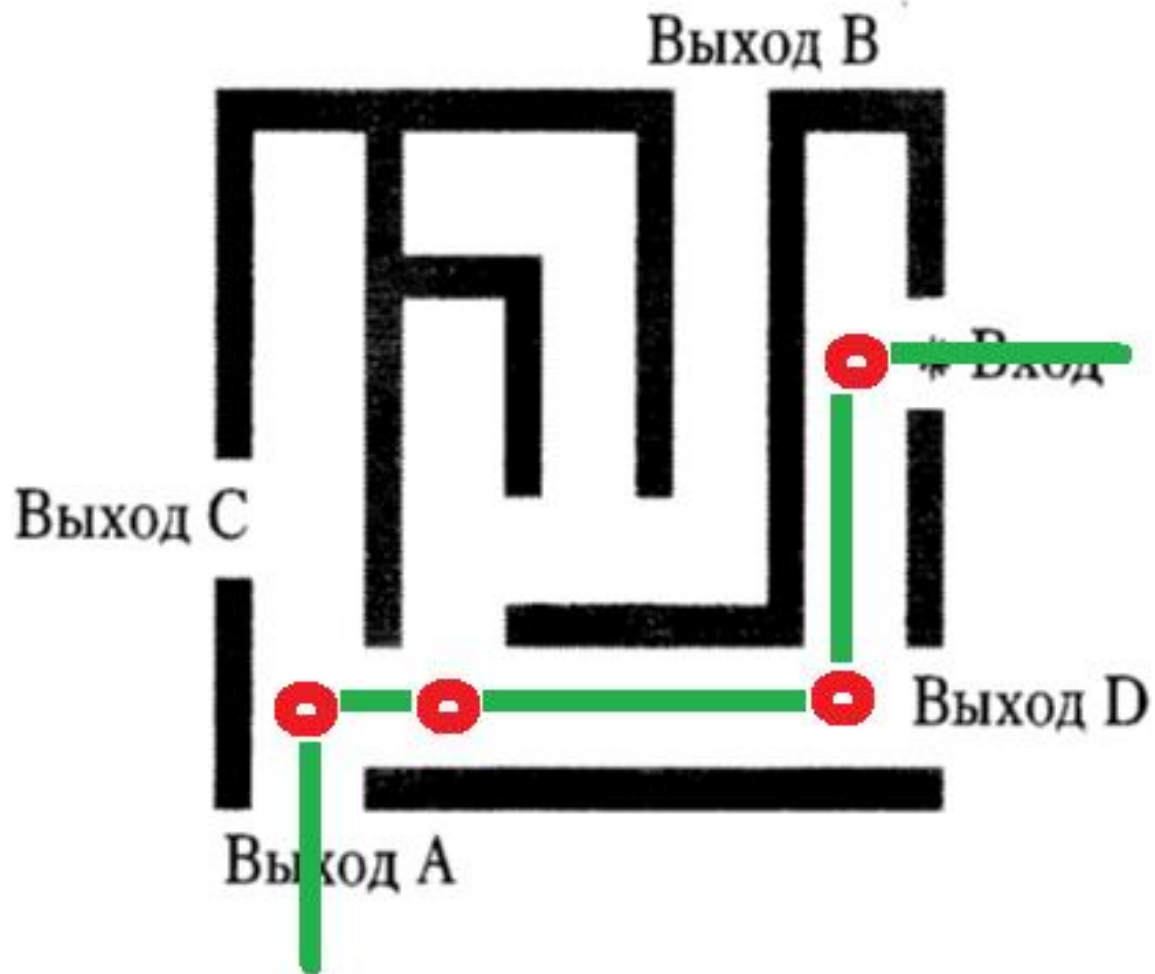
n – количество выстрелов $\Rightarrow$

$$P(\bar{A}) = (1 - 0,3) * (1 - 0,4)^{n-1} \Rightarrow$$

$$0.7 * 0.6^{n-1} \leq 0.1 \Rightarrow n \geq 5 \Rightarrow n = 5$$

- 27. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу А.

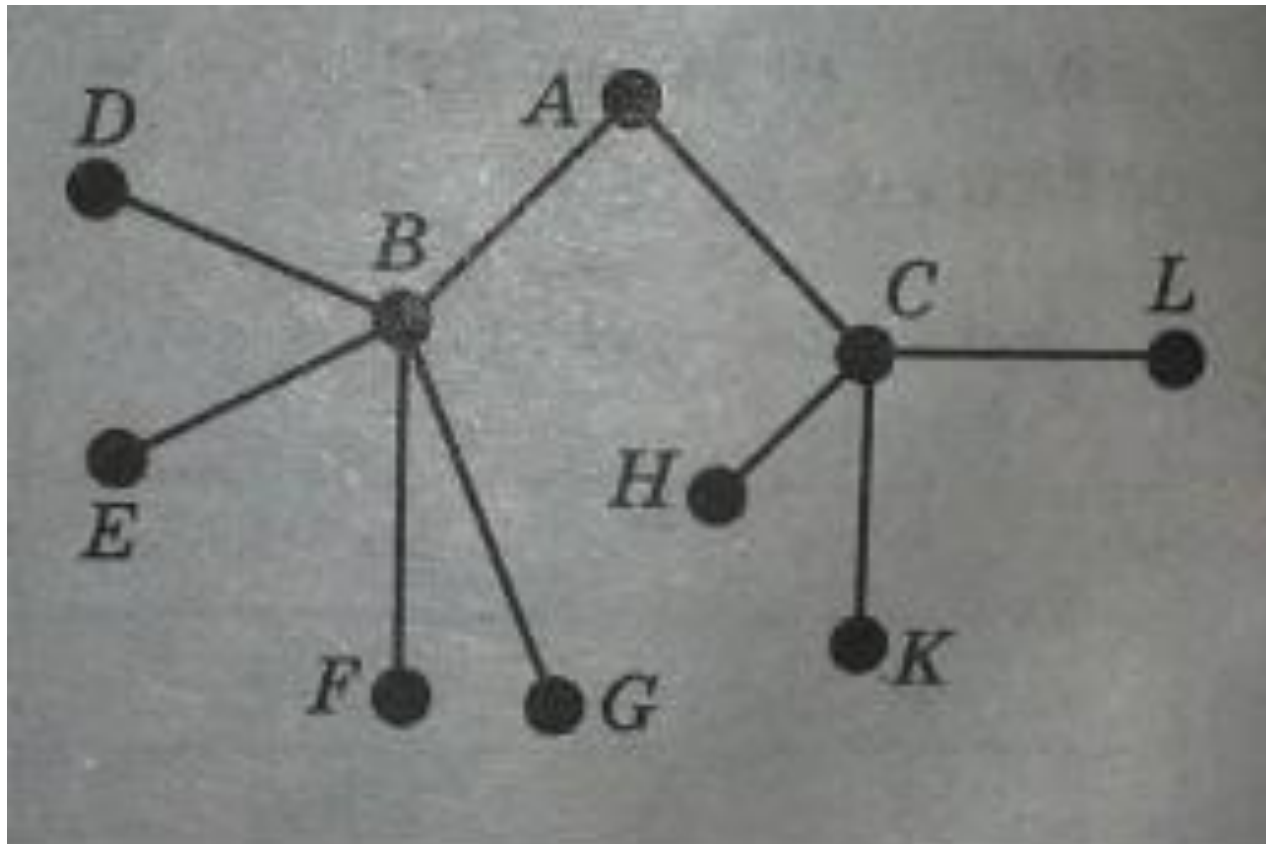


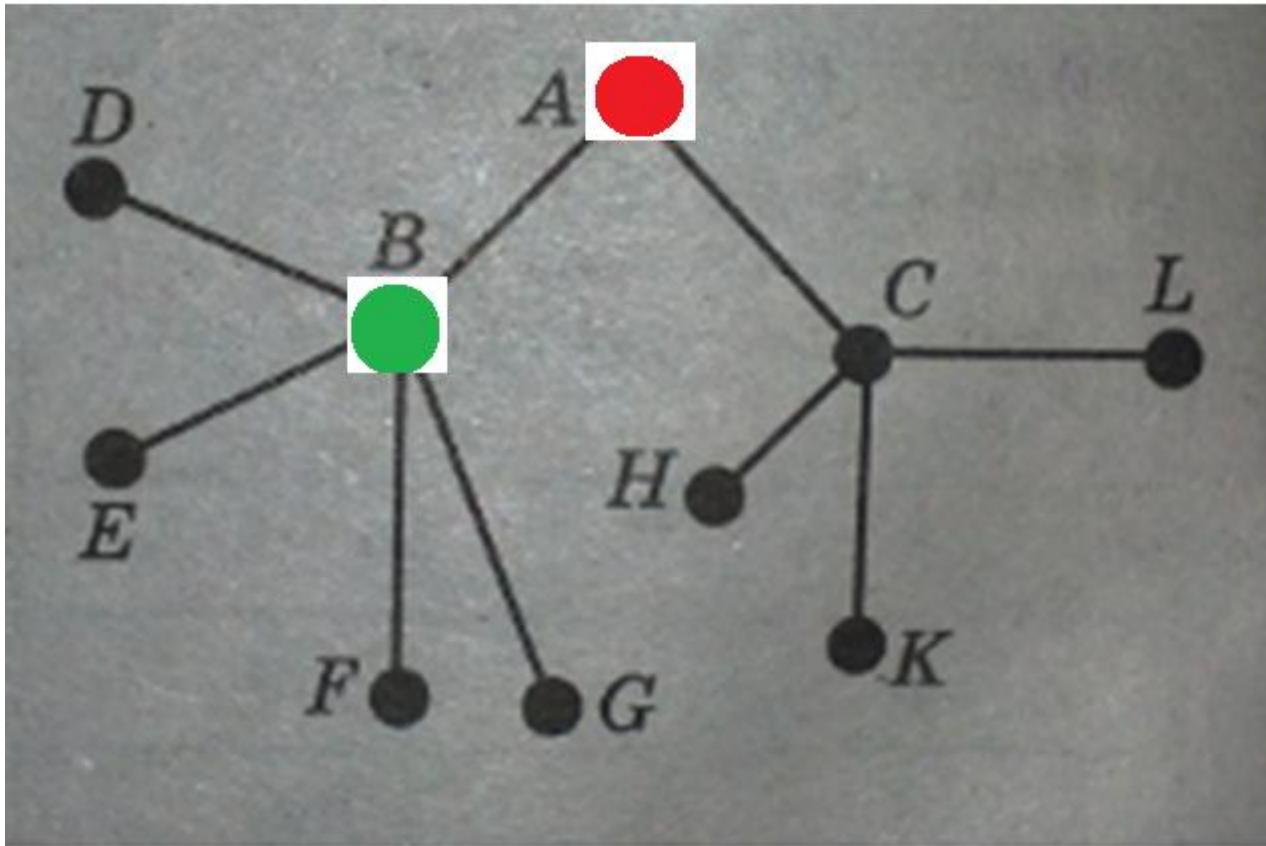


A – вышел через A $\Rightarrow$

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

- 28. Пенсионер гуляет по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Пенсионер начинает прогулку в точке А. Найдите вероятность того, что он придет в точку G.





A – попал из A в G $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

- 29. Вероятность того, что новый мобильный телефон выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,3. Если телефон проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в телефоне нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый телефон прослужит больше года, но не больше трёх лет.
- Решение: Проработал 1 и 2 год (два не совместных события)
- A – «проработать 1 год», тогда $P(A)=0,7*0,3=0,21$
- B – «проработать 2 года», тогда $P(B)=0,7*0,7*0,3=0,147$
- C – «прослужить больше года, но не больше трех лет» $P(C)=P(A)+P(B)=0,21+0,147=0,357$, так как A и B – не совместны, B – зависит от A .
- Ответ: 0,357

- 30. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.
- Решение: **A** – «две девочки сидят рядом»
- 1. Перенумеруем стулья.
- 2. 9!- общее число вариантов рассадить 9 детей.
- 3. 2 девочки заняли 1 и 2 стулья и 7 мальчиков произвольно на оставшихся 2*7!
- 4. Девочки могли занять не 1 и 2 стулья, 3 и 4, 2 и 3 и т. д.

$$P(A) = \frac{9 * 2 * 7!}{9!} = \frac{1}{4} = 0.25$$

• Условная вероятность, задача про «Русскую рулетку»

- 31. В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

A – выстрел при первом нажатии,

$\Rightarrow \bar{A}$ – осечка при первом выстреле

$P(A) = \frac{4}{6}$ – вероятность выстрела при первом нажатии на курок $\Rightarrow$

$P(\bar{A}) = \frac{2}{6}$ – вероятность осечки

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие B) или произойдет осечка (событие $\bar{B}$) при условии, что в первом случае произошёл выстрел (событие A) или осечка (событие $\bar{A}$).

- Вероятность выстрела при втором нажатии на курок зависит от результата первого нажатия.
- Так если в первом случае произошел выстрел, то в барабане осталось только 3 патрона, причем они распределены по 5 гнездам, т.к. при втором нажатии на курок напротив ствола не может оказаться гнездо, в котором был патрон при первом нажатии на курок.

Условная вероятность выстрела при второй попытке

$P(B / A) = \frac{3}{5}$ - если первый раз был выстрел,

$P(B / \bar{A}) = \frac{4}{5}$ - если первый раз была осечка.

*Условная вероятность осечки при
втором выстреле*

$P(\bar{B} / A) = \frac{2}{5}$ — если первый раз был выстрел,

$P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{1}{5}$ — если первый раз была осечка.

$$P(B) = P(A)P(B / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} - \text{два выстрела подряд,}$$

$$P(B) = P(\bar{A})P(B / \bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} - \text{первая осечка, второй выстрел,}$$

$$P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B} / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} - \text{первый выстрел, вторая осечка,}$$

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} - \text{две осечки подряд.}$$

- Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице). Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме

$$P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15}$$

- Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.
- Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились -

$$P(A) = \frac{4}{6} - \text{вероятность выстрела при первом нажатии на курок} \Rightarrow$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{6} - \text{вероятность осечки}$$

$P(B / A) = \frac{3}{6}$ — условная вероятность при втором выстреле,
если первый раз был выстрел,

$P(B / \bar{A}) = \frac{4}{6}$ — если первый раз осечка.

$P(\bar{B} / A) = \frac{3}{6}$ — вероятность осечки во второй раз,

если первый раз был выстрел,

$P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{2}{6}$ — если была осечка

$$P(B) = P(A)P(B / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} - \text{два выстрела подряд,}$$

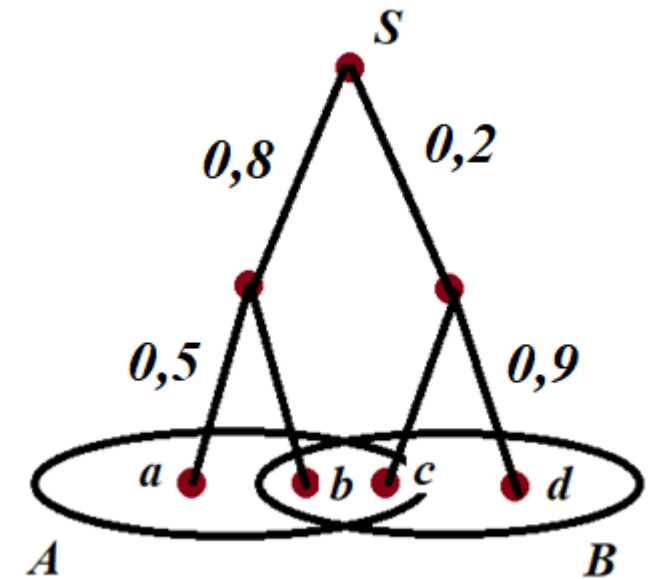
$$P(B) = P(\bar{A})P(B / \bar{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9} - \text{осечка и выстрел,}$$

$$P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B} / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} - \text{выстрел и осечка,}$$

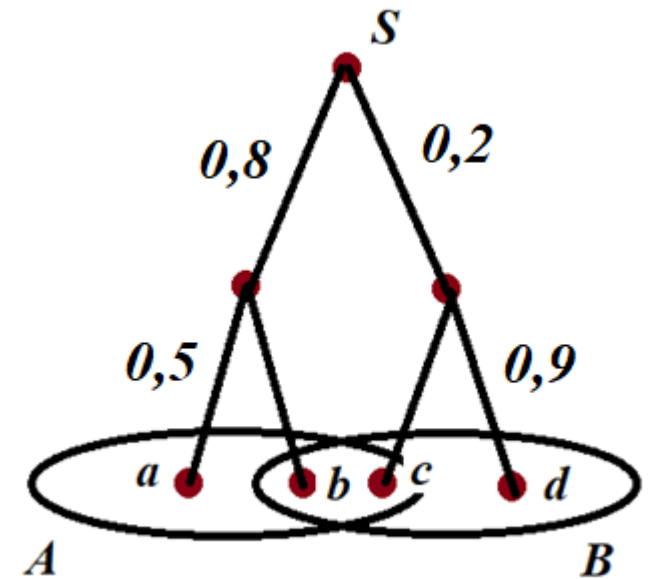
$$P(\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} - \text{две осечки подряд,}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$$

- 43. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события « a, b, c », а событию B благоприятствуют события « b, c, d ». Найдите вероятность $P(A|B)$ – условную вероятность A при условии B .



- Решение: $P(AB)=P(A|B)P(B)$
- $P(AB)=0.8*0.5+0.2*0.1=0.42$
- $P(B)=0.8*0.5+0.2*(0.1+0.9)=0.6$
- $P(A|B)=0.42/0.6=0.7$



- 32. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

$\left. \begin{array}{l} H_1 - \text{пациент болен} \\ H_2 - \text{пациент здоров} \end{array} \right\} - \text{полная группа несовместных событий}$

$$\Rightarrow P(H_1) + P(H_2) = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(H_1) = x \\ P(H_2) = 1 - x \end{cases}$$

$$A - \text{положительный тест} \Rightarrow \begin{cases} P(A / H_1) = 0.86 \\ P(A / H_2) = 1 - 0.94 = 0.06 \end{cases}$$

Формула полной вероятности

$$P(A) = P(A / H_1) \cdot P(H_1) + P(A / H_2) \cdot P(H_2) = 0.1$$

$$x \cdot 0.86 + (1 - x) \cdot 0.06 = 0.1$$

$$0.8x = 0.04 \Rightarrow x = 0.05$$

Какова вероятность,

что пациент действительно болен $\Rightarrow$

Вероятность гипотезы H_1 при условии,

что событие A произошло

$$P(H_1 / A) = \frac{P(A / H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.05 \cdot 0.86}{0.1} = 0.43$$

- 33. Телефон передает *sms*-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой следующей попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше 2 попыток.

- Решение: А – сообщение передано в первой попытке, В – сообщение не передано в первой попытке, но передано во второй, А и В – несовместные события, но вероятность В зависит от А.
- ушло с первой попытки $P(A) = p$
- ушло со второй $P(B) = p(1-p)$

- C — «для отправки сообщения потребовалось не более 2 попыток»

$$P(C) = P(A) + P(B) = p + p(1 - p)$$

$$p = 0.4 \Rightarrow P(C) = 0.4 + 0.4 \cdot 0.6 = 0.4 + 0.24 = 0.64$$

- 34. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ – формула Бернулли

$n = 10$ – монету бросают 10 раз

$p = 0.5$ – вероятность появления орла в одном броске

Выпало 5 орлов $\Rightarrow m = 5 \Rightarrow$

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 (0.5)^5 (0.5)^5 = \frac{10!}{5!5!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Выпало 4 орла $\Rightarrow m = 4 \Rightarrow$

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 (0.5)^4 (0.5)^6 = \frac{10!}{6!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

- Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

$$\frac{\frac{10!}{5!5!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{10!}{6!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{10!6!4!}{5!5!10!} = \frac{6!4!}{5!5!} = \frac{6*4!}{5!} = \frac{6}{5} = 1,2$$

- 35. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «*Шеш-беш*»: гость бросает одновременно 2 игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.

- Комбинация «5 и 6» - очков, возможны два варианта:
- 1) на первом кубике - 6, а на втором – 5;
- 2) на первом кубике - 5, а на втором – 6;
- А - при первом броске выпала одна из ЭТИХ комбинаций:

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

- В – при первом броске такая комбинация не выпала, но выпала при втором броске:

$$P(B) = P(B / \bar{A}) = \frac{34}{36} \cdot \frac{2}{36} = \frac{17}{18^2} = \frac{17}{324}$$

- С - выбросить комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток.
- А и В – не совместны

$$P(C) = P(A) + P(B) = P(A) + P(B / \bar{A}) = \frac{1}{18} + \frac{17}{324} = \frac{35}{324} \approx 0.11$$

- 36. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

	Количество вариантов	Вероятность варианта	Учет количества вариантов
4=4	1	1/6	1/6
4=3+1	2	1/36	2/36
4=2+2	1	1/36	1/36
4=2+1+1	3	1/216	3/216
4=1+1+1+1	1	1/1296	1/1296

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{1}{6^4} =$$

$$= \frac{6^3 + 3 * 6^2 + 3 * 6 + 1}{6^4} = \frac{343}{6^4}$$

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{343}{6^4}} = \frac{6^3}{343} \approx 0,63$$

- 37. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда A . Какова вероятность того, что эта команда выигрывает следующий раунд?

- Пусть 1,2,3,4 и 5 – номера команд, чем выше номер команды тем она сильнее (для удобства).
- Номер команды A – не ниже 3 (иначе не сможет победить в двух раундах)
- Выпишем все комбинации команд (с учетом силы команды), которые играли в первом раунде
- 123, 213, 124, 134, 234, 214, 314, 324, 125, 135, 145, 235, 245, 345, 215, 315, 415, 325, 425, 435 всего 20 вариантов.
- Если $A=3$, тогда A точно проиграет в третьем туре

- Если $A=4$, тогда

$1, 2, 4$ или $2, 1, 4 \Rightarrow 3$ или $5 \Rightarrow$ вероятность выиграть $0,5$

$1, 3, 4$ или $3, 1, 4 \Rightarrow 2$ или $5 \Rightarrow$ вероятность выиграть $0,5$

$2, 3, 4$ или $3, 2, 4 \Rightarrow 1$ или $5 \Rightarrow$ вероятность выиграть $0,5$

- вероятность выиграть третий раунд $0,5$

- Если $A=5$, тогда

$1, 2, 5$ или $2, 1, 5 \Rightarrow \{3, 4\} \Rightarrow$ вероятность выиграть 1

$1, 3, 5$ или $3, 1, 5 \Rightarrow \{2, 4\} \Rightarrow$ вероятность выиграть 1

$1, 4, 5$ или $4, 1, 5 \Rightarrow \{2, 3\} \Rightarrow$ вероятность выиграть 1

$2, 3, 5$ или $3, 2, 5 \Rightarrow \{1, 4\} \Rightarrow$ вероятность выиграть 1

$2, 4, 5$ или $4, 2, 5 \Rightarrow \{1, 3\} \Rightarrow$ вероятность выиграть 1

$3, 4, 5$ или $4, 3, 5 \Rightarrow \{1, 2\} \Rightarrow$ вероятность выиграть 1

- вероятность выиграть третий раунд 1

- Выдвигаем гипотезы:
- H_1 – « $A=3$ »; H_2 – « $A=4$ »; H_3 – « $A=5$ »;
- 123,213, 124,214,134,314,234,324,
125,215,135,315,145,415,235,325,245,425,345,435, всего 20 вариантов,
тогда
- $P(H_1)=0,1; P(H_2)=0,3; P(H_3)=0,6;$
- $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0,1+0,3+0,6=1$
- Следовательно « $H_1 ; H_2 ; H_3$ » - полная группа несовместных событий.
Применим формулу полной вероятности

- Событие « B » - команда A выиграла в третьем раунде
- $P(B/H_1)=0; P(B/H_2)=0,5; P(B/H_3)=1;$
- Полная вероятность события B :
- $P(B)=P(H_1) * P(B/H_1)+P(H_2) * P(B/H_2)+P(H_3) * P(B/H_3)=$
- $0,1*0+0,3*0,5+0,6*1=0,15+0,6=0,75$

- Более простое рассуждение:

- Команда A уже обыграла две команды, поэтому, если расставить их по силе в порядке убывания, получится:

- $A O O$, где O — обыгранная команда.

- Следующий соперник может располагаться на одном из четырех равновероятных мест:

- $_ A _ O _ O _$.

- Из этих четырех положений четыре находятся справа от A , и в этих случаях команда A победит, а одно слева, при этом команда A проиграет. Значит, вероятность победы команды A в третьем раунде равна:

$$P(A) = \frac{3}{4} = 0,75$$

- Вывод: «Какова вероятность того, что эта команда выиграет ***n***-ый раунд?»

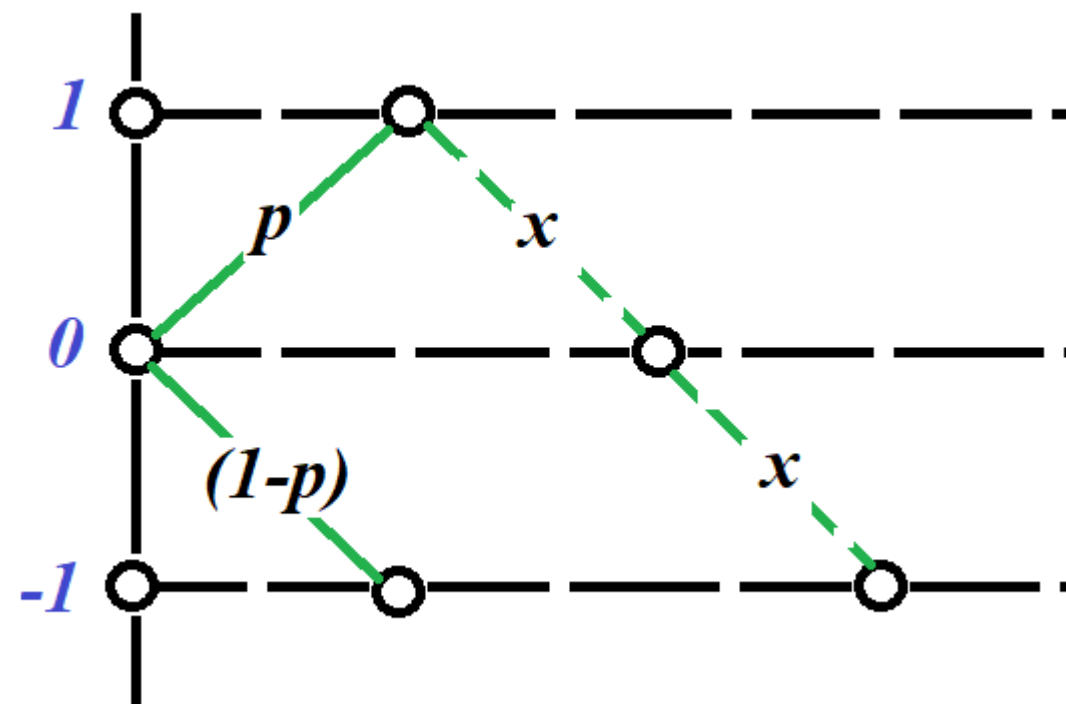
$$P(A) = \frac{n}{n+1}$$

- 38. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда A . Какова вероятность того, что команда A не самая сильная, если она прошла в третий раунд?

- В следующий круг могли пройти команды с номерами 4 или 5, «А» не самая сильная, значит $A=4$.
- Применим формулу Байеса, в условиях задачи 37:
- $P(H_2/B) = P(H_2) * P(B/H_2)/P(B) = (0,3 * 0,5)/0,75 = 1/5 = 0,2$

- 39. Первый член последовательности целых чисел равен «0». Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p=0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p$ меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен «- 1»?

- Пусть x - вероятность того, что из какого-то члена последовательности, мы можем прийти к числу, которое на 1 меньше исходного.
- В частности из «0» придем к «-1», таким образом x — искомая вероятность



$$x = (1 - p) + p \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$p \cdot x^2 - x + (1 - p) = 0$$

$$D = 1 - 4p(1 - p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p - 1)^2$$

$$x = \frac{1 + 2p - 1}{2p} = 1 \text{ или } x = \frac{1 - 2p + 1}{2p} = \frac{1 - p}{p}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1 - p}{p} \\ p = 0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1 - 0.8}{0.8} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25 \text{ или } 1?$$

- A – выпала «-1», тогда $P(A)=0,25$ (т.к. $p > (1-p)$)
- B - выпала «1», тогда $P(B)=1$ – достоверное событие!!!

- 40. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

- Решение: поразить мишень можно «первым выстрелом» или «вторым при условии, что первым выстрелом был промах»
- А — мишень поражена, тогда
 $P(A)=0,8+0,8*0,2=0,96$
- Применяем формулу Бернулли:

- Применяем формулу Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

• «В» - поражено 5 мишеней из 5, тогда

$$\left. \begin{array}{l} n = 5, \\ m = 5, \\ p = 0.96 \end{array} \right\} \Rightarrow P_5(5) = C_5^5 \cdot (0.96)^5 \cdot (1 - 0.96)^0 = \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot (0.96)^5 = (0.96)^5$$

• «С» - поражено 4 мишени из 5, тогда

$$\left. \begin{array}{l} n = 5, \\ m = 4, \\ p = 0.96 \end{array} \right\} \Rightarrow P_5(4) = C_5^4 \cdot (0.96)^4 \cdot (1 - 0.96)^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot (0.96)^4 \cdot 0.04 = (0.96)^4 \cdot 0.2$$

$$\frac{(0.96)^5}{(0.96)^4 \cdot 0.2} = \frac{0.96}{0.2} = \frac{9.6}{2} = 4.8$$

Случайные величины

- **Определение.** Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.
- Случайные величины можно разделить на две категории.
- **Определение.** Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).
- Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.
- Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Закон распределения дискретной случайной величины.

- **Определение.** Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.
- Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.
- Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется рядом распределения.
- Графическое представление этой таблицы называется многоугольником распределения. При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

- **Пример.** По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.
- Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти были найдены по формуле Бернулли и равны соответственно:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m};$$

$$P_5(5) = 0,01024;$$

$$P_5(4) = 0,0768;$$

$$P_5(3) = 0,2304;$$

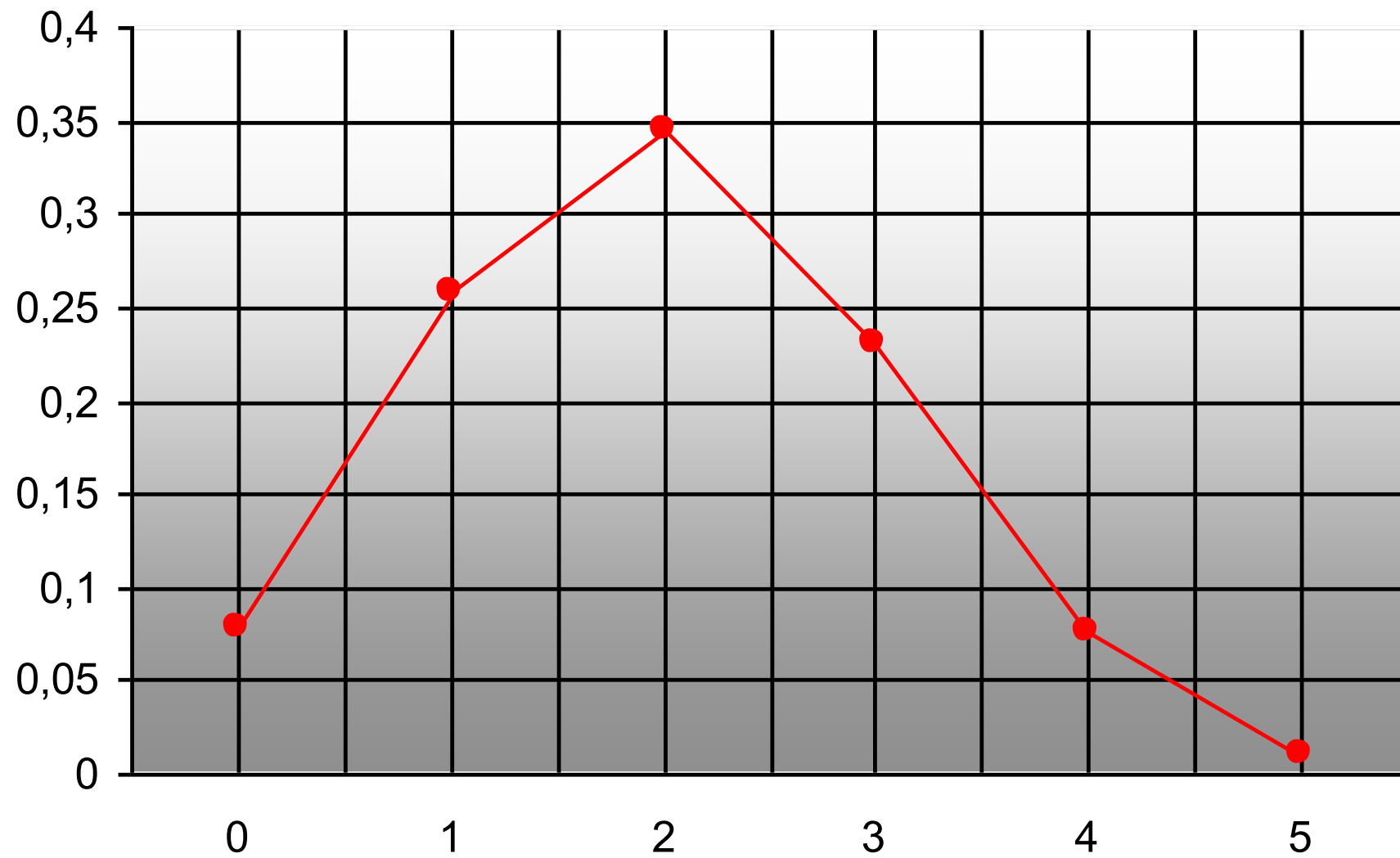
$$P_5(2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,3456;$$

$$P_5(1) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0,4^1 \cdot 0,6^4 = 0,2592;$$

$$P_5(0) = \frac{5!}{0! \cdot 5!} 0,4^0 \cdot 0,6^5 = 0,6^5 = 0,0778;$$

Ряд распределения

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,0778	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024



Числовые характеристики дискретных случайных величин.

- Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

- Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.
- С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной. $M(C) = C$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания. $M(Cx) = CM(x)$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. $M(XY) = M(X)M(Y)$

Это свойство справедливо для произвольного числа независимых случайных величин.

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots M(X_n)$$

Свойства математического ожидания.

- 4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

- Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$$

- Однако, математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.
- Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

- **Определение.** Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

- **Теорема.** Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Свойства дисперсии.

- 1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

- 3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

- 4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Биномиальное распределение (схема Бернулли)

- **Теорема.** Математическое ожидание $M(X)$ числа появления события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.

$$M(X) = np$$

- **Теорема.** Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в каждом испытании.

$$D(X) = npq$$

Среднее квадратическое отклонение.

- **Определение.** Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

- **Теорема.** Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}$$

- **Задача 45:** Для независимых случайных величин X и Y заданы законы распределения:

X	0	1	2
$P(X)$	0,25	0,35	a

Y	-1	0	1
$P(Y)$	0,24	a	b

- Найдите 1) $M(7x-18y+6)$; $D(2x-3y+6)$;

$$1 \text{ шаг } \begin{cases} 0.25 + 0.35 + a = 1 \\ 0.24 + a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.4 \\ b = 0.36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$M(7x - 18y + 6) = M(7x) - M(18y) + M(6) = 7M(x) - 18M(y) + 6;$$

$$M(x) = 0 * 0.25 + 1 * 0.35 + 2 * 0.4 = 1.15$$

$$M(y) = -1 * 0.24 + 0 * 0.4 + 1 * 0.36 = 0.12$$

$$M(7x - 18y + 6) = 7 * 1.15 - 18 * 0.12 + 6 = 11.89$$

$$D(2x - 3y + 6) = 2^2 D(x) + (-3)^2 D(y) = 4D(x) + 9D(y)$$

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

$$D(y) = M(y^2) - (M(y))^2$$

$$\left. \begin{aligned} M(x^2) &= 0^2 * 0.25 + 1^2 * 0.35 + 2^2 * 0.4 = 1.95 \\ M(x) &= 1.15 \Rightarrow M^2(x) = (1.15)^2 = 1.3225 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(x) = 1.95 - 1.3225 = 0.6275$$

$$\left. \begin{aligned} M(y^2) &= (-1)^2 * 0.24 + 0^2 * 0.4 + 1^2 * 0.36 = 0.6 \\ M(y) &= 0.12 \Rightarrow M^2(y) = (0.12)^2 = 0.0144 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(y) = 0.6 - 0.0144 = 0.5856$$

$$D(2x - 3y + 6) = 4 * 0.6275 + 9 * 0.5856 = 7.7804$$

Неравенство Чебышева

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

- 47. Про случайную величину X известно, что $M(X)=4$, $D(X)=10$. Оцените при помощи неравенства Чебышева вероятность события « $X < -1$ или $X > 9$ ».

$$P\left(|X - M(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|X - 4\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{10}{\varepsilon^2}$$

$$X < -1 \Rightarrow \left|X - 4\right| \geq \varepsilon \Rightarrow \left|-1 - 4\right| = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 5$$

$$X > 9 \Rightarrow \left|X - 4\right| \geq \varepsilon \Rightarrow \left|9 - 4\right| = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 5$$

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|X - 4\right| \geq 5\right) \leq \frac{10}{25} \Rightarrow 0.4$$

Математическая статистика

- Математическая статистика — наука, изучающая методы исследования закономерностей в массовых случайных явлениях и процессах по данным, полученным из конечного числа наблюдений за ними.

Математическая статистика

- Для обнаружения закономерностей, описывающих исследуемое массовое явление, необходимо иметь опытные данные, полученные в результате обследования соответствующих объектов, отображающих массовое явление.

Математическая статистика

- Зачастую реально существующую совокупность объектов можно мысленно дополнить любым количеством таких же однородных объектов. Такие совокупности объектов будем называть *генеральными совокупностями*.

Часть отобранных объектов из генеральной совокупности называется *выборочной совокупностью* или *выборкой*.

Для того чтобы по отобранным значениям некоторого количественного показателя можно было достаточно уверенно судить обо всей совокупности, полученная выборка должна быть *репрезентативной* (*представительной*), т.е. правильно отражать пропорции генеральной совокупности.

- Выборка будет представительной лишь тогда, когда все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. Для этого шары должны быть перемешаны.
- Другими словами, репрезентативность выборки обеспечивается случайностью отбора объектов в выборку.

- **Мода** — это наиболее часто встречающийся вариант ряда. Мода применяется, например, при определении размера одежды, обуви, пользующейся наибольшим спросом у покупателей. Модой для дискретного ряда является варианта, обладающая наибольшей частотой.
- **Медиана** — это значение признака, которое лежит в основе ранжированного ряда и делит этот ряд на две равные по численности части.

• **Выборочным средним** называется
величина равная среднему
арифметическому ряда.

• **Размахом вариационного ряда**
называется разность наибольшего и
наименьшего значений ряда.

- Пример: Для вариационного ряда:
1,1,1,5,5,5,2,2,3,1,1,4,8,9,7,7,7,7,5,6,4,8,
9,5,4,7,5
- Укажите моду, медиану, среднее и размах.

•Решение:

•*1,1,1,1,1,2,2,3,4,4,4,5,5,5,5,5,5,6,7,7,7,7,*
7,8,8,9,9

- Решение:
- **$1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9$**
- **Мода-5**
- **Медиана-5**
- **Среднее – 4,78**
- **Размах - 8**

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

- 41. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 10 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

- **Теорема.** Вероятность события A , которое может произойти вместе с одним из событий

$$H_1, H_2, \dots, H_n,$$

- образующих полную группу, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A .

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

- Доказательство:

-

$H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий $\Rightarrow$

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n = \sum_{i=1}^n AH_i$$

$H_1, H_2, \dots, H_n$ – несовместны $\Rightarrow$

AH_i – несовместны

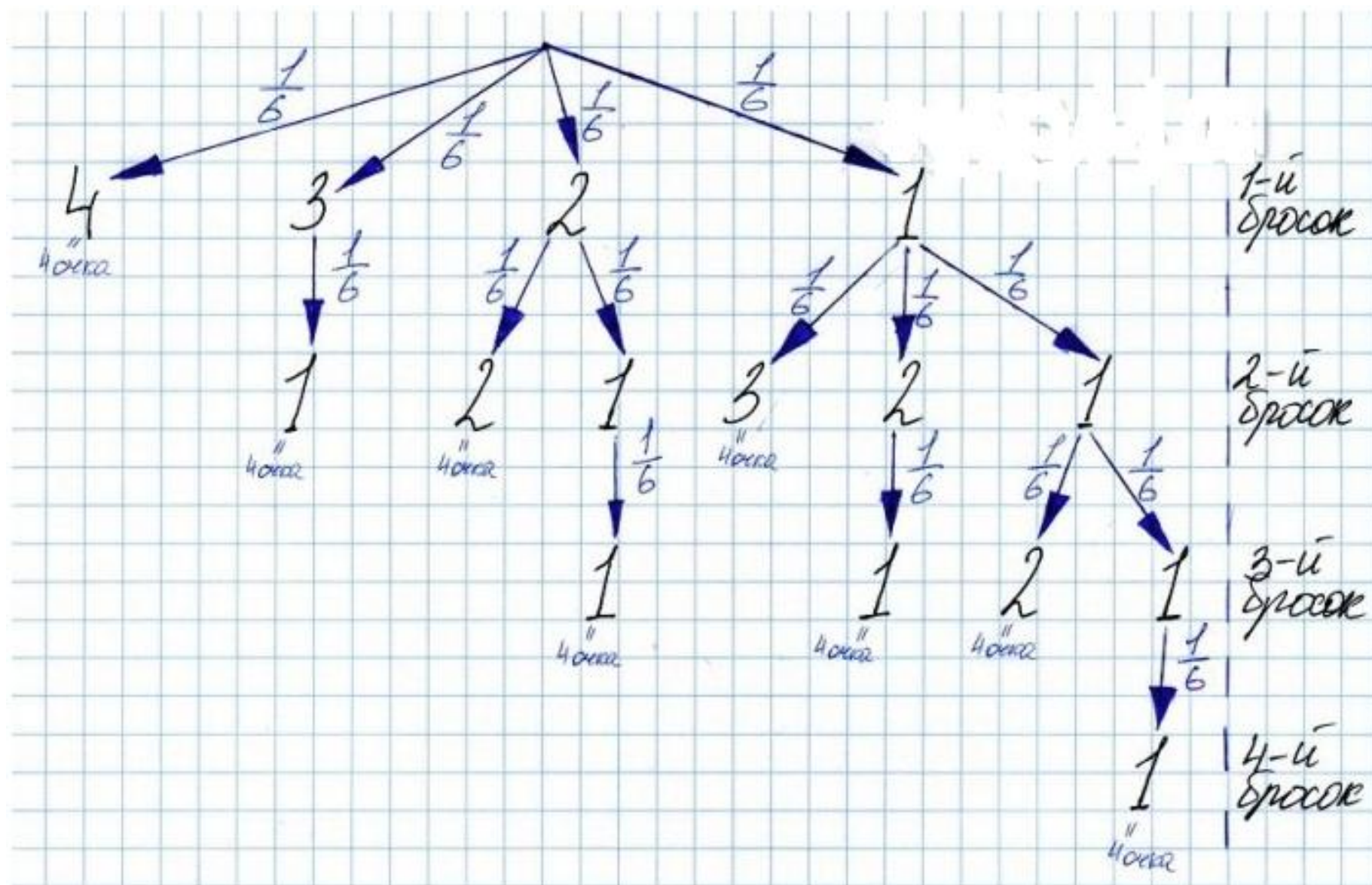
- Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i), \text{ при этом}$$

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A / H_i) \Rightarrow$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i) \Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

- 36. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \\
 & = \frac{6^3 + 3 * 6^2 + 3 * 6 + 1}{6^4} = \frac{343}{6^4}
 \end{aligned}$$

- rustem-af.ru
- Раздел ЕГЭ
- Опорные конспекты