

### Задача 13. Экономическая задача. Банковская задача (кредиты, вклады).

*Постановка банковской задачи:*  $S$  – сумма кредита, сумма вклада,  $p\%$  – ставка по кредиту, по вкладу (процентная ставка, начисляется на остаток долга),  $n$  – количество выплат, начислений (срок кредитования, срок действия вклада).

*Кредиты:* Аннуитетный, дифференцированный и комбинированный платежи.

*Аннуитетный платеж:*

$$\left. \begin{array}{l} S - \text{сумма кредита,} \\ p\% - \text{процентная ставка} \Rightarrow k = 1 + \frac{p}{100}, \\ X - \text{разовая выплата (все выплаты равны),} \\ n - \text{количество выплат} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left( \left( (S \cdot k - X) \cdot k - X \right) \cdot k - X \right) \cdot k - \dots - X = 0 \Rightarrow S \cdot k^n = \frac{X \cdot (k^n - 1)}{k - 1}.$$

*Дифференцированный платеж: табличный метод решения,* задана схема изменения долга, сумма кредита – долг,  $S$  – сумма кредита,  $n$  – количество выплат (срок кредитования),  $(n+1)$  – количество столбцов в таблице.

*Дифференцированный платеж (равномерное списание долга):*  $\frac{S}{n}$  – величина, на которую

уменьшается долг на каждом этапе,

| 0    | 1                 | 2                 | 3                 | ... | $n-1$           | $n$ |
|------|-------------------|-------------------|-------------------|-----|-----------------|-----|
| $S$  | $\frac{n-1}{n}S$  | $\frac{n-2}{n}S$  | $\frac{n-3}{n}S$  | ... | $\frac{1}{n}S$  | $0$ |
| $kS$ | $\frac{n-1}{n}kS$ | $\frac{n-2}{n}kS$ | $\frac{n-3}{n}kS$ | ... | $\frac{1}{n}kS$ | $0$ |

Выплаты – разность по диагонали между элементами второй и первой строки,

Сумма общих выплат банку:  $\frac{k \cdot S}{2}(n+1) - \frac{S}{2}(n-1)$

*Комбинированный платеж:*

$$\left. \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n - \text{выплаты,} \\ k_1, k_2, \dots, k_n - \text{процентные ставки} \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \left( (S \cdot k_1 - X_1) \cdot k_2 - X_2 \right) \cdot k_3 - X_3 \right) \cdot k_4 - \dots - X_n = 0$$

*Вклады:*

$$\left. \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n - \text{вложение (снятие)} \\ k_1, k_2, \dots, k_n - \text{процентные ставки} \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \left( (S \cdot k_1 \pm X_1) \cdot k_2 \pm X_2 \right) \cdot k_3 \pm X_3 \right) \cdot k_4 \pm \dots \pm X_n$$

$$\left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - \text{формула сложных процентов}$$

### Задание 13. Экономическая задача

13.1. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 160064 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Сколько рублей составит общая сумма платежей, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

13.2. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 300000 рублей на 12 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;  
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину. Сколько рублей составит общая сумма выплат после полного погашения кредита?

13.3. Вкладчик положил в банк 100000 рублей под 10% годовых. Через год, сразу после начисления процентов, он внёс на счёт ещё 50000 рублей. Какая сумма (в рублях) будет на счёте ещё через год?

13.4. Клиент взял в банке кредит 1000000 рублей на два года под 10% годовых. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся сумму долга, а весь долг выплачивается одним платежом в конце второго года. Какую сумму (в рублях) выплатит клиент?

13.5. Александр купил 3 пакета акций по цене 85000 рублей за акцию. Через год цена одной акции выросла на 20%, и Александр продал весь пакет. Какую сумму (в рублях) он получил при продаже?

13.6. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 122000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Сколько рублей составит общая сумма платежей, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

13.7. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 240000 рублей на 10 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;  
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину. Сколько рублей составит общая сумма выплат после полного погашения кредита?

13.8. Вкладчик положил в банк 200000 рублей под 20% годовых. Через год, сразу после начисления процентов, он внёс на счёт ещё 100000 рублей. Какая сумма (в рублях) будет на счёте ещё через год?

13.9. Клиент взял в банке кредит 500000 рублей на два года под 20% годовых. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся сумму долга, а весь долг выплачивается одним платежом в конце второго года. Какую сумму (в рублях) выплатит клиент?

13.10. Александр купил 4 пакета акций по цене 60000 рублей за акцию. Через год цена одной акции выросла на 25%, и Александр продал весь пакет. Какую сумму (в рублях) он получил при продаже?

13.11. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 182000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Сколько рублей составит общая сумма платежей, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

13.12. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 600000 рублей на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину. Сколько рублей составит общая сумма выплат после полного погашения кредита?

13.13. Вкладчик положил в банк 50000 рублей под 10% годовых. Через год, сразу после начисления процентов, он внёс на счёт ещё 20000 рублей. Какая сумма (в рублях) будет на счёте ещё через год?

13.14. Клиент взял в банке кредит 800000 рублей на два года под 25% годовых. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся сумму долга, а весь долг выплачивается одним платежом в конце второго года. Какую сумму (в рублях) выплатит клиент?

13.15. Александр купил 2 пакета акций по цене 120000 рублей за акцию. Через год цена одной акции выросла на 10%, и Александр продал весь пакет. Какую сумму (в рублях) он получил при продаже?

13.16. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 273000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Сколько рублей составит общая сумма платежей, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

13.17. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 150000 рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину. Сколько рублей составит общая сумма выплат после полного погашения кредита?

13.18. Вкладчик положил в банк 400000 рублей под 25% годовых. Через год, сразу после начисления процентов, он внёс на счёт ещё 100000 рублей. Какая сумма (в рублях) будет на счёте ещё через год?

13.19. Клиент взял в банке кредит 600000 рублей на два года под 50% годовых. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся сумму долга, а весь долг выплачивается одним платежом в конце второго года. Какую сумму (в рублях) выплатит клиент?

- 13.20. Александр купил 5 пакетов акций по цене 45000 рублей за акцию. Через год цена одной акции выросла на 40%, и Александр продал весь пакет. Какую сумму (в рублях) он получил при продаже?
- 13.21. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 331000 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Сколько рублей составит общая сумма платежей, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?
- 13.22. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 480000 рублей на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину.
- Сколько рублей составит общая сумма выплат после полного погашения кредита?
- 13.23. Вкладчик положил в банк 300000 рублей под 20% годовых. Через год, сразу после начисления процентов, он внёс на счёт ещё 50000 рублей. Какая сумма (в рублях) будет на счёте ещё через год?
- 13.24. Клиент взял в банке кредит 250000 рублей на два года под 30% годовых. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся сумму долга, а весь долг выплачивается одним платежом в конце второго года. Какую сумму (в рублях) выплатит клиент?
- 13.25. Александр купил 2 пакета акций по цене 150000 рублей за акцию. Через год цена одной акции выросла на 20%, и Александр продал весь пакет. Какую сумму (в рублях) он получил при продаже?
- 13.26. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 244000 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Сколько рублей составит общая сумма платежей, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?
- 13.27. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 720000 рублей на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину.
- Сколько рублей составит общая сумма выплат после полного погашения кредита?
- 13.28. Вкладчик положил в банк 80000 рублей под 25% годовых. Через год, сразу после начисления процентов, он внёс на счёт ещё 40000 рублей. Какая сумма (в рублях) будет на счёте ещё через год?

13.29. Клиент взял в банке кредит 900000 рублей на два года под 10% годовых. Проценты начисляются в конце каждого года на оставшуюся сумму долга, а весь долг выплачивается одним платежом в конце второго года. Какую сумму (в рублях) выплатит клиент?

13.30. Александр купил 3 пакета акций по цене 72000 рублей за акцию. Через год цена одной акции выросла на 25%, и Александр продал весь пакет. Какую сумму (в рублях) он получил при продаже?

13.31. 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

| Дата                          | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Долг (в процентах от кредита) | 100%  | 90%   | 80%   | 70%   | 60%   | 50%   | 0%    |

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма переплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

13.32. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  - целое число. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года
- с февраля по июль каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

| Месяц и год         | Июль 2026 | Июль 2027 | Июль 2028 | Июль 2029 |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Долг (в млн рублей) | $S$       | $0.8S$    | $0.4S$    | 0         |

Найдите наибольшее значение  $S$ , если каждая из выплат меньше 5 млн. рублей.

Ответы к заданию 13

|               |               |                |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| 13.1. 246000  | 13.7. 253200  | 13.13. 82500   | 13.19. 1350000 | 13.25. 360000  |
| 13.2. 339000  | 13.8. 408000  | 13.14. 1250000 | 13.20. 315000  | 13.26. 375000  |
| 13.3. 176000  | 13.9. 720000  | 13.15. 264000  | 13.21. 399300  | 13.27. 792000  |
| 13.4. 1210000 | 13.10. 300000 | 13.16. 388800  | 13.22. 501600  | 13.28. 175000  |
| 13.5. 306000  | 13.11. 259200 | 13.17. 160500  | 13.23. 492000  | 13.29. 1089000 |
| 13.6. 187500  | 13.12. 744000 | 13.18. 750000  | 13.24. 422500  | 13.30. 270000  |
| 13.31. 22,5%  | 13.32. 8      |                |                |                |

# ТРИГОНОМЕТРИЯ. Основные тригонометрические формулы.

## Формулы одного аргумента

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 2) 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$3) 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad 4) \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$5) \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad 6) \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

## Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

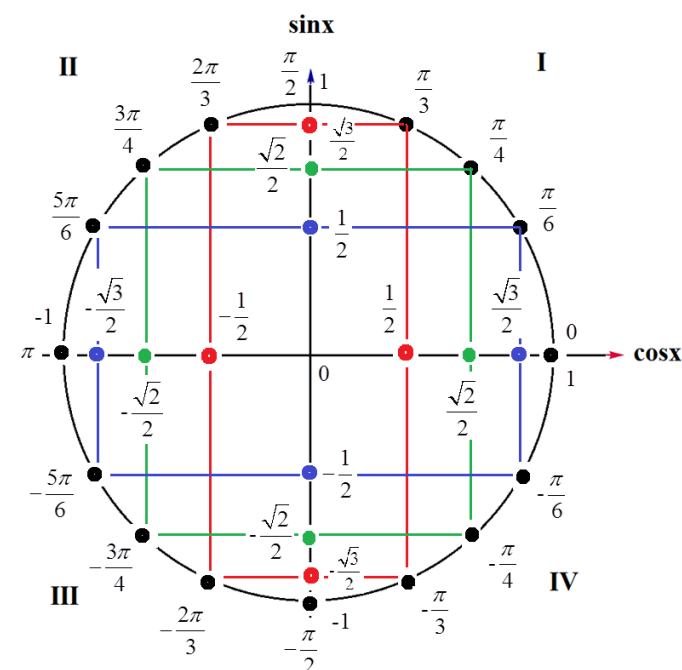
Чётность

и

нечётность

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \quad \cos(-x) = \cos x.$$

## 2. Тригонометрический круг



## 3. Знаки тригонометрических функций по четвертям

|      | I | II | III | IV |
|------|---|----|-----|----|
| Sinx | + | +  | -   | -  |
| Cosx | + | -  | -   | +  |
| tgx  | + | -  | +   | -  |
| ctgx | + | -  | +   | -  |

## 4. Формулы приведения

| 1. Четверть «1,2,3,4» | 2. Знак «+, -» | 3. Диаметр | 4. Функция                                                                             |
|-----------------------|----------------|------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
|                       |                |            | «Формулы приведения применяются, если сумма углов равна значению угла в узловой точке» |

## Формулы суммы и разности аргументов

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

## 5. Простейшие тригонометрические уравнения

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin x = a \Rightarrow \begin{cases}  a  > 1 \Rightarrow \text{решений нет,} \\ a = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ a = -1 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ a = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x = a \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ | $\cos x = a \Rightarrow \begin{cases}  a  > 1 \Rightarrow \text{решений нет,} \\ a = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ a = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ a = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ |
| $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$                                                                                                                                                                                      | $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$                                                                                                                                                     |

## 6. Обратные тригонометрические функции

|                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 1], \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin y = x. \end{cases}$ | $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tgy} = x. \end{cases}$ |
| $y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 1], \\ y \in [0; \pi], \\ \cos y = x. \end{cases}$                                   | $y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ y \in (0; \pi), \\ \operatorname{ctgy} = x. \end{cases}$                                 |

Формы                      записи                      ответа                      к                      пункту                      а):

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рекомендации: каждая серия корней отдельно, буквы « $m$ ,  $n$ ,  $k$ » - различны для каждой серии корней, отбор корней с помощью тригонометрического круга или двойного неравенства (в остальных случаях есть оговорки при оценивании).

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)).$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)), \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)),$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2\sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2\sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Свойства степени</p> <p>1) <math>a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-штук}};</math></p> <p>2) <math>a^0 = 1; a \neq 0;</math></p> <p>3) <math>a^1 = a;</math></p> <p>4) <math>a^p \cdot a^q = a^{p+q};</math></p> <p>5) <math>a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};</math></p> <p>6) <math>a^p \cdot b^p = (ab)^p;</math></p> <p>7) <math>a^p : b^p = \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p; b \neq 0;</math></p> <p>8) <math>(a^p)^q = a^{p \cdot q};</math></p> <p>9) <math>a^{-p} = \frac{1}{a^p}; a \neq 0;</math></p> <p>10) <math>\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; a \geq 0;</math></p> <p><math>n, m \in \mathbb{N}!!!</math></p>          | <p>2. Свойства логарифмов</p> <p>1. <math>\log_a 1 = 0;</math></p> <p>2. <math>\log_a a = 1;</math></p> <p>3. <math>\log_a (bc) = \log_a  b  + \log_a  c ;</math></p> <p>4. <math>\log_a \frac{b}{c} = \log_a  b  - \log_a  c </math></p> <p>5. <math>\log_{10} a = \lg a</math> - десятичный логарифм</p> <p>6. <math>\log_e a = \ln a, e = 2,7182818284\dots</math> - натуральный логарифм</p> <p>7. <math>\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}</math> - переход на новое основание</p> <p>8. <math>\log_a b = \frac{1}{\log_b a}</math> - следствие свойства 7.</p> <p>9. <math>\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_{ a }  b </math> - свойство вынесения степени</p> <p>10. <math>a^{\log_a b} = b</math> - основное логарифмическое тождество</p> <p>11. <math>\log_a b \cdot \log_b a = 1</math></p> |
| <p>3. О.Д.З. (область определения)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>4. Решение логарифмических неравенств (метод рационализации)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p>1) <math>y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0;</math></p> <p>2) <math>y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0;</math></p> <p>3) <math>y = \sqrt[n]{f(x)}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) \geq 0;</math></p> <p>4) <math>y = (f(x))^p, \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{m}{n} \Rightarrow f(x) \geq 0, m, n \in \mathbb{N}; \\ p = -\frac{m}{n} \Rightarrow f(x) &gt; 0, m, n \in \mathbb{N}; \end{cases}</math></p> <p>5) <math>y = \log_{g(x)} f(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) &gt; 0; \\ g(x) &gt; 0; \\ g(x) \neq 1; \end{cases}</math></p> <p>6) <math>\begin{cases} y = \arcsin f(x) \\ y = \arccos f(x) \end{cases} \Rightarrow  f(x)  \leq 1;</math></p> | <p>1) <math>\log_a f(x) - \log_a g(x) \geq 0; \Leftrightarrow \begin{cases} \text{О.Д.З.} \\ (a-1) \cdot (f(x) - g(x)) \geq 0; \end{cases}</math></p> <p>2) <math>\log_a f(x) \geq 0; \Leftrightarrow \begin{cases} \text{О.Д.З.} \\ (a-1) \cdot (f(x) - 1) \geq 0; \end{cases}</math></p> <p>3) <math>\frac{\log_a b \cdot \log_c d}{\log_m n \cdot \log_x y} \geq 0; \Leftrightarrow \begin{cases} \text{О.Д.З.} \\ \frac{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}{(m-1)(n-1)(x-1)(y-1)} \geq 0; \end{cases}</math></p> <p>4) <math>a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{О.Д.З.} \\ (a-1) \cdot (f(x) - g(x)) \leq 0; \end{cases}</math></p> <p>5) <math>\log_f h - \log_g h \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{О.Д.З.} \\ (f-1)(g-1)(h-1)(g-f) \leq 0; \end{cases}</math></p>              |

Задание 14. Тригонометрические уравнения. *Тригонометрические уравнения с отбором корней*

1. а) Решите уравнение  $8\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $[0; \pi]$ .

Ответ: а)  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^m \arcsin \frac{3}{4} + \pi m; n, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\arcsin \frac{3}{4}; \pi - \arcsin \frac{3}{4}$ ;

2. а) Решите уравнение  $(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

Ответ: а)  $-\frac{3}{2}; 4; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{3}{2}; \frac{2\pi}{3}$ .

3. а) Решите уравнение  $\frac{5}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

Ответ: а)  $(-1)^m \arcsin \frac{1}{3} + \pi m; m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-3\pi - \arcsin \frac{1}{3}$ ;

4. а) Решите уравнение  $2\sin 2x + \sin x = 4\cos x + 1$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi m; n, m \in \mathbb{Z}$ ; б)

$\frac{\pi}{2}; \arccos\left(-\frac{1}{4}\right); 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right);$

5. а) Решите уравнение  $\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi m; n, m \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4};$

6. а) Решите уравнение  $\frac{7}{\sin^2 x} - \frac{10}{\sin x} + 3 = 0$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; \pi\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ ;

7. а) Решите уравнение  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} + 2 = 0$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

Ответ: а)  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $3\frac{1}{6}\pi; \frac{7\pi}{2}$ ;

8. а) Решите уравнение  $2^{2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)} = 4$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие множеству  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$ . б)  $\frac{-63\pi}{20}, \frac{-55\pi}{20}, \frac{-47\pi}{20}$ .

9. а) Решите уравнение  $9^{2\sin(\pi(x-1))} = 3^{-2\sqrt{2}}$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие множеству  $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$ .

Ответ: а)  $(-1)^{n+1} \frac{1}{4} + n + 1, n \in \mathbb{Z}$ . б)  $2\frac{3}{4}$ .

10. а) Решите уравнение  $\log_6 2\sqrt{2} + \log_6 \cos\left(\frac{\pi - 2x}{3}\right) = \log_9 \left|\sin \frac{3\pi}{2} - 2\right|$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие множеству  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{4} + 3\pi m, \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, m, n \in \mathbb{Z}$ . б)  $\frac{3\pi}{4}$ .

11. а) Решите уравнение  $7^{tg^2 x} = (\sqrt{7})^6$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие множеству  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

Ответ: а)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . б)  $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$ .

12. а) Решите уравнение  $\log_{\sqrt{2}} \left( -2\sin^2 2x - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \right) = 2$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие множеству  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

Ответ: а)  $-\frac{\pi}{12} + \pi m, -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n, m \in \mathbb{Z}$ . б)  $-\frac{25\pi}{12}, -\frac{29\pi}{12}, -\frac{37\pi}{12}, -\frac{41\pi}{12}$ .

13. а) Решите уравнение  $4\sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 4 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ .

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие множеству  $\left[\frac{5\pi}{2}; 10\pi\right]$ .

Ответ: а)  $\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . б)  $5\pi, 9\pi$ .

### Задание 1. Найдите область определения функции

1. Найти область определения функции  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-9}$ .

1)  $[0; 9)$  2)  $[9; +\infty)$  3)  $(9; +\infty)$  4)  $(0; 9)$  5)  $[0; 9]$ .

2. Найти область определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{3x+14}{3x-1}}$ .

1)  $x \neq \frac{1}{3}$  2)  $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$  3)  $\left(-\infty; -\frac{14}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$  4)  $\left(-\frac{14}{3}; \frac{1}{3}\right)$  5)  $\left[-\frac{14}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

3. Найти область определения функции  $f(x) = \lg(x+7) - \frac{1}{2} \cdot \lg(2x-1)$ .

1)  $(-\infty, \infty)$  2)  $\left(-7; \frac{1}{2}\right)$  3)  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$  4)  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$  5)  $\left[-7; \frac{1}{2}\right]$ .

4. Найти область определения функции  $f(x) = \log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3$ .

1)  $(1; +\infty)$  2)  $(-\infty; 1)$  3)  $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$  4)  $(-5; \infty)$  5)  $(-5; 1)$ .

5. Найти область определения  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x}$ .

1)  $x \neq 0$  2)  $x \neq 2$  3)  $x = 1$  4)  $x \neq 0, x \neq 2$  5)  $x \neq 0, x \neq 1$ .

6. Найти область определения функции  $y = \lg(x-1) - \arcsin \frac{x}{3}$ .

1)  $(1; +\infty)$  2)  $(-3; +\infty)$  3)  $(-3; 3)$  4)  $[-3; 3]$  5)  $(1; 3]$ .

7. Найти область определения функции  $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ .

1)  $(-\infty; 0)$  2)  $(-\infty; -2)$  3)  $(-2; \infty)$  4)  $(-2; 0]$  5)  $[-2; 0]$ .

8. Найти область определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{2x+5}}$ .

1)  $x \neq -\frac{5}{2}$  2)  $\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$  3)  $(-\infty; 3)$  4)  $\left(-\frac{5}{2}; 3\right]$  5)  $\left[-\frac{5}{2}; 3\right]$ .

9. Найти область определения функции  $f(x) = \lg \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$ .

1)  $x \neq -1$  2)  $(-1; 1)$  3)  $(-1; 1) \cup (2; +\infty)$  4)  $(1; 2)$  5)  $(-1; +\infty)$ .

10. Найти область определения функции  $f(x) = \frac{1}{\lg(3-x)+1}$ .

1)  $(-\infty; 3)$  2)  $x \neq 2,9$  3)  $(2,9; 3)$  4)  $(0; 3)$  5)  $(-\infty; 2,9) \cup (2,9; 3)$ .

11. Найти область определения функции  $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2+\sin^2 x}} + 5\arccos \frac{x}{\pi} + 2\lg x$ .

1)  $(-\pi; \pi)$  2)  $(0; \pi]$  3)  $(0; +\infty)$  4)  $[-\pi; +\pi]$  5)  $[0; \pi]$ .

12. Найдите область определения функции  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \log_2 \log_5(x+2)$ .

1)  $(-2; 23)$  2)  $(3; +\infty)$  3)  $(-2; +\infty)$  4)  $(-\infty; 23)$  5)  $(-2; 22)$ .

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. |
| 2  | 3  | 3  | 3  | 4  | 5  | 4  | 4  | 3  | 5   | 2   | 2   |

**Задание 16. Неравенства. Показательные, логарифмические, иррациональные и рациональные неравенства**

| №   | Неравенство                                                                                             | Ответ                                                     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1.  | $\frac{3^{2x} - 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)} - 1}{x+3} \leq 0;$                           | $(-3; 0.5]$                                               |
| 2.  | $\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} - \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x+1} \leq 0;$                          | $(-2; -1), (-1; 1), (1; +\infty);$                        |
| 3.  | $\frac{4x^4 - 4x^3 + x^2}{-2x^2 + 5x - 2} + \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{x-2} \geq 0;$                   | $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup [1; 2);$         |
| 4.  | $3^{ x } - 8 - \frac{3^{ x } + 9}{9^{ x } - 4 \cdot 3^{ x } + 3} \leq \frac{5}{3^{ x } - 1};$           | $[-2; -1), [-\log_3 2; 0), (0; \log_3 2], (1; 2]$         |
| 5.  | $2^{ x } - 6 - \frac{9 \cdot 2^{ x } - 37}{4^{ x } - 7 \cdot 2^{ x } + 12} \leq \frac{1}{2^{ x } - 4};$ | $[-3; -2), (-2; -\log_2 3), \{0\}, (\log_2 3; 2), (2; 3]$ |
| 6.  | $0.5 \cdot \log_{x-2}(x^2 - 10x + 25) + \log_{5-x}(-x^2 + 7x - 10) \geq 0;$                             | $(3; 4)$                                                  |
| 7.  | $\frac{x}{x^2 + 3} \leq (1:4)x^{-1}$                                                                    | $(-\infty; -1], (0; 1]$                                   |
| 8.  | $\left  \log_2 x - \log_{0.5} \frac{1}{3-x} \right  < 1$                                                | $x \in (1; 2)$                                            |
| 9.  | $\lg(x-2) + \lg(x-3) < 1 - \lg 5$                                                                       | $x \in (3; 4)$                                            |
| 10. | $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$                                                                         | $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2).$          |
| 11. | $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x-4) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)}{\sqrt{7-x}} \geq 0$                           | $x \in \left[4; \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right]$             |
| 12. | $(x^2 + 25) \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \frac{10x}{\log_{x-1} 3} \geq 0$                                  | $x \in (1; 2) \cup \{5\}$                                 |
| 13. | $\log_{(x-3)}(2x+4)^{\sqrt{13-x}} \leq \sqrt{13-x}$                                                     | $(3; 4); \{13\}$                                          |
| 14. | $\log_{(x-5)}(2x+3)^{\sqrt{16-x}} \leq \sqrt{16-x}$                                                     | $(5; 6); \{16\}$                                          |

|     |                                                                  |                                                                                                                 |
|-----|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 15. | $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 - 5x^2} < 0$                       | $(-\infty; 0), (0; 1), (2; 5)$                                                                                  |
| 16. | $ 3x - 1  -  x - 1  < 10$                                        | $(-5; 5)$                                                                                                       |
| 17. | $\sqrt{4x + 5} < x$                                              | $(5; \infty)$                                                                                                   |
| 18. | $\sqrt{2x + 3} > x$                                              | $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right)$                                                                            |
| 19. | $\frac{x - 3}{2x^2 - 7x + 5} \leq 1$                             | $(-\infty; 1) \cup \{2\} \cup (2.5; +\infty)$                                                                   |
| 20. | $\frac{49}{18x + 6} \leq \frac{9}{2x + 2} - \frac{1}{3}$         | $\left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{2\}$                                                                      |
| 21. | $\frac{1}{x + 2} + \frac{11}{x - 3} \geq \frac{1}{x}$            | $\left(-2; \frac{-10 - \sqrt{34}}{11}\right] \cup \left[\frac{-10 + \sqrt{34}}{11}; 0\right) \cup (3; +\infty)$ |
| 22. | $\frac{1 - x}{x} \leq \frac{x^2 - 2x + 1}{5x + 4}$               | $\{-2\}, \left(-\frac{4}{5}; 0\right), [1; +\infty)$                                                            |
| 23. | $x - 1 > \frac{4x}{3 - x}$                                       | $(3; +\infty)$                                                                                                  |
| 24. | $2x^2 - 8 \leq x^2 - \frac{16}{x^2}$                             | $\pm 2$                                                                                                         |
| 25. | $\frac{50}{2x + 1} + 8 \leq \frac{49}{x + 1}$                    | $\left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left\{\frac{3}{4}\right\}$                                                     |
| 26. | $\frac{1}{x + 10} \geq \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$                   | $\left(-10; \frac{1}{4}\right]$                                                                                 |
| 27. | $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$ | $\left[\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$                                                               |
| 28. | $\frac{2^x + 10}{4} \leq \frac{9}{2^{x-2}}$                      | $(-\infty; 3]$                                                                                                  |
| 29. | $2^x + 2^{-x} < 3$                                               | $\left(\log_2 \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$                                     |
| 30. | $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} < 99$                                   | $(-1; 1)$                                                                                                       |
| 31. | $\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1}$                   | $(-1; 1]$                                                                                                       |
| 32. | $1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2)$                        | $[2; 4);$                                                                                                       |
| 33. | $\frac{\lg 8 - \lg(x - 5)}{\lg \sqrt{x + 7} - \lg 2} \leq -1$    | $[29; +\infty)$                                                                                                 |
| 34. | $\log_{0.5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} \geq 8$                  | $\left(0; \frac{1}{128}\right], [2; +\infty)$                                                                   |
| 35. | $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} \leq 400$                     | $(0; 9]$                                                                                                        |
| 36. | $\log_{2x-5}(x - 2) \leq 1$                                      | $(2.5; 3), (3; +\infty)$                                                                                        |

|     |                                                                                                   |                                             |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 37. | $\log_7(x^2 - 4x + 5) > \log_7(2x - 3)$                                                           | $(1.5; 2), (4; +\infty)$                    |
| 38. | $\log_{0.8}(2x^2 + 13x + 21) > 0$                                                                 | $(-4; -3.5), (-3; -2.5)$                    |
| 39. | $\frac{\sqrt{5-x}}{9^x - 81} \leq 0;$                                                             | $(-\infty; 2), \{5\}$                       |
| 40. | $\frac{x-7}{\log_{x-6} 7} \geq 0;$                                                                | $(6; 7), (7; +\infty)$                      |
| 41. | $(x-9)\log_7(x-8) \leq 0;$                                                                        | 9                                           |
| 42. | $\frac{x(4^x - 2^x)}{x^2 - 4} \geq 0;$                                                            | $(-\infty; -2), 0, (2; +\infty)$            |
| 43. | $\log_{2-x} 3 \leq \log_{2-x} x$                                                                  | $(1; 2)$                                    |
| 44. | $\log_2(\log_3(\log_4 x)) \leq 0;$                                                                | $(4; 64]$                                   |
| 45. | $2^{\lg(x^2-1)} \geq (x+1)^{\lg 2}$                                                               | $[2; +\infty)$                              |
| 46. | $\log_{x^2}(5x+6) \leq 56^{\ln(\cos 8\pi)}$                                                       | $(-1.2; -1), (-1; 0), (0; 1), [6; +\infty)$ |
| 47. | $ x ^{x^2+3x-4} \leq 1$                                                                           | $[-4; -1], 1$                               |
| 48. | $3 + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{9x-x^2} + 3) > \log_3 \frac{27}{\sqrt{9x-x^2} + \sqrt{5-x^2} + 2};$ | $[0; 2)$                                    |