

1.1. Примеры и конструкции

1.1.1. (Всеросс., 2020, МЭ, 7.1) Запишите десять раз число 1,11 и одиннадцать раз число 1,01. Зачеркните одно или несколько чисел так, чтобы сумма оставшихся чисел была равна 20,19.

1.1.2. (Всеросс., 2021, МЭ, 7.1) Нарисуйте ряд из 11 кружочков, каждый из которых либо красный, либо синий, либо зелёный. Причём из любых трёх идущих подряд кружочков должен быть хотя бы один красный, из любых четырёх идущих подряд кружочков должен быть хотя бы один синий, а зелёных должно быть больше половины. Сколько красных кружочков у Вас получилось?

1.1.3. (Всеросс., 2020, МЭ, 7.2) Расположите на плоскости точки A, B, C, D и E так, чтобы можно было указать ровно восемь треугольников с вершинами в отмеченных точках. Перечислите эти треугольники.

1.1.4. (Всеросс., 2021, МЭ, 7.2) Представьте число 32 как произведение трёх целых множителей, сумма которых равна 3. Чему равен меньший из множителей?

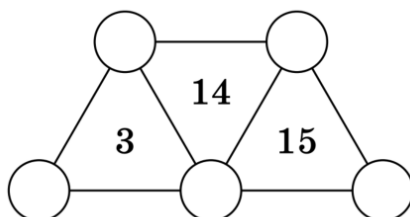
1.1.5. (САММАТ, 2021, 7.4) Представить число 1 в виде суммы пяти дробей вида $\frac{1}{n}$ с различными натуральными знаменателями n .

1.1.6. («Бельчонок», 2023, 7.1) Расположите в каких-то клетках квадрата 6×6 по одной снежинке (*) так, чтобы в любой строке было ровно три снежинки, а в любом столбце — одна или четыре снежинки.

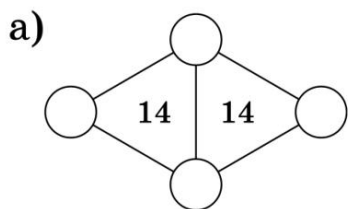
1.1.7. («Бельчонок», 2018, 7.1) Лена купила два мотка шнура для вязания ковра. В одном мотке 600 м шнура, в другом — 14 м. Как Лена может отмерить 1 м шнура, не пользуясь измерительными приспособлениями?

1.1.8. (Всесиб., 2023, 7.1) Сто эльфов разного возраста встали в круг. Каждый из них, кто оказался старше обоих своих соседей, закрыл левый глаз. Каждый же, кто оказался младше обоих соседей, закрыл правый. В итоге оказалось, что все эльфы стоят с закрытым глазом. Приведите пример, как такое может быть возможно.

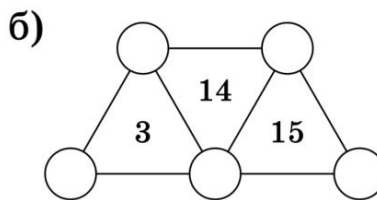
1.1.9. (Математический праздник, 2022, 7.1) Ваня расставил в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Потом он стёр цифры в кружочках. Впишите в кружочки различные цифры так, чтобы условие выполнялось.



1.1.10. (*Матпраздник в Матвертикали, 2022, 7.1*) На рисунке изображены два кодовых замка. Замок откроется, если вписать в кружочки различные цифры так, чтобы число внутри каждого из треугольников совпало или с суммой, или с произведением цифр в его вершинах. Какая комбинация из а) четырёх б) пяти различных цифр откроет замок?



[1 балл]



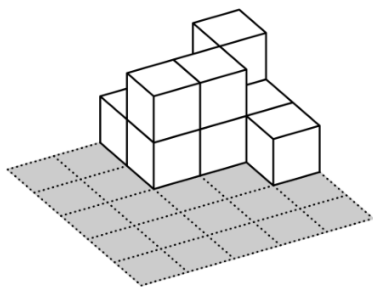
[3 балла]

1.1.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.1, 7.1*) Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.

1.1.12. (*Всесиб., 2020, 7.2*) Юра и Рома нашли пять натуральных чисел, идущих подряд, и возвели каждое из них в квадрат. После этого Юра забрал себе три из пяти получившихся квадратов, а Рома два оставшихся. Оказалось, что сумма чисел, которые забрал Юра, равна сумме чисел, которые забрал себе Рома. Приведите пример чисел, которые могли найти Юра и Рома, и проверьте, что они подходят.

1.1.13. (*Математический праздник, 2023, 7.2*) Посреди пустого бассейна стоит квадратная платформа 50×50 сантиметров, расчерченная на клеточки 10×10 см. На клетки платформы Лена ставит башенки из кубиков $10 \times 10 \times 10$ см. Потом Таня включает воду.

Если высоты башенок были такие, как в таблице справа, то при уровне воды 5 см был 1 остров, при уровне воды 15 см было два острова (если острова «граничат по углу», то считаются отдельными островами), а при уровне воды 25 см все башенки оказались закрыты водой и стало 0 островов.



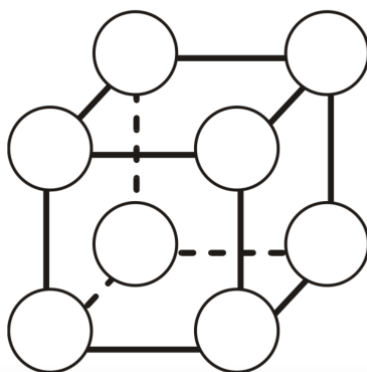
0	0	1	1	2
0	0	2	2	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Придумайте, какие башенки из кубиков можно поставить, чтобы количество островов было следующим:

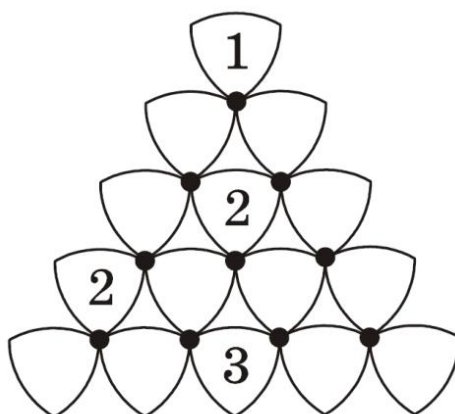
Уровень воды (см)	5	15	25	35	45
Количество островов	2	5	2	5	0

В ответе напишите в каждой клетке квадрата 5 на 5, сколько кубиков на ней стоит.

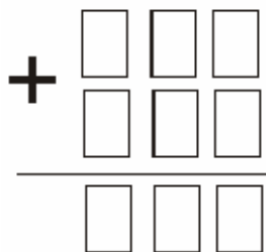
1.1.14. (Турнир Архимеда, 2021.2) **Расставьте цифры** от 1 до 8 по одной в вершинах куба таким образом, чтобы для каждой из шести граней суммы четырёх чисел, стоящих в вершинах этой грани, были различны.



1.1.15. (Турнир Архимеда, 2023.1.1) **Из лепестков сложен треугольник.** Требуется заполнить лепестки на рисунке числами 1, 2 и 3 так, чтобы в каждом лепестке было записано ровно одно число и соблюдалось правило: если три лепестка касаются одного и того же чёрного кружочка, то числа в них либо все одинаковые, либо все разные. Вася заполнил числами 4 лепестка. Помогите ему заполнить все лепестки в соответствии с правилом, так, чтобы сумма чисел в треугольнике была максимальной. Укажите эту сумму.

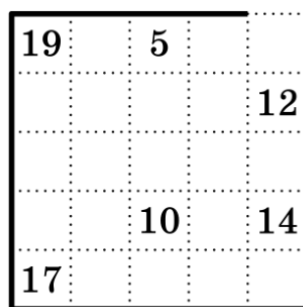


1.1.16. (Турнир Архимеда, 2023.1.2) **На столе** выложены карточки в виде примера на сложение (см. рис.). Оксана на каждой карточке написала по одной цифре (цифры не обязательно разные). Получился пример с верным ответом. Федя переложил карточки в первых двух строках (третью строку он не трогал) — ни одна из карточек не оказалась в том же числовом разряде, где была, поэтому ответ оказался неверным. На помощь пришла Настя. Ей удалось, поменяв одну карточку в третьей строке на свою карточку с другой цифрой, получить пример с верным ответом. Какими могли бы быть примеры Оксаны, Феде и Насти? Придумайте подходящий набор примеров. Достаточно одного набора.



1.1.17. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.2) Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно.

1.1.18. (Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.3) На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: квадрат 5×5 (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки. На рисунке мы скрыли от вас все внутренние стенки, идущие по линиям сетки. Начертите, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было покинуть лабиринт, стартовав из этой клетки (шаг делается в соседнюю по стороне клетку, если они не разделены стенкой). Достаточно нарисовать один пример.

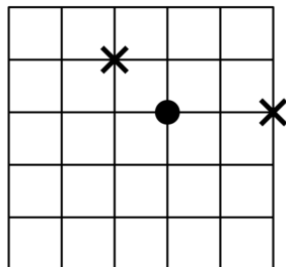


1.1.19. («Бельчонок», 2021, 7.3) На клетчатой бумаге нарисованы два квадрата размерами 3×3 и 4×4 клеток. Придумайте, как разрезать по линиям сетки каждый из них на две части так, чтобы из полученных частей складывался квадрат.

1.1.20. (САММАТ, 2021, 7.9) Найдите пару натуральных чисел k и n таких, что

$$k^n = 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 2020 \quad (n \neq 1).$$

1.1.21. (Математический праздник, 2022, 6.4, 7.4) Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чувствует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.

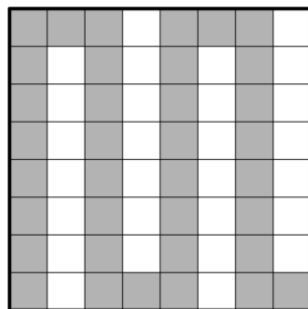


1. Отметьте ещё пять перекрёстков, где могла бы задумчиво сидеть мышка (откуда до обоих кусочков сыра ей нужно пробежать одинаковое расстояние).
2. Придумайте, на каких двух перекрёстках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышки перекрёстков оказалось как можно больше.

1.1.22. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.4*) Придумайте два различных набора из восьми натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

1.1.23. (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.6*) Жюри покрасило несколько клеток доски размером 8×8 , соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой (соседними считаются клетки с общей стороной). Нам удалось покрасить 36 клеток (см. рис.). Побейте наш рекорд и постарайтесь закрасить как можно больше клеток.



1.2. Да или нет?

1.2.1. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.1*) Существуют ли такие натуральные числа a , b и c что $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$?

1.2.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.1, 6.1, 7.1*) За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021?

1.2.3. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.1*) Рабочая зона электрической подстанции имеет несколько трансформаторных залов. В начале рабочего дня количество залов, в которых работающих и выключенных трансформаторов было поровну, составляло шестую часть всех залов. Когда в каждом зале включили еще по одному трансформатору, количество залов, в которых работающих и выключенных трансформаторов стало поровну, увеличилось до трети от их общего количества. Могло ли в начале рабочего дня залов, в которых количество работающих и выключенных трансформаторов отличалось на единицу, быть более половины всех залов?

1.2.4. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.1*) Существуют ли четыре таких различных делящихся на 3 числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое?

1.2.5. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.1*) Можно ли разрезать клетчатый квадрат 8×8 по клеточкам на 7 фигур равного периметра?

1.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 7.1*) Существует ли число, имеющее ровно 8 натуральных делителей:

$$a < b < c < d < e < f < g < h,$$

такое что $a + b + c = d$ и $e + f + g = h$?

1.2.7. (*Московская устная олимпиада, 2023, 7.1*) **По кругу.** Петя расставил по кругу числа от 1 до 15 в некотором порядке и вычислил разность каждых двух соседних чисел (вычитая из большего числа меньшее). Может ли сумма всех полученных разностей равняться 24?

1.2.8. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.2*) Можно ли расставить на рёбрах куба 12 чисел 1, 2, ..., 12 так, чтобы произведение четырех чисел верхней грани равнялось произведению четырех чисел нижней грани?

1.2.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 7.2*) В вершинах куба расставили целые числа, а затем для каждой грани подсчитали произведение четырех чисел в вершинах этой грани. Могло ли оказаться так, что все шесть подсчитанных произведений отрицательны?

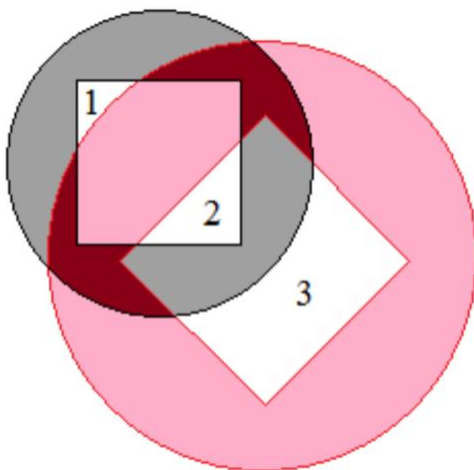
1.2.10. (*Всесиб.*, 2016, 7.2) Можно ли покрасить плоскость в 2016 цветов таким образом, что среди вершин любого треугольника найдётся хотя бы два цвета?

1.2.11. (*«Бельчонок»*, 2019, 7.2) Можно ли разбить куб со стороной 6 на 112 кубиков с целыми сторонами (не обязательно равных)?

1.2.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»*, 2020, 7.2) Найдутся ли три натуральных числа, больших 1, произведение которых равно 500 000 080 000 003?

1.2.13. (*Открытая олимпиада*, 2016, 7.2) Мальчик Вася посмотрел на часы и увидел там какое-то время с количеством часов, большим нуля. Увиденные цифры он прочитал как трёх- или четырёхзначное число (например 5:07 превратилось бы у него в 507). Затем он вычислил количество минут, прошедшее с полуночи. Могло ли получиться так, что первое полученное им число делится на второе?

1.2.14. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»*, 2019, 6.3, 7.2) Будем называть *странным кольцом* круг с квадратной дыркой в середине (центры квадрата и круга совпадают; оставшаяся часть круга при этом не должна распадаться на части). Если положить на стол два странных кольца, то может получиться фигура с несколькими дырками (например, на рисунке их 3).



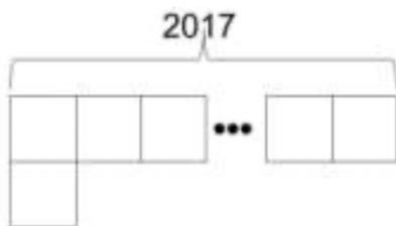
А можно ли вырезать из бумаги два странных кольца и положить их на стол так, чтобы получилось больше 5 дырок?

1.2.15. (*«Будущие исследователи — будущее науки»*, 2023, 7.3) Существует ли набор из 25 различных целых чисел, обладающих следующим свойством: сумма всех 25 чисел равна нулю, а для любых 24 из них модуль суммы больше 25?

1.2.16. (*Турнир Архимеда*, 2022.2.1) На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.

1.2.17. (*«Надежда энергетики»*, 2021, 7.3) Дано 2021 целое число. Их произведение равно 1. Может ли сумма их кубов быть равной нулю?

1.2.18. (*Всесиб.*, 2017, 7.3) Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрасили в чёрный и белый цвета таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повернутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки плоскости покрашены в шахматном порядке?



1.2.19. (*«Надежда энергетики»*, 2015, 7.6) Произведение 2015 целых чисел равно 1. Может ли сумма их 2015-х степеней быть равной нулю?

1.2.20. (*«Бельчонок»*, 2019, 7.3) Оля написала на своем листке несколько чисел, оканчивающихся на 2, а Катя написала на своем листке столько же чисел, оканчивающихся на 3. Потом Оля написала на своем листке несколько чисел, оканчивающихся на 3, а Катя написала на своем листке столько же чисел, оканчивающихся на 4. У каждой девочки на листке оказалось записано по 25 чисел. Могут ли суммы чисел Оли и Кати быть равными?

1.2.21. (*«Надежда энергетики»*, 2015, 7.3) На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей?

1.2.22. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»*, 2020, 6.2, 7.3, 8.1) Полина написала восемь последовательных натуральных чисел и обвела четыре из них чёрной ручкой, а четыре — красной. Может ли произведение красных чисел оказаться в 20 раз больше произведения чёрных?

1.2.23. (*Открытая олимпиада*, 2018, 7.3) По кругу стоят 20 блюдечек, на них разложены 40 пирожков. За один ход разрешается взять 2 пирожка, лежащие на одном блюдечке, и переложить их на 2 соседних блюдечка. При любом ли начальном расположении пирожков можно добиться того, чтобы на всех блюдечках оказалось поровну пирожков?

1.2.24. (*«Будущие исследователи — будущее науки»*, 2017, 7.4) Есть 20 палочек длины 1, 2, ..., 20. Можно ли из них сложить

а) квадрат;

б) равносторонний треугольник? (Нужно использовать, не ломая, все палочки.)

1.2.25. (*Московская устная олимпиада*, 2021, 7.4) Можно ли расставить по кругу цифры от 1 до 9 так, чтобы любые две цифры, стоящие подряд, если их прочесть как по часовой, так и против часовой стрелки, образовывали составное двузначное число?

1.2.26. (*Московская устная олимпиада, 2022, 7.4*) На доске записаны четыре последовательных натуральных числа в порядке возрастания. Требуется между каждыми двумя соседними числами поставить знак арифметического действия и вычислить значение полученного выражения. Всегда ли можно сделать это двумя различными способами, дающими одинаковые результаты?

1.2.27. (*«Бельчонок», 2022, 7.4*) Сумма нескольких натуральных чисел равна 2022. Арина поделила каждое чётное число на два, а каждое нечётное умножила на три. Могла ли сумма чисел не измениться?

1.2.28. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.4*) Существует ли натуральное четырёхзначное число с суммой цифр 23, которое делится на 23?

1.2.29. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.4*) Даны три числа: пятизначное, четырёхзначное и трёхзначное. Каждое из них состоит из одинаковых цифр (каждое — из своих). Может ли получиться так, что их сумма — пятизначное число, состоящее из пяти различных цифр?

1.2.30. (*Всесиб., 2018, 7.4*) Число называется *хорошим*, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 5. Вера написала хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные — на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?

1.2.31. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.5*) Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, ..., 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

1.2.32. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.6*) На каждой из шести граней куба написали число. Потом на каждом из двенадцати рёбер написали сумму чисел на двух соседних с ним гранях. Можно ли, зная эти 12 чисел на рёбрах, однозначно восстановить числа на гранях?

1.2.33. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.6*) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число 222...2225?

1.2.34. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.7, 7–8.6, 9.5*) Можно ли так расставить знаки «+» и «−» на месте звездочек так, чтобы получилось верное равенство

$$* 1^2 * 2^2 * \dots * 2020^2 = 2020?$$

1.2.35. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.7*) Можно ли 2015-угольник разбить на параллелограммы?

1.2.36. (*Турнир Архимеда, 2022.2.4*) В кладовой Царя Гороха (ЦГ) лежат 2007 мешков с монетами, в каждом из них — ровно 2022 монеты. Мешки пронумерованы различными числами от 1 до 2007. ЦГ выбирает один из мешков и перекладывает из него по одной монете в мешки с номерами большими, чем у выбранного. Иван Царевич (ИЦ) имеет право указать номера нескольких мешков, а ЦГ сообщает, ему, сколько всего монет оказалось в

указанных мешках после переукладывания (в сумме!). Сможет ли ИЦ определить номер выбранного ЦГ мешка? Если да, объясните как. Если нет, объясните почему.