

Глава 2. Арифметика

2.1. Десятичная запись

Дополнительные задачи — в листке «Десятичная система счисления».

2.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.3*) Листы в книге пронумерованы следующим образом: первый лист — это две страницы (с номерами 1 и 2), второй лист — это следующие две страницы (с номерами 3 и 4) и так далее. Хулиган Петя вырвал из книги несколько подряд идущих листов: первая вырванная страница имеет номер 185, а номер последней вырванной страницы состоит из тех же цифр, но идущих в другом порядке. Сколько листов вырвал Петя?

2.1.2. (*«Бельчонок», 2021, 7.1*) Вася утверждает, что существует такое четырёхзначное число $\overline{abcd}$, в записи которого используются различные ненулевые цифры, что сумма $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ делится на 101. Прав ли Вася?

2.1.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.1, 8.1*) В четырёхзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трёхзначное число. Затем он разделил исходное число на это трёхзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа.)

2.1.4. (*САММАТ, 2021, 7.8*) Найдите все такие трёхзначные числа N , что сумма цифр числа N в 11 раз меньше самого числа N (ответ обоснуйте).

2.1.5. (*САММАТ, 2022, 7.9*) Найдите числа $\overline{abc5}$ и $\overline{mn}$, если они удовлетворяют условию

$$\overline{abc5} : 11 = \overline{mn}.$$

2.1.6. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.1*) Подряд без пробелов выписали все натуральные числа в порядке возрастания:

1234567891011 ...

Какая цифра стоит на 2017 месте в получившемся длинном числе?

2.1.7. (*Турнир Архимеда, 2021.1*) На столе «касса цифр» (набор бумажных карточек с цифрами). Маша выложила из карточек четырёхзначное число. Толя заменил в числе все карточки на другие: каждую цифру либо уменьшил на 4, либо увеличил на 1. Число уменьшилось в 4 раза. Какое число могла выложить Маша? Что могло получиться у Толи? (Найдите как можно больше вариантов ответов.)

2.1.8. (*«Высшая проба», 2023, 7.1*) Найдите наименьшее десятизначное натуральное число, все цифры которого различны, такое, что при вычёркивании всех чётных цифр остаётся 97531, а при вычёркивании всех нечётных цифр — 02468.

2.1.9. (*«Росатом», 2015, 7.2*) Первая цифра пятизначного натурального числа a равна 1. Если переставить единицу на последнее место, то полученное число будет на 5842 меньше утроенного числа a . Найти a .

2.1.10. («Курчатов», 2021, 7.2) В двузначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

2.1.11. («Ломоносов», 2021, 7–8.2) Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

2.1.12. («Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.3) Если первую цифру двузначного натурального числа N умножить на 4, а вторую умножить на 2, то в сумме полученные после умножения числа дадут $\frac{N}{2}$. Найдите N (укажите все решения).

2.1.13. («Надежда энергетики», 2018, 7.3) Для нумерации домов на проспекте Столетия Революции использовано 1917 табличек с цифрами. Каждая табличка содержит одну цифру; номер дома может содержать несколько цифр; дома нумеровались без пропусков, начиная с единицы. Сколько домов на проспекте?

Если записать каждый номер на одной другой табличке стандартного размера, то можно ли сложить все стандартные таблички в несколько (больше 1) стопок одинаковой высоты? Если это возможно, то каковы минимальное число стопок и максимальная высота каждой стопки?

2.1.14. («Бельчонок», 2018, 7.3) В заданном натуральном числе стёрли какую-то одну цифру и получили другое число. Затем из первоначального числа вычли полученное, в результате разность оказалась равной 34567. Найдите заданное натуральное число.

2.1.15. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.3) На доске записаны два двузначных числа. Андрей их перемножил, получилось четырёхзначное число с первой цифрой 2. Паша их сложил и получил трёхзначное число. Если из числа Андрея вычеркнуть первую цифру, получится число Паши. Какие числа были записаны?

2.1.16. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 7.4, 8.2) Три ученика написали на доске по двузначному числу, каждое из которых является точным квадратом. Оказалось, что если «склеить» их в одно шестизначное число, то оно тоже является квадратом натурального числа. Найдите все такие шестизначные числа.

2.1.17. («Росатом», 2015, 7.3) Доказать, что любое целое число $a > 1$, в десятичной форме записи которого используется только одна цифра 1, не может быть квадратом целого числа.

2.1.18. («Ломоносов», 2022, 7–8.5) Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число $\overline{abcde}$. Про двузначные числа $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$(\overline{ab} + \overline{bc})(\overline{bc} + \overline{cd})(\overline{cd} + \overline{de}) = 157605.$$

Найдите число $\overline{abcde}$. Многочисленные числа не могут начинаться с нуля.

2.1.19. («Надежда энергетики», 2015, 7.6) Числа 2^{2015} и 5^{2015} в их десятичной записи написаны одно за другим без пробела. Сколько всего десятичных знаков выписано?

2.2. Сумма цифр числа

Дополнительные задачи — в листке «Сумма цифр числа».

2.2.1. («Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 7.1, 8.1) Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, с суммой цифр 100. Ответ обоснуйте.

2.2.2. («Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.1, 8.1) Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $3n$ и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите n .

2.2.3. (Всесиб., 2021, 7.1) Приведите пример натурального числа, кратного 2020, такого, что его сумма цифр тоже кратна 2020.

2.2.4. («Бельчонок», 2022, 7.2) Диана написала двузначное число, и приписала к нему двузначное число, которое получилось перестановкой цифр первого числа. Оказалось, что разность между первым и вторым числом равна сумме цифр первого числа. Какое четырехзначное число написано?

2.2.5. («Росатом», 2021, 7.3) Про два двузначных, целых, положительных числа a и b известно, что

- 1) одно из них в три раза больше другого;
- 2) в их десятичной записи одна одинаковая цифра;
- 3) сумма цифр одного числа на 3 больше суммы цифр другого.

Найти эти числа.

2.2.6. («Курчатов», 2023, 7.3, 8.2) Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

2.2.7. («Росатом», 2021, 7.4) Обозначим через $s(a)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа a . Найти все такие числа a , для которых $a^2 + s(a) = 1533$.

2.3. Ребусы

Дополнительные задачи — в листке «Ребусы».

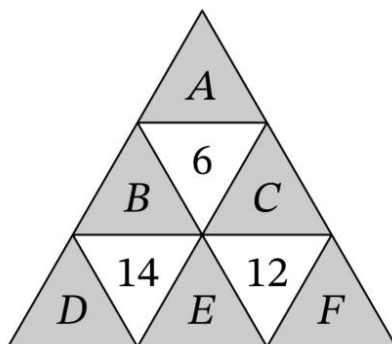
2.3.1. (Всеросс., 2023, ШЭ, 7.1) Решите ребус

$$C,BA + A,AA = B,A.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми буквами — одинаковые цифры.)

2.3.2. («Ломоносов», 2020, 7–8.1) Найдите все решения числового ребуса $AB = B^B$ (разным буквам соответствуют разные цифры; в левой части стоит двузначное число, а не произведение цифр A и B).

2.3.3. (Всеросс., 2021, ШЭ, 7.2) Денис разбил треугольник на девять треугольничков, как показано на рисунке, и расставил в них числа, при этом в белых треугольниках числа оказались равны суммам чисел в соседних с ними (по сторонам) серых треугольниках. После этого Лёша стёр числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и вместо них написал буквы A, B, C, D, E и F в некотором порядке. Получившаяся расстановка чисел и букв изображена на рисунке.



Где какие числа стояли первоначально?

- | | |
|----------------------|--------------------|
| (a) Вместо буквы A | (1) стояло число 1 |
| (b) Вместо буквы B | (2) стояло число 2 |
| (c) Вместо буквы C | (3) стояло число 3 |
| (d) Вместо буквы D | (4) стояло число 4 |
| (e) Вместо буквы E | (5) стояло число 5 |
| (f) Вместо буквы F | (6) стояло число 6 |

2.3.4. (Открытая олимпиада, 2021, 7.1) Докажите, что ребус $КУСЬ + УКСЬ = УКСУС$ не имеет решений. (В ребусе одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, разные — разными.)

2.3.5. (Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.2) В следующих примерах замените каждую букву в левой части равенства цифрой или знаком арифметического действия (одинаковые буквы одинаково, разные — по-разному) так, чтобы получилось верное равенство. Например, в выражении $ШАУРМА = 100$ можно заменить Ш на 9, А на 8, У на минус, Р на 6, М на плюс, и получится $98 - 6 + 8 = 100$. В каждом из пунктов достаточно привести один пример (в ответ запишите выражение, получающееся после замены).

- а) АНАКОН = 2020;
 б) ЯЕМЗМЕЯ = 2020.

2.3.6. (Турнир Архимеда, 2022.1.4) На нескольких карточках Вася написал цифру, а на обороте — букву (если цифры равны, то буквы одинаковы, если цифры различны, то буквы различны). Вася выкладывает из карточек слово, и вычисляет сумму (или произведение) записанных на них цифр. Если выложить слово ЛОМ, то сумма равна 5, слово МОЛВА — сумма 21, слово ВОЛ — сумма 13, слово ВИНА — сумма 29. Какая сумма может получиться, если выложено слово ЛИАНА? Какое произведение может получиться, если выложено слово МИНА? Укажите все ответы.

2.3.7. (*«Надежда энергетики», 2020, 7.4*) В современных условиях считается актуальной **цифровизация** — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательное целое число, называемое **кодом буквы**. Тогда можно определить **вес слова** как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы Е, О, С, Т, Ш, Ь элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ШЕСТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то сколькими способами его можно осуществить? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

2.3.8. (*Математический праздник, 2021, 7.4*) Фокусник научил Каштанку лаять столько раз, сколько он ей тайком от публики покажет. Когда Каштанка таким способом правильно ответила, сколько будет дважды два, он спрятал вкусный кекс в чемодан с кодовым замком и сказал:

— Восьмизначный код от чемодана — решение ребуса

$$\text{УЧУЙ} = \text{КЕ} \times \text{КС}.$$

Надо заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные разными так, чтобы получилось верное равенство. Пролай нужное число раз на каждую из восьми букв, и получишь угощение.

Но тут случился конфуз. Каштанка от волнения на каждую букву лаяла на 1 раз больше, чем надо. Конечно, чемодан не открылся. Вдруг раздался детский голос: «Нечестно! Собака правильно решила ребус!» И действительно, если каждую цифру решения, которое имел в виду фокусник, увеличить на 1, получится еще одно решение ребуса!

Можно ли восстановить: а) какое именно решение имел в виду фокусник; б) чему равнялось число УЧУЙ в этом решении?

2.3.9. (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 7.2*) Найдите какое-нибудь решение ребуса

$$\frac{\Phi}{\text{Е}} + \frac{\text{ВР}}{\text{АЛЬ}} = 1.$$

Разным буквам соответствуют разные цифры. Черта обозначает деление.

2.3.10. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.5, 7.5*) Вася решил зашифровать номер своего телефона. Для этого он заменил каждую цифру на символ, состоящий из одной или двух сторон или диагоналей квадрата, причём у каждой цифры свой уникальный код. Оказалось, что если у кодов двух цифр есть общий отрезок, то эти цифры отличаются не более, чем на два.



Пете удалось расшифровать номер телефона Васи, когда он догадался, что номер начинается с 8. Расшифруйте и Вы.

2.3.11. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.6*) Дан ребус: ЖАЛО + ЛОЖА = ОСЕНЬ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите значение буквы А.

2.3.12. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.6*) Дан ребус: АБ + ВГ + ДЕ = ЖЗИ. Разные буквы обозначают разные цифры, ни одна из цифр не равна 9, число не может начинаться с 0. Найдите наименьшее возможное значение числа ЖЗИ.

2.3.13. (*«Ломоносов», 2023, 5–6.6, 7–8.6*) До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\bar{а} = 1, \bar{в} = 2, \bar{г} = 3, \bar{д} = 4, \bar{е} = 5, \bar{и} = 8;$$

$$\bar{к} = 20, \bar{л} = 30, \bar{м} = 40, \bar{н} = 50, \bar{о} = 70, \bar{п} = 80, \bar{ч} = 90;$$

$$\bar{р} = 100, \bar{с} = 200, \bar{т} = 300, \bar{у} = 400, \bar{ф} = 500, \bar{х} = 600, \bar{ц} = 900.$$

С помощью букв числа записываются так: например, $\overline{цла} = \bar{ц} + \bar{л} + \bar{а} = 900 + 30 + 1 = 931$. Или $\overline{мд} = 44$. Или $\overline{ра} = 101$.

Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи $\overline{да}$, $\overline{чух}$, $\overline{или}$, $\overline{ал}$, $\overline{ооооо}$ запрещены.

Найдите два решения ребуса в современных буквах

$$(\overline{**} + \overline{*} \times \overline{***}) \times \overline{*} = \overline{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

2.4. Чётность

Дополнительные задачи — в листке «Чётность».

2.4.1. (*Всесиб., 2017, 7.1*) Пароход «Раритет» стремительно идёт ко дну. Если капитан Алексей раздаст ровно 2017^{2017} указаний своим 26 матросам, то пароход получится спасти. Каждому следующему матросу Алексей может дать на 2 указания меньше или на 2 указания больше, чем предыдущему. Сможет ли Алексей спасти пароход?

2.4.2. (*«Высшая проба», 2022, 7.2*) Петя записал в ряд 2021 число, отличное от нуля, и перемножил все пары соседних чисел. Среди полученных произведений оказалось 1010 положительных и 1010 отрицательных чисел. Вася записал все исходные числа в том же порядке, но по кругу, и тоже перемножил все пары соседних чисел. Сколько среди этих чисел будет положительных и сколько отрицательных? Ответ необходимо обосновать.

2.4.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.3*) На контрольной в 7а присутствовало девочек на три человека больше, чем мальчиков. Результаты контрольной (по пятибалльной шкале) показали, что четверок было на 6 больше, чем пятёрок, а троек вдвое больше, чем четверок. Докажите, что кто-то получил двойку или единицу.

2.4.4. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.3*) На доске записаны подряд в строку числа 1, 2, ..., 10. Разрешается из двух соседних чисел стереть левое, если разность между ними нечётная, или правое, если эта разность чётная. Может ли после девяти таких операций на доске остаться число 1?

2.4.5. (*Всесиб., 2018, 7.5*) Шахматную доску со стороной в 100 клеток по линиям сетки разрезали на квадраты с нечётными сторонами (не обязательно равные), а затем в каждом полученном квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток оказалось отмечено поровну.

2.5. Делимость

Дополнительные задачи — в листке «Делимость».

2.5.1. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.1*) В 7 «Б» классе учится больше 3, но меньше 15 детей. На Новый год к ним пришёл Дед Мороз с мешком, в котором было 195 конфет. Раздав всем ребятам в классе поровну конфет, Дед Мороз обнаружил, что в мешке осталось 8 конфет. Сколько конфет получил каждый из ребят?

2.5.2. (*«Надежда энергетики», 2016, 7.1*) Установок 3 типов всего не менее 100. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 22 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

2.5.3. (*Всесиб., 2019, 7.1*) Несколько гномиков несли конфеты своему вождю Шмебулоку. По дороге каждый гномик украл и съел по одной конфете у каждого другого. В результате Шмебулоку принесли только 53 конфеты. Сколько конфет было у каждого гномика изначально, если известно, что у всех было поровну?

2.5.4. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.3*) В примере с дробями некоторые *двузначные* натуральные числа заменили буквами A и B

$$\frac{A - 5}{A} + \frac{4}{B} = 1.$$

1. Какое наименьшее значение может принимать A ?

2. Какое наибольшее значение может принимать B ?

2.5.5. (*«Росатом», 2020, 7.2*) Каждое из четырех чисел 2, 4, 12, 32 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

2.5.6. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.3*) Назовем составное натуральное число n «интересным», если все его натуральные делители можно выписать в порядке возрастания, и при этом каждый следующий делитель делится на предыдущий. Найти все «интересные» натуральные числа от 20 до 90 (включительно).

2.5.7. (*«Росатом», 2018, 7.3*) Пятизначное четное число a , являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a , удовлетворяющее этим условиям.

2.5.8. (*Всесиб.*, 2023, 7.3) Профессор Фортран написал программу, которая принимает натуральное число, перемножает все его цифры и это произведение случайным образом либо вычитает из начального числа, либо прибавляет к нему. Так, из числа 239 программа может получить либо $239 - 2 \cdot 3 \cdot 9 = 239 - 54 = 185$, либо $239 + 54 = 293$. Результат после этого выводится на экран, а с полученным числом проделываются те же самые операции. Через некоторое время следующее число тоже появляется на экране, и так далее. Профессор Фортран запустил программу и ввёл число 141. Докажите, что это число никогда снова не будет выведено на экран.

2.5.9. (*Турнир Архимеда*, 2022.1.3) **Палиндром.** Найдите какое-нибудь натуральное число, кратное 2^{14} (произведение четырнадцати двоек, $2^{14} = 128^2$) и читаемое одинаково слева направо и справа налево.

2.5.10. (*Олимпиада КФУ*, 2023, 7.3) Саша выбрал пять чисел из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 и сообщил Ане их произведение. Исходя из этих данных Аня поняла, что она не может однозначно определить чётность суммы выбранных Сашей чисел. Какое число Саша сообщил Ане?

2.5.11. (*«Покори Воробьёвы горы!»*, 2021, 5–6.4, 7–8.3) Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37.

2.5.12. (*«Покори Воробьёвы горы!»*, 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

2.5.13. (*САММАТ*, 2022, 7.4) При каких натуральных значениях n число $n^{n+1} - 2n^2 + 2n - 1$ нацело делится на $(n - 1)^2$?

2.5.14. (*Московская устная олимпиада*, 2023, 7.4) Найдите все тройки $(a; b; c)$ натуральных чисел, для которых выполняется равенство

$$\frac{a + b}{b + c} = \frac{a + c}{a + b},$$

если известно, что $ab + bc + ca$ — простое число.

2.5.15. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»*, 2022, 6.5, 7.4) Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т. д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число оронов, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч оронов. Кто именно дружит с продавцом?

2.5.16. (*«Курчатов»*, 2022, 7.4, 8.3, 9.3, 10.3) Назовем *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N , которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

2.5.17. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 7.5, 8.4) Существует ли такое натуральное число x , что среди утверждений « $x + 1$ кратно 2019», « $x + 2$ кратно 2018», « $x + 3$ кратно 2017», ... « $x + 2017$ кратно 3», « $x + 2018$ кратно 2» ровно половина верных?

2.5.18. («Высшая проба», 2022, 7.4) Пара различных натуральных чисел (a, b) называется удачной, если сумма наибольшего собственного делителя числа a и наименьшего собственного делителя числа b равна сумме наименьшего собственного делителя числа a и наибольшего собственного делителя числа b . Существует ли миллион удачных пар? Собственный делитель натурального числа — любой делитель, отличный от 1 и самого числа.

2.5.19. («Надежда энергетики», 2015, 7.5) На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

2.5.20. («Высшая проба», 2023, 7.5) Андрей выписал на доску 6 последовательных четырёхзначных чисел в строчку в порядке возрастания. Затем он под каждым из этих чисел написал один из его простых делителей, причём все выписанные простые делители оказались разными. После этого Андрей стёр исходные 6 чисел и пригласил в класс Бориса. Всегда ли Борис, видя выписанные на доску простые делители, сможет однозначно определить исходные числа?

2.6. Основная теорема арифметики

Дополнительные задачи — в листке «Основная теорема арифметики».

2.6.1. (САММАТ, 2021, 7.1) Степан спросил у Макара, сколько подъездов в доме, где живет Макар. Вместо ответа Макар сказал следующее: «В моем доме в каждом подъезде одинаковое число этажей с одинаковым числом квартир, при этом число этажей больше числа квартир на этаже, которое, в свою очередь, больше числа подъездов, а всего в доме 80 квартир». Сколько подъездов в доме у Макара?

2.6.2. («Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.1, 8.1) Существуют ли такие натуральные числа m, n , что $mn(m + n) = 2020$?

2.6.3. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.2) Приведите пример таких целых чисел a и b , что $(10a + b)(a + 10b)(a + b + 1) = 2015$.

2.6.4. (Матпраздник в Матвертикали, 2021, 7.2) Фокусник задумал два натуральных числа и сообщил Симе их сумму, а Прову — их произведение. Зная, что произведение равно 2280, Пров смог отгадать задуманные числа только после того, как Сима сообщила, что сумма у неё нечётна и двузначна. Так какие числа задумал фокусник?

2.6.5. («Росатом», 2016, 7.3) Вова, Петя и Маша сидят за круглым столом и играют в устный счет. Игра состоит в том, что каждый, услышав «на ушко» от соседа справа число, умножает его на свое, заранее придуманное простое число, и сообщает результат соседу слева. Круг игры начинается с Вовы и заканчивается им, игра завершается после 3 кругов.

Первое натуральное число сообщает Воле «на ушко» его бабушка. Вова объявляет всем последнее услышанное им число 86400. Какое число сообщила Воле бабушка, если все придуманные игроками числа были различными?

2.6.6. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.4, 7–8.3, 9.1) Найдите все пары простых чисел p и q , для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

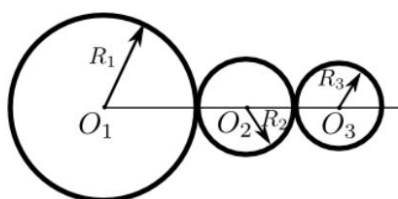
Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.

2.6.7. («Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.4, 8.3) Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

2.7. НОД и НОК

Дополнительные задачи — в листке «НОД и НОК».

2.7.1. (САММАТ, 2022, 7.2) Центры трех кругов с радиусами $R_1 = 78$ см, $R_2 = 30$ см и $R_3 = 24$ см расположены на одной прямой так, что круги касаются друг друга (см. рис.) и могут вращаться вокруг своих центров. Первый круг начинает вращаться, приводя во вращение второй и третий круг. Все круги вращаются без проскальзывания друг относительно друга. За какое минимальное количество оборотов второго круга система из трех кругов примет исходное (начальное) состояние?



2.7.2. (САММАТ, 2022, 7.5) Каким минимальным количеством ящиков в форме куба можно полностью заполнить склад, представляющий прямоугольный параллелепипед с длиной 728 см, шириной 616 см и высотой 399 см? (Суммарный объем ящиков должен равняться объему параллелепипеда.)

2.7.3. (Всеросс., 2022, ШЭ, 7.4) Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?

2.7.4. (Всеросс., 2021, ШЭ, 7.6) Расстояние между городами А и Б составляет целое число километров. На дороге между городами каждый километр стоит табличка: на одной стороне написано расстояние до города А, на другой — до города Б. Слава шёл пешком из города А в город Б. В течение своего путешествия Слава посчитал для каждой таблички НОД чисел, написанных на ней. Оказалось, что среди посчитанных НОДов встречаются только числа 1, 3 и 13. Чему равняется расстояние между городами?

2.7.5. (Открытая олимпиада, 2023, 7.3) Натуральные числа a и b таковы, что $a > b$ и

$$\frac{\text{НОК}(a, b)}{\text{НОД}(a, b)} = 200.$$

Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{b}$? Ответ запишите в виде неправильной несократимой дроби.

2.7.6. («Надежда энергетики», 2015, 7.5) Почтальон Печкин работает на почте с 8-00 до 16-00. В начале рабочего дня он отправляет одновременно тележки для писем, бандеролей и посылок. Тележка для писем уезжает на 10 минут, тележка для бандеролей — на 15 минут и тележка для посылок — на 25 минут. Затем тележки возвращаются, и за 5 минут Печкин должен погрузить на них соответственно коробку с письмами, бандеролями или посылками. Если оказалось, что тележки встречаются у пункта погрузки, то Печкин грузит ту тележку, которая приходит реже, а другая уезжает пустой. Сколько каких тележек с грузом сможет отправить Печкин за рабочий день?

2.7.7. (Открытая олимпиада, 2020, 7.6) Имеет ли решение уравнение

$$a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 512$$

в натуральных числах при $a \neq b$?

2.7.8. (Открытая олимпиада, 2021, 7.7) Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c) \cdot \text{НОК}(\text{НОД}(a, b), c) = 200.$$

Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c)$?

2.8. Остатки

Дополнительные задачи — в листке «Деление с остатком».

2.8.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.2, 7–8.1) Определите, является ли число

$$N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$$

простым или составным. Ответ обоснуйте.

2.8.2. («Надежда энергетики», 2019, 7.2) Может ли число $n^2 + n + 2$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n ? Либо найдите такое минимальное n , либо докажите невозможность.

2.8.3. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 7.2, 8.1, 10.1) Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A, B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8?

2.8.4. (Открытая олимпиада, 2023, 7.5) Трёхзначное число АБВ даёт при делении на 37 остаток 4. Какой остаток даёт при делении на 37 число БВА? Не забудьте доказать, что другие ответы не подходят.

2.9. Последняя цифра

Дополнительные задачи — в листке «Последняя цифра».

2.9.1. («Надежда энергетики», 2020, 7.2) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$2019^{2020} + 2020^{2019}?$$

2.9.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3, 7–8.2, 9.1) Найдите последнюю цифру числа

$$202^{303^{404}}.$$

2.9.3. («Росатом», 2023, 7.4) Найти последнюю цифру в десятичной записи числа

$$1^2 + 2^2 + \dots + 2023^2.$$

2.10. Дроби

Дополнительные задачи — в листке «Дроби».

2.10.1. (Всесиб., 2015, 7.1) Составьте три несократимые (не обязательно правильные) дроби, произведение которых равно 1, используя в качестве числителей и знаменателей шесть чисел из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе.)

2.10.2. («Бельчонок», 2022, 7.1) После того, как вытянули репку, осталась куча земли. Дедка убрал половину кучи, Бабка убрала треть оставшейся земли, Внучка — четверть остатка, Жучка — пятую часть остатка, Кошка — шестую часть, Мышка — седьмую. Какая часть кучи осталась?

2.10.3. (Московская устная олимпиада, 2021, 7.1) Петя записал четыре дроби, сумма которых равна 1. У каждой из них числитель 1, а знаменатель — натуральное число. То же самое сделал и Вася. Могут ли все восемь дробей оказаться попарно различными?

2.10.4. («Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 7.2) Агент 007 хочет зашифровать свой номер с помощью двух натуральных чисел m и n так, чтобы $0,07 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Сможет ли он это сделать?

2.10.5. («Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.2) Коля хочет представить в десятичной форме дробь $\frac{3}{7}$, записав на доске 0 целых и 1000 знаков после запятой. Затем он собирается стереть 500-й знак после запятой. Какое число у него получится после этого: больше или меньше $\frac{3}{7}$?

2.10.6. («Росатом», 2018, 7.2) Дробь $\frac{p}{q}$ с натуральными p, q такова, что возрастание числителя на 1, а знаменателя — на 5 делает ее большей. Найти такую дробь, если $p + q < 8$.

2.10.7. («Надежда энергетики», 2023, 7.3) Представьте число $\frac{2}{7}$ в виде суммы нескольких различных обыкновенных дробей, числители которых равны единице.

2.10.8. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.3, 7–8.2) Пусть $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$ и дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Какой остаток даёт a при делении на 601?

2.10.9. («Росатом», 2022, 7.4) Сколько существует различных обыкновенных несократимых дробей вида $\frac{143}{p}$ на интервале $(\frac{1}{144}; \frac{1}{143})$?

2.10.10. («Росатом», 2017, 7.3) Сколько существует различных несократимых дробей вида $\frac{p}{q}$: $p > 0, 0 < q \leq 5, p \neq q, p, q \in \mathbb{Z}$ для которых $\frac{p-1}{q} < \frac{p}{q+1}$? Указать наименьшую такую дробь.

2.11. Числовые неравенства

2.11.1. (САММАТ, 2023, 7.9) Задана величина

$$m = \frac{1}{1686} + \frac{1}{1687} + \frac{1}{1688} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}.$$

Докажите, что $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{5}$.

2.11.2. (Всесиб., 2022, 7.3) Какое из чисел больше:

$$2017^{2022} \cdot 2018^{2021} \cdot \dots \cdot 2022^{2017} \quad \text{или} \quad 2017^{2017} \cdot 2018^{2018} \cdot \dots \cdot 2022^{2022}?$$

(Обоснуйте свой ответ.)

2.11.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.3, 9.2) Сравните числа

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad 2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

2.11.4. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.6, 7–8.4, 9.3) Сравните числа

$$\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023} \quad \text{и} \quad \frac{5}{16}.$$

2.11.5. («Надежда энергетики», 2017, 7.5) Что больше:

$$\frac{2,000000000004}{(1,000000000004)^2 + 2,000000000004}$$

или

$$\frac{2,000000000002}{(1,000000000002)^2 + 2,000000000002}?$$