

Ахвердиев Рустем
Фахраддинович, доктор
технических наук, доцент
кафедры «Высшей
математики»

«Высшая Математика»

-1 курс, 1 семестр.

Линейная алгебра.

Основные определения.

• **Определение.** Матрицей размера $t \times n$, где t - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & 45 \\ \sin x & 4 \\ 5 & \cos x \end{pmatrix}$$

Число строк	<i>m</i>	4
Число столбцов	<i>n</i>	2
	<i>a</i>₃₁	<i>sinx</i>

• **Определение.** Матрицу B называют транспонированной матрицей A , а переход от A к B транспонированием, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы (транспонированная матрица обозначается индексом T , т.е. $B=A^T$), другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Определение.** Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Определение.** Главная диагональ квадратной матрицы — диагональ, которая проходит через верхний левый и нижний правый углы.
- **Определение.** Побочная диагональ квадратной матрицы — диагональ, которая проходит через верхний правый и нижний левый углы.
- **Определение.** Следом матрицы называется сумма элементов главной диагонали.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- Главная диагональ
- Побочная диагональ
- След матрицы: $1 - 3 + 9 = 7$

Определители.
(детерминанты).

Определение. Определителем

(детерминантом) квадратной матрицы

называется число, которое ставиться в

соответствие матрице по определенному

правилу.

Формулы определителей второго и третьего порядков.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 = -10 + 12 = 2;$$

На основе формулы (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19;$$

Системы Линейных Алгебраических Уравнений (СЛАУ)

• **Определение.** Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\bullet \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1)$$

- **Определение.** Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.
- **Определение.** Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение и **неопределенной**, если более одного.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

- Данный метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.
- Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0, то есть $\det A \neq 0$;

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

В случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

• Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 1 = -9;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 3 = -9;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1;$$

• Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60;$$

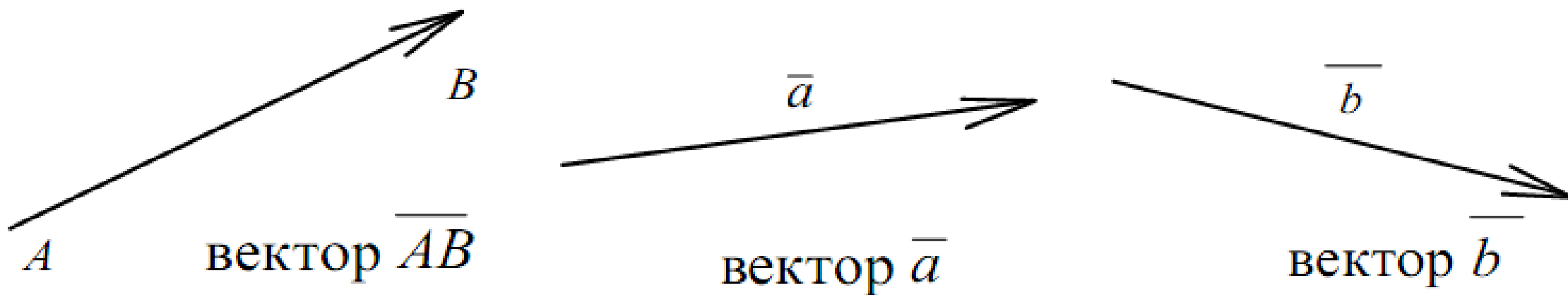
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90;$$

$$x = \frac{-30}{-30} = 1,$$

$$y = \frac{-60}{-30} = 2,$$

$$z = \frac{-90}{-30} = 3.$$

- Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относятся также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

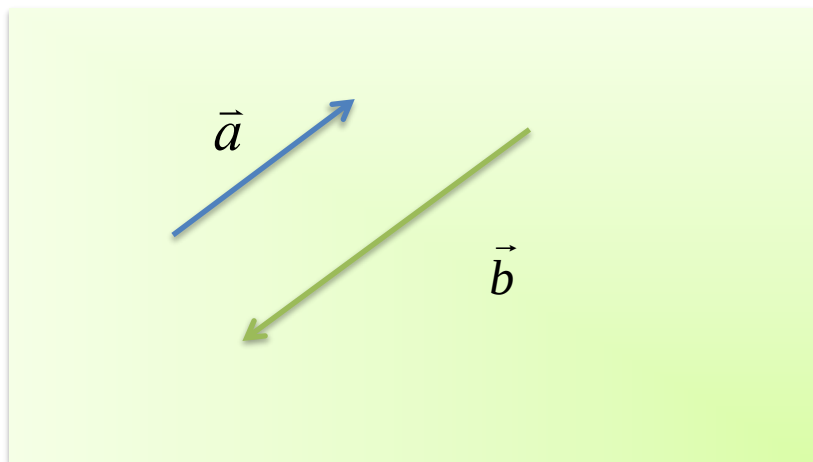


- **Определение.** Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

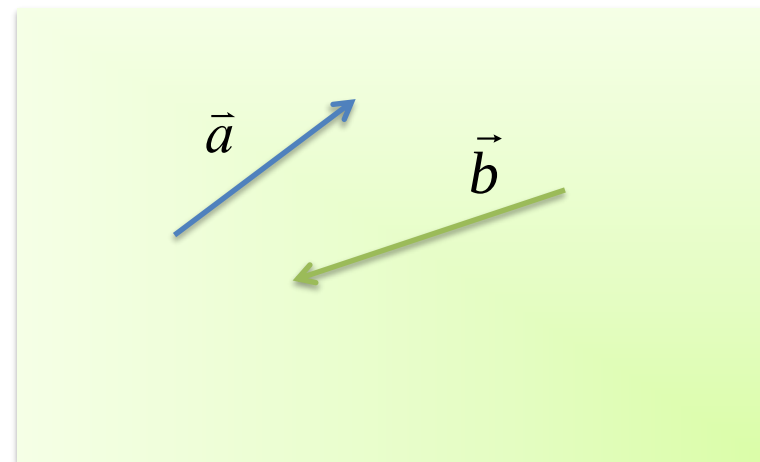
$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \left| \vec{a} \right|$$

- **Определение.** *Единичным* вектором называется вектор, длина которого равна единице.

• **Определение.** Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

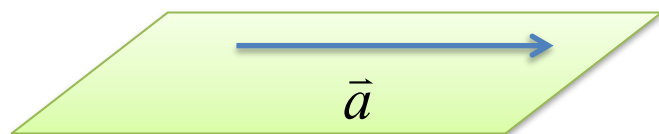
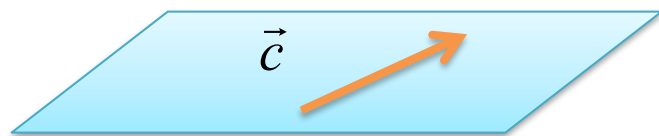


Коллинеарные вектора

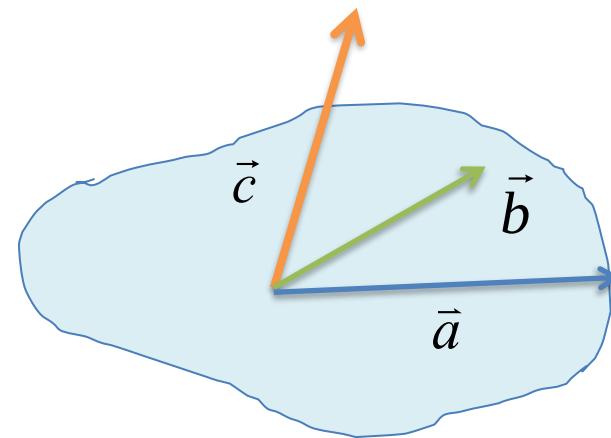


Неколлинеарные вектора

• Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны (коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны).

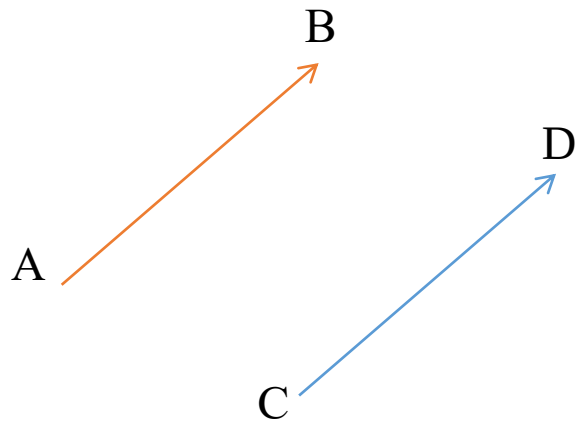


Компланарные вектора



Некомпланарные вектора

- **Определение.** Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.



$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Свойства векторов

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

$$2) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

$$3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$

$$4) \vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0};$$

Свойства векторов

$$5) (\alpha \cdot \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \cdot \vec{a});$$

$$6) (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a};$$

$$7) \alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b};$$

$$8) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a};$$

- Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

$$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

•Пример:

$$A(-2; 1; 0), B(1; -3; 5) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{1 - (-2); -3 - 1; 5 - 0\} = \\ = \{3; -4; 5\}$$

- **Длина вектора в координатах** определяется как расстояние между точками начала и конца вектора.

$$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

•Пример:

$$A(-2; 1; 0), B(1; -3; 5) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{1 - (-2); -3 - 1; 5 - 0\} = \{3; -4; 5\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

- Пример: Найдите направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, в условиях прошлой задачи.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \{3; -4; 5\} \\ |\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}}, \cos \beta = -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \cos \gamma = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{9}{50} + \frac{16}{50} + \frac{25}{50} = 1$$

• Линейные операции над векторами в координатах.

- Пусть заданы векторы в декартовой прямоугольной системе координат

$$\vec{a} \{x_a; y_a; z_a\}, \vec{b} \{x_b; y_b; z_b\} \Rightarrow$$

$$m\vec{a} \pm n\vec{b} = \vec{c} \{mx_a \pm nx_b; my_a \pm ny_b; mz_a \pm nz_b\}$$

•Пример. $\vec{a} \{2; 0; -3\}, \vec{b} \{-1; -2; 4\} \Rightarrow$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{c};$$

$$3\{2; 0; -3\} - 2\{-1; -2; 4\} =$$

$$= \{6; 0; -9\} - \{-2; -4; 8\} =$$

$$= \{8; 4; -17\}; \Rightarrow \vec{c} \{8; 4; -17\};$$

• Скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}; \vec{b} \right) = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos \varphi;$$

Свойства скалярного произведения

$$\begin{aligned} 1) \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2; & 2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b}; \\ \vec{a} = \vec{0}; \\ \vec{b} = \vec{0}; \end{cases} \\ 3) \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}; & 4) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \\ 5) (m\vec{a}) \cdot \vec{b} &= m(\vec{a} \cdot \vec{b}); \end{aligned}$$

- Формула скалярного произведения в координатной форме

$$\vec{a}(x_a, y_a, z_a); \quad \vec{b}(x_b, y_b, z_b) \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}; \vec{b} \right) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b;$$

- Нахождение угла между векторами в координатной форме

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}};\end{aligned}$$

- Решение задач

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\Rightarrow \vec{a} \{1; 2; 3\}, \vec{b} \{6; 4; -2\} \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$$

Вычислите $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$,

если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 6, \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{\pi}{3}$;

$$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(5\vec{a} - 6\vec{b}\right) = 15\vec{a} \cdot \vec{a} - 28\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = 16,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right|^2 = 36,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

$$\begin{aligned} \left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(5\vec{a} - 6\vec{b}\right) &= 15 \cdot 16 - 28 \cdot 12 + 12 \cdot 36 = \\ &= 15 \cdot 16 + 8 \cdot 12 = 8 \cdot 42 = 320 + 16 = 336 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k},$$

при каком значении m , $\vec{a} \perp \vec{b}$?

$$\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k},$$

$$\vec{a} \{m; 1; 0\}, \vec{b} \{3; -3; -4\},$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0$$

$$m = 1$$

Векторное и
смешанное
произведение
векторов

• Определение. Векторным произведением векторов и называется *вектор*, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ угол между векторами

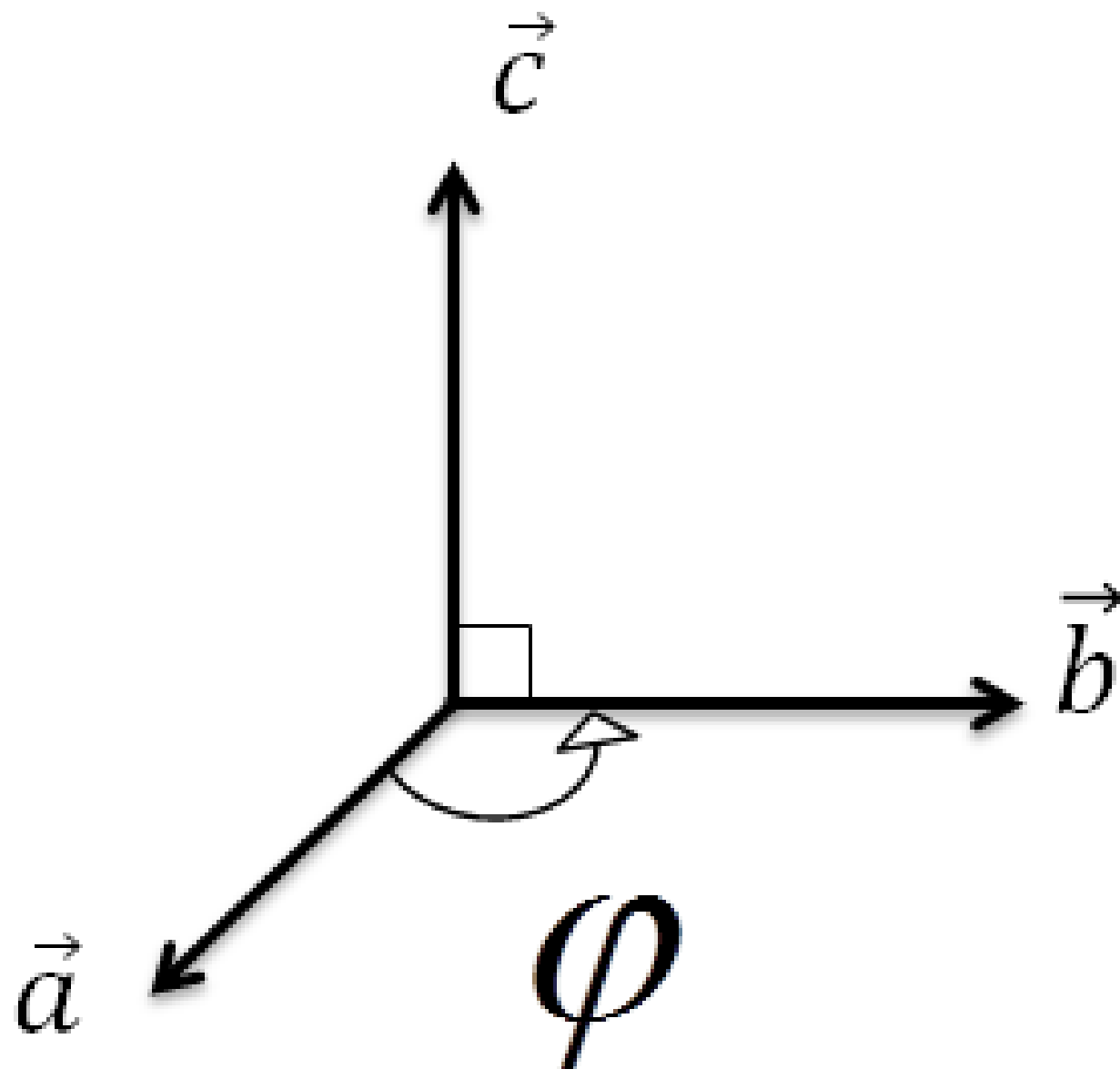
$\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin \varphi \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов;

• Обозначение:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$



Свойства векторного произведения

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \parallel \vec{b}, \\ \vec{a} = \vec{0}, \\ \vec{b} = \vec{0}. \end{cases}$$

$$3) (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m \cdot \vec{b}) = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b});$$

$$4) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

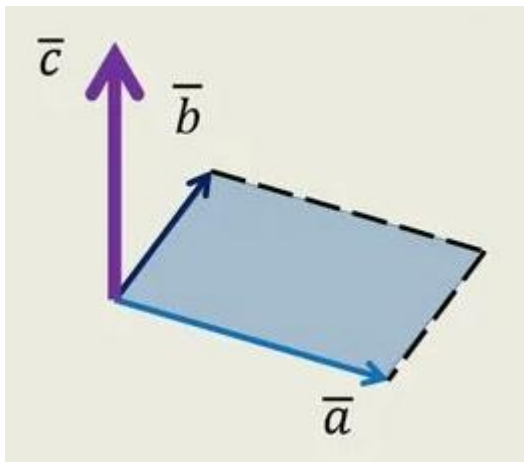
Векторное произведение в координатной форме

5) $\vec{a} \{x_a; y_a; z_a\}$ и $\vec{b} \{x_b; y_b; z_b\}$

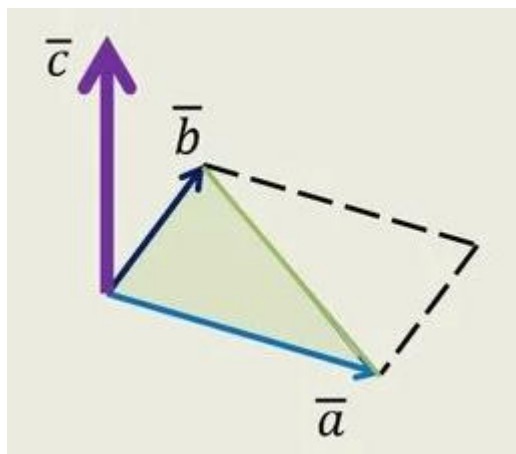
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix};$$

• Свойства векторного произведения векторов:

- 6) Геометрический смысл.**



$$S_{\text{параллелограмма}} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{c}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Решение задач

Найдите $\vec{a} \times \vec{b}$, если

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} \text{ и } \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k};$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{a} \{2; 5; 1\}, \vec{b} \{1; 2; -3\} \Rightarrow$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \{-17; 7; -1\}$$

Смешанное произведение векторов

Определение: Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению вектора $\vec{b}$ на $\vec{c}$.

Обозначается:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)$$

Свойства смешанного произведения

$$1) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{один из векторов равен нулю;} \\ \text{два вектора коллинеарны;} \\ \text{вектора комплोनарны.} \end{array} \right.$$

$$2) \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c};$$

$$3) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b};$$

$$4) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a};$$

$$5) (\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \alpha \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \beta \vec{a}_2\vec{b}\vec{c};$$

$$6) \quad V_{nap} = \left| \overset{\rightarrow \rightarrow \rightarrow}{abc} \right|;$$

$$V_{nup} = \frac{1}{6} \left| \overset{\rightarrow \rightarrow \rightarrow}{abc} \right|;$$

7) Координатная форма

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \{x_a; y_a; z_a\}, \\ \vec{b} \{x_b; y_b; z_b\}, \\ \vec{c} \{x_c; y_c; z_c\} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Пример. Точки $A(5;7;2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежат ли в одной плоскости?

$$A, B, C, D \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \{-2; -6; -3\}, \quad \overrightarrow{AC} \{4; -3; -6\},$$

$$\overrightarrow{AD} \{-4; -2; -2\}$$

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 4 & -3 & -6 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 4 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 0 & -15 & -12 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -15 & -12 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(120 - 60) = -120 \neq 0 \Rightarrow A, B, C, D \notin \alpha$$

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD , если вершины имеют координаты $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

$$V_{nup} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BD}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BA}|$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BD} \{1; 4 - 3\} \\ \overrightarrow{BC} \{4; -1; -2\} \\ \overrightarrow{BA} \{-2; -3; -4\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BD}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -17 & 10 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} -17 & 10 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 170 - 50 = 120$$

$$V_{nup} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{BD} \overrightarrow{BC} \overrightarrow{BA} \right| = \frac{120}{6} = 20;$$

$$V_{nup} = \frac{1}{3} h_A \cdot S_{BCD}; \Rightarrow h_A = \frac{3V_{nup}}{S_{BCD}} = \frac{60}{S_{BCD}};$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right|$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 11\vec{i} + 10\vec{j} + 17\vec{k} \end{aligned}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{121 + 100 + 289} = \frac{\sqrt{510}}{2}$$

$$h_A = \frac{\frac{60}{\frac{\sqrt{510}}{2}}}{2} = \frac{120}{\sqrt{510}};$$