

Занятие 1. Вводное занятие. Как решать олимпиадные задачи

Цели занятия

- познакомить учащихся с особенностями олимпиадных задач и правилами их оформления;
- научить внимательно читать условие, замечать «подвох», делать рисунок или схему;
- показать простейшие приёмы: рисунок, таблица, перебор, рассуждение «с конца», предположение.

Планируемые результаты: учащиеся умеют внимательно читать условие, делать схему, проверять ответ.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Чем олимпиадная задача отличается от обычной; Как работать над задачей; Задачи «с подвохом»; Метод предположения; Рассуждение «с конца»	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Чем олимпиадная задача отличается от обычной

Обычная задача из учебника решается по известному образцу. В олимпиадной задаче образца нет: чтобы её решить, нужно догадаться, как подойти к условию. Зато для решения почти всегда хватает знаний 5 класса — нужны внимание, сообразительность и аккуратность в рассуждениях.

Олимпиадная задача может спрашивать не только «сколько?», но и «можно ли?», «приведите пример», «докажите», «найдите все...». Ответ без объяснения на олимпиаде почти ничего не стоит: решение должно убеждать читателя в том, что ответ верный и другого ответа нет.

Как работать над задачей

1. **Прочитай условие два раза.** Выпиши, что дано и что спрашивается. Часто «подвох» спрятан в одном слове: «распилил на части» и «сделал распилы» — это разные числа.
2. **Сделай рисунок, схему или таблицу.** Отрезки, стрелки, клеточки помогают увидеть то, что трудно удержать в голове.
3. **Попробуй маленькие числа и частные случаи.** Если в задаче 100 предметов, посмотри, что будет с 2, 3, 4 предметами.
4. **Проверь ответ по условию.** Подставь найденные числа в каждое предложение условия.
5. **Запиши решение.** Коротко и по шагам: что мы нашли и почему это так.

Задачи «с подвохом»

Некоторые задачи проверяют, умеете ли вы читать внимательно. Например: «Тройка лошадей пробежала 30 км. Сколько километров пробежала каждая лошадь?» Каждая лошадь бежала вместе с остальными, поэтому каждая пробежала те же 30 км, а не 10 км.

Другой частый подвох — **промежутки и точки**. Если столбы стоят в ряд, то промежутков между ними на один меньше, чем столбов. Если бревно распилили на n частей, то распилов было $n - 1$. Если часы пробили 3 раза, то между ударами было 2 паузы.

Метод предположения

Пусть по дорожке идут индюки и жеребята, всего 11 голов и 30 ног. Предположим, что все 11 животных — индюки. Тогда ног было бы $11 \cdot 2 = 22$, а на самом деле на $30 - 22 = 8$ ног больше. Каждый жеребёнок «добавляет» по 2 ноги, значит, жеребят $8 : 2 = 4$, а индюков $11 - 4 = 7$. Такой приём называют **методом предположения**.

Рассуждение «с конца»

Если в задаче известен результат нескольких действий, а надо найти начальное число, удобно идти от конца к началу, заменяя каждое действие обратным: сложение — вычитанием, умножение — делением, «взял треть» — «осталось две трети».

Основные идеи и подходы к решению

- **Медленное чтение.** Каждое слово условия важно; особенно слова «каждый», «хотя бы», «ровно», «не более», «части» и «разрезы».
- **Рисунок и схема.** Отрезки, точки, стрелки и таблицы делают условие наглядным.
- **Частные случаи.** Решив задачу для маленьких чисел, легче увидеть закономерность.
- **Промежутки и точки.** Распилов на один меньше, чем кусков; промежутков между столбами на один меньше, чем столбов (если столбы стоят не по кругу).
- **Метод предположения.** Предположим, что все предметы одного вида, сравним с условием и исправим ошибку.
- **Рассуждение с конца.** Если известен результат, идём от него к началу обратными действиями.
- **Проверка.** Найденный ответ обязательно подставляем в условие.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

У мальчика столько же сестёр, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестёр, чем братьев. Сколько в этой семье братьев и сколько сестёр?

Решение. Мальчик не считает себя братом. Если у него k братьев и k сестёр, то мальчиков в семье $k + 1$, а девочек k . Сестра не считает себя сестрой: у неё $k - 1$ сестёр и $k + 1$ братьев. По условию братьев вдвое больше, чем сестёр: $k + 1 = 2 \cdot (k - 1)$. Подбором (или решая уравнение) находим $k = 3$: тогда $3 + 1 = 4$ и $2 \cdot (3 - 1) = 4$.

Ответ: 4 брата и 3 сестры.

Опорная задача 2

Чтобы распилить бревно на 4 части, нужно 12 минут. Сколько минут понадобится, чтобы распилить такое же бревно на 8 частей?

Решение. Чтобы получить 4 части, нужно сделать 3 распила, значит, один распил занимает $12 : 3 = 4$ минуты. Чтобы получить 8 частей, нужно 7 распилов: $7 \cdot 4 = 28$ минут. Типичная ошибка — ответ «24 минуты»: время пропорционально числу распилов, а не числу частей.

Ответ: 28 минут.

Опорная задача 3

Улитка ползёт вверх по столбу высотой 8 м. За день она поднимается на 4 м, а за ночь опускается на 2 м. На какой день улитка достигнет вершины столба?

Решение. За сутки (день и ночь) улитка поднимается на $4 - 2 = 2$ м. После первых суток она на высоте 2 м, после вторых — на высоте 4 м. На третий день она поднимется ещё на 4 м и окажется на высоте 8 м, то есть на вершине. Ночь ей уже не нужна! Ответ «4 дня» ($8 : 2 = 4$) неверен: он не учитывает, что в последний день улитка не сползает.

Ответ: на третий день.

Опорная задача 4

По тропинке вдоль кустов шло одиннадцать хвостов. Насчитать я также смог, что шагало тридцать ног. Это вместе шли куда-то индюки и жеребята. Сколько было индюков и сколько жеребят?

Решение. Используем метод предположения. Пусть все 11 животных — индюки. Тогда ног было бы $11 \cdot 2 = 22$, это на $30 - 22 = 8$ меньше, чем на самом деле. Если заменить одного индюка жеребёнком, число ног увеличится на 2. Значит, жеребят $8 : 2 = 4$, индюков $11 - 4 = 7$. Проверка: $7 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 14 + 16 = 30$.

Ответ: 7 индюков и 4 жеребёнка.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Шёл Кондрат в Ленинград, а навстречу — двенадцать ребят. У каждого по три лукошка, в каждом лукошке — кошка, у каждой кошки — двенадцать котят. Сколько всего их шло в Ленинград?
2. Тройка лошадей пробежала 30 км. Сколько километров пробежала каждая лошадь?
3. Кирпич весит 1 кг и ещё полкирпича. Сколько весит кирпич?
4. Часы с боем делают 3 удара за 4 секунды. За сколько секунд они сделают 9 ударов?
5. Зайцы пилят бревно. Они сделали 10 распилов. Сколько получилось чурбачков?
6. Чтобы подняться на третий этаж дома, надо пройти 52 ступеньки. Сколько ступенек надо пройти, чтобы подняться на шестой этаж того же дома? (Между соседними этажами одинаковое число ступенек.)
7. Две матери и две дочери съели три апельсина, причём каждая съела ровно один апельсин. Как такое могло быть?
8. В корзине лежат 5 яблок. Как разделить их между пятью девочками так, чтобы каждая получила по яблоку и одно яблоко осталось в корзине?
9. На листе бумаги записано число 686. Как, не делая никаких записей и вычислений, получить число, которое больше данного на 303?
10. Вдоль дорожки длиной 20 м с одной стороны через каждые 2 м посадили кусты, причём кусты стоят и в начале, и в конце дорожки. Сколько кустов посадили?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. В двух пачках всего 30 тетрадей. Если из первой пачки переложить во вторую 2 тетради, то в первой пачке станет вдвое больше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?
12. Тане не хватало 7 копеек, а Гале — 2 копеек, чтобы купить по коробке цветных карандашей. Когда они сложили свои деньги, их не хватило даже на одну коробку. Сколько стоит коробка карандашей, если у каждой девочки были какие-то деньги?

- 13.** Расставьте между четырьмя пятёрками знаки действий и скобки так, чтобы получились верные равенства: а) $5\ 5\ 5\ 5 = 3$; б) $5\ 5\ 5\ 5 = 4$; в) $5\ 5\ 5\ 5 = 6$; г) $5\ 5\ 5\ 5 = 7$; д) $5\ 5\ 5\ 5 = 55$.
- 14.** Мать положила на стол сливы и сказала трём сыновьям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришёл Миша, взял треть слив и ушёл. Потом пришёл Петя, взял треть слив, лежавших на столе, и тоже ушёл. Затем пришёл Коля и взял треть того, что увидел. Сколько слив оставила мать, если Коля взял 4 сливы?
- 15.** Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. В лодку вместе с ним помещается только что-то одно: или волк, или коза, или капуста. Нельзя оставлять без присмотра волка с козой и козу с капустой. Как ему это сделать?
- 16.** Летели галки, увидели берёзы и стали рассаживаться. Когда сели по одной на берёзу, четырём галкам не хватило места. Когда сели по две на берёзу, одна берёза осталась пустой. Сколько было галок и сколько берёз?
- 17.** Сейчас Серёже 11 лет, а Вове 1 год. Через сколько лет Серёжа станет втрое старше Вовы?
- 18.** (Задача Л. Н. Толстого.) Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя разделить на пять частей, поэтому их взяли три старших брата, а младшим за это выплатили деньги: каждый из старших заплатил по 800 рублей, и младшие разделили эти деньги поровну. После этого у всех братьев оказалось поровну. Сколько стоит один дом?
- 19.** Как расставить 12 стульев у четырёх стен квадратной комнаты так, чтобы у каждой стены стояло по 4 стула? (Стул, стоящий в углу, считается стоящим у обеих стен.)
- 20.** В ряд стоят 6 стаканов: первые три — с водой, последние три — пустые. Как, взяв в руки только один стакан, сделать так, чтобы полные и пустые стаканы чередовались?
- Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)**
- 21.** Решите ребус: $5 \cdot \text{ШЕПНУЛ} = \text{КРИКНУЛ}$ (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные).
- 22.** К числу прибавили сумму его цифр и получили 2017. Приведите пример такого числа.
- 23.** Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.
- 24.** У Бельчонка есть несколько пакетов с орехами: в двух — по 2 ореха, в трёх — по 3 ореха, в четырёх — по 4 ореха, в пяти — по 5 орехов. Помогите Бельчонку расставить пакеты на двух полках так, чтобы на полках было поровну и пакетов, и орехов.
- 25.** Антошка выкопал пять картошек, все они весят по-разному. Могло ли оказаться, что он сможет разделить все картошки и на две кучки одинакового веса, и на три кучки одинакового веса? (Кучка может состоять и из одной картошки.)
- 26.** На день рождения бельчонок Вася получил мешок орехов и начал есть их вместе с друзьями Димой, Гошей и Лёшей. Дима съел меньше всех, а Гоша — больше всех. Лёша съел чётное число орехов, в 3 раза больше, чем Дима, и в 2 раза меньше, чем Гоша. Все остальные орехи съел Вася. Могло ли в мешке быть 65 орехов?

27. У Флинта пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить монеты по кошелькам так, чтобы потом их можно было раздать кошельками поровну и двоим, и троим, и четверым, и пятерым матросам (кошельки не открывают). Хватит ли ему для этого девяти кошельков?

28. Существует ли число, у которого произведение суммы цифр на количество цифр равно 55?

29. Имеется 2021 целое число, их произведение равно 1. Может ли сумма всех этих чисел быть равной нулю?

30. На детском празднике было 8 детей. Взрослые приготовили 16 пакетов с конфетами: в первом 1 конфета, во втором 2 конфеты, и так далее, в шестнадцатом — 16 конфет. Каждому ребёнку дали по одному пакету в начале праздника и по одному в конце. Могло ли оказаться, что каждому ребёнку досталось поровну конфет, причём в начале и в конце праздника было роздано одинаковое количество конфет?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 2. Примеры и конструкции

Цели занятия

- научить строить примеры, удовлетворяющие нескольким условиям одновременно;
- познакомить с приёмами поиска конструкции: начинать с самого трудного места, использовать симметрию, строить пример по шагам;
- приучить проверять построенный пример по всем условиям задачи.

Планируемые результаты: учащиеся умеют строить пример, проверять его по всем условиям.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Что значит «приведите пример»; Как искать пример; Магический квадрат; Пример с подвохом	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Что значит «приведите пример»

Во многих олимпиадных задачах требуется **построить** объект: расставить числа, раскрасить клетки, разрезать фигуру, придумать число. Чтобы решить такую задачу, достаточно предъявить **один** подходящий пример и **проверить**, что он удовлетворяет всем условиям. Объяснять, как вы до него додумались, не обязательно, но проверку записать нужно.

Пример: «Приведите пример трёх различных натуральных чисел, сумма которых равна их произведению». Ответ: 1, 2, 3, ведь $1 + 2 + 3 = 6$ и $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Как искать пример

- **Начинайте с самого трудного места.** Если какая-то клетка, число или условие участвует в большом количестве ограничений, разберитесь сначала с ним.
- **Подсчитайте, что должно получиться.** Например, если числа от 1 до 9 нужно разбить на три группы с равными суммами, то каждая сумма равна $45 : 3 = 15$. Такой подсчёт сразу сужает поиск.
- **Используйте симметрию.** Симметричная конструкция часто удовлетворяет условиям «сама собой»: если условие выполнено для одной половины фигуры, оно выполнено и для другой.
- **Стройте по шагам и исправляйте.** Сделайте пример, который почти подходит, а затем «подправьте» его.
- **Перебирайте с умом.** Если перебор неизбежен, сократите его оценками.

Магический квадрат

Квадрат 3×3 , заполненный числами от 1 до 9 так, что суммы во всех строках, столбцах и на обеих диагоналях одинаковы, называется **магическим**. Сумма всех чисел равна 45, а строк три, значит, сумма в каждой строке равна $45 : 3 = 15$. Можно доказать, что в центре обязательно стоит число 5: через центр проходят 4 линии (средняя строка, средний столбец, две диагонали), их общая сумма $4 \cdot 15 = 60$; в ней все числа посчитаны по одному разу, а центральное — четыре раза, то есть $45 + 3 \cdot (\text{центр}) = 60$, откуда центр равен 5.

Пример с подвохом

Иногда пример возможен только при необычном взгляде на условие: кошелёк можно положить в другой кошелёк, спички можно сложить в объёмную фигуру, деревья можно посадить в виде звезды. Если пример «не строится», перечитайте условие: может быть, вы добавили ограничение, которого в задаче нет.

Основные идеи и подходы к решению

- **Один пример — полное решение** задачи «приведите пример», но его нужно проверить по всем условиям.

- **Сначала подсчёт:** найдите сумму, произведение или количество, которое должно получиться в каждой части.
- **Самое трудное место — первым:** центр квадрата, угловая клетка, самое большое число.
- **Симметрия экономит усилия.**
- **Почти подходящий пример можно исправить** небольшими изменениями.
- **Нестандартный взгляд:** объёмная фигура, вложенные предметы, числа, записанные рядом.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Расставьте числа от 1 до 9 в клетках квадрата 3×3 так, чтобы суммы чисел во всех строках, во всех столбцах и на обеих диагоналях были одинаковыми.

Решение. Каждая сумма равна $45:3 = 15$, а в центре должно стоять число 5 (см. теорию). Число 9 не может стоять в углу: через угол проходят три линии, и в каждой к 9 нужно добавить два числа с суммой 6, а таких пар (1 и 5, 2 и 4) только две, причём 5 уже в центре. Значит, 9 стоит в середине стороны, напротив неё — 1. Далее подбираем:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Проверка: строки $2 + 7 + 6 = 9 + 5 + 1 = 4 + 3 + 8 = 15$; столбцы $2 + 9 + 4 = 7 + 5 + 3 = 6 + 1 + 8 = 15$; диагонали $2 + 5 + 8 = 6 + 5 + 4 = 15$.

Ответ: например, квадрат, приведённый выше.

Опорная задача 2

Бельчонок хочет положить в каждую клетку квадрата 5×5 либо гриб, либо орех так, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 8 грибов. Помогите ему.

Решение. В каждом квадрате 3×3 должен быть ровно один орех. Ищем «самое важное место»: центральная клетка квадрата 5×5 принадлежит **всем девяти** квадратам 3×3 (проверьте!). Положим орех в центр, а во все остальные клетки — грибы. Тогда в каждом квадрате 3×3 ровно один орех и 8 грибов.

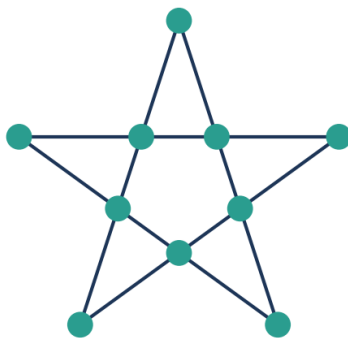
Г	Г	Г	Г	Г
Г	Г	Г	Г	Г
Г	Г	О	Г	Г
Г	Г	Г	Г	Г
Г	Г	Г	Г	Г

Ответ: орех в центральной клетке, грибы во всех остальных.

Опорная задача 3

Посадите 10 деревьев в 5 рядов так, чтобы в каждом ряду было по 4 дерева.

Решение. Если сажать деревья «квадратом», ничего не получится: 5 рядов по 4 дерева — это 20 мест, а деревьев 10, значит, каждое дерево должно стоять сразу в двух рядах. Такое расположение даёт пятиконечная звезда: 5 прямых, каждая пересекается с четырьмя другими; деревья сажаем в 10 точках пересечения (5 вершин звезды и 5 внутренних точек). На каждой прямой оказывается ровно 4 дерева.



Ответ: деревья сажают в вершинах и точках пересечения сторон пятиконечной звезды.

Опорная задача 4

К числу прибавили сумму его цифр и получили 2014. Приведите пример такого числа.

Решение. Сначала оценим. Искомое число меньше 2014, значит, у него не больше четырёх цифр, и сумма цифр не больше $9 + 9 + 9 + 9 = 36$. Поэтому число не меньше $2014 - 36 = 1978$. Перебор теперь короткий. Попробуем числа вида $19ab$: число плюс сумма цифр равно $1900 + 10a + b + 1 + 9 + a + b = 1910 + 11a + 2b$. Нужно $11a + 2b = 104$. При $a = 8$ получаем $2b = 16$, $b = 8$. Число 1988: $1988 + 1 + 9 + 8 + 8 = 2014$. Другое решение: 2006, так как $2006 + 2 + 0 + 0 + 6 = 2014$.

Ответ: например, 1988 или 2006.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Запишите число 100 с помощью пяти единиц и знаков действий.
2. Запишите число 100 с помощью пяти пятёрок и знаков действий (два способа).
3. Запишите число 1000 с помощью восьми восьмёрок и знаков сложения.
4. Приведите пример двух одинаковых натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.
5. Приведите пример трёх различных натуральных чисел, произведение которых равно их сумме.
6. Приведите пример натурального числа, которое делится на 2, на 3 и на 5, но не делится на 4.
7. Приведите пример пяти последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 100.

8. Запишите трёхзначное число, у которого все цифры различны, а сумма цифр равна 3. Сколько всего таких чисел?
9. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 в вершинах треугольника и в серединах его сторон (по одному числу) так, чтобы сумма трёх чисел на каждой стороне была равна 9.
10. Можно ли разложить 9 монет по 4 кошелькам так, чтобы в каждом кошельке было нечётное число монет?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Заполните квадрат 3×3 числами 3, 4, 5, ..., 11 так, чтобы суммы во всех строках, столбцах и на диагоналях были одинаковыми.
12. Нарисованы семь кружков: один в центре и шесть вокруг; через центр проходят три прямые, на каждой из которых лежат три кружка — центральный и два противоположных. Расставьте в кружках числа от 1 до 7 так, чтобы сумма чисел на каждой прямой была равна 12.
13. Разбейте числа от 1 до 12 на две группы с одинаковыми суммами.
14. Разбейте числа от 1 до 9 на три группы по три числа с одинаковыми суммами.
15. Посадите 12 деревьев в 6 рядов так, чтобы в каждом ряду было по 4 дерева.
16. Расставьте в клетках квадрата 4×4 числа 1, 2, 3, 4 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей все числа были различны.
17. Сложите из шести спичек четыре равносторонних треугольника, у которых сторона равна длине спички.
18. Расставьте в ряд числа от 1 до 8 так, чтобы любые два соседних числа отличались не меньше чем на 4.
19. На плане города 8 прямых улиц и 11 перекрёстков, обозначенных буквами. Горизонтальные улицы: $A - B - C - D$, $E - F - G$, $H - I - J - K$. Вертикальные улицы: $A - E - H$, $B - F - I$, $D - G - J$. Наклонные улицы: $H - F - C$, $C - G - K$. На какие три перекрёстка надо поставить полицейских, чтобы на каждой улице стоял хотя бы один полицейский?
20. Расставьте по кругу числа от 1 до 6 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Вася получил число 100 с помощью десяти двоек: $100 = (22:2 - 2:2) \cdot (22:2 - 2:2)$. Улучшите его результат: получите 100 с помощью меньшего числа троек.
22. Расставьте между цифрами 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (порядок цифр менять нельзя) знаки действий так, чтобы получилось 100. Найдите два разных способа.
23. Придумайте два натуральных числа, разность которых равна их частному.
24. Расставьте по кругу числа от 1 до 8 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5.

- 25.** Бельчонок раскладывает в клетки квадрата 5×5 восемь орехов и семнадцать грибов (по одному предмету в клетку) так, чтобы рядом с каждым орехом (в клетках, соседних по стороне) было ровно 2 гриба. Покажите, как это сделать.
- 26.** Найдите четырёхзначное число, которое при умножении на 4 записывается теми же цифрами в обратном порядке.
- 27.** У продавца есть 3 пачки наклеек по 100 штук. Первому покупателю нужно 70 наклеек, второму и третьему — по 60. Как продавцу отсчитать всем нужное число наклеек за 70 секунд, если за одну секунду он отсчитывает ровно одну наклейку?
- 28.** Запишите в клетках квадрата 3×3 девять различных натуральных чисел так, чтобы произведения чисел во всех строках, столбцах и на обеих диагоналях были одинаковыми.
- 29.** Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт в остатке 1, а на 7 делится без остатка.
- 30.** Каждую клетку доски 10×10 покрасили в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседние с ней по стороне клетки синие. Покрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 3. «Да или нет?» Пример и доказательство невозможности

Цели занятия

- научить отвечать на вопросы «можно ли?», «существует ли?», «могло ли?»;
- показать, что ответ «да» обосновывается примером, а ответ «нет» — доказательством;
- познакомить с простейшими способами доказательства невозможности: через сумму, чётность, делимость, оценку, подсчёт.

Планируемые результаты: учащиеся умеют различать пример и доказательство, обосновывать невозможность.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Два вида ответа; Как доказывают невозможность; Типичные ошибки; Контрпример	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Два вида ответа

В задачах вида «Можно ли...», «Существует ли...», «Могло ли так случиться...» сначала нужно понять, какой ответ верный, а затем обосновать его.

- Если ответ «**да**», то достаточно привести **пример** и проверить, что он удовлетворяет всем условиям.
- Если ответ «**нет**», то пример привести невозможно, нужно **доказать**, что ни один вариант не подходит. Фразы «я пробовал, и у меня не получилось» или «скорее всего, нельзя» доказательством не являются.

Поэтому полезно сначала поискать пример, а если он долго не находится, — искать причину, по которой его быть не может.

Как доказывают невозможность

1. **Подсчёт суммы.** Чтобы разбить числа от 1 до 10 на две группы с равными суммами, общая сумма 55 должна делиться на 2. Она нечётна — значит, нельзя.
2. **Чётность.** Сумма чётного количества нечётных чисел чётна, нечётного количества — нечётна. Например, 10 нечётных чисел не могут дать в сумме 25.
3. **Делимость.** Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна утроенному среднему числу, поэтому делится на 3. Значит, она не может равняться 100.
4. **Оценка.** Сумма пяти различных натуральных чисел не меньше $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, поэтому она не может быть равна 12.
5. **Разбиение на части.** Если фигура разрезается на части, в каждой из которых должно выполняться какое-то условие, то можно сложить условия по всем частям.

Типичные ошибки

- Привести пример, но не проверить все условия.
- Доказывать «нет» на одном-двух неудачных примерах.
- Путать «могло ли» и «обязательно ли». Вопрос «могло ли» требует одного примера, а вопрос «обязательно ли» — доказательства для всех случаев (или одного контрпримера для ответа «не обязательно»).

Контрпример

Утверждение «все числа, оканчивающиеся на 3, — простые» опровергается одним примером: $33 = 3 \cdot 11$. Пример, опровергающий общее утверждение, называется **контрпримером**.

Основные идеи и подходы к решению

- **Сначала ищем пример.** Если он есть — ответ «да», задача решена после проверки.
- **Если пример не находится — ищем препятствие:** сумму, чётность, делимость, оценку.

- **Ответ «нет» требует доказательства для всех вариантов.**
- **Общую сумму полезно считать сразу:** она часто показывает, что требуемое невозможно.
- **Одного контрпримера достаточно,** чтобы опровергнуть утверждение «всегда».

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \dots, 10$ на две группы с одинаковыми суммами? А числа $1, 2, \dots, 11$?

Решение. Сумма чисел от 1 до 10 равна 55. Если бы суммы групп были равны, то 55 было бы суммой двух одинаковых чисел, то есть чётным числом. Но 55 нечётно — значит, разбиение невозможно. Сумма чисел от 1 до 11 равна 66, по 33 в каждой группе. Пример: $11 + 10 + 9 + 3 = 33$ и $1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$.

Ответ: для чисел от 1 до 10 нельзя, для чисел от 1 до 11 можно.

Опорная задача 2

Можно ли разменять 25 рублей десятью монетами достоинством 1, 3 и 5 рублей?

Решение. Все монеты нечётного достоинства. Сумма двух нечётных чисел чётна, поэтому десять нечётных чисел, разбитые на пять пар, дают в сумме чётное число. А 25 — нечётное. Значит, разменять нельзя.

Ответ: нельзя.

Опорная задача 3

Может ли сумма трёх последовательных натуральных чисел равняться 100? А сумма пяти последовательных?

Решение. Если среднее из трёх чисел равно a , то числа равны $a - 1$, a , $a + 1$, а их сумма равна $3 \cdot a$ и делится на 3. Число 100 на 3 не делится — значит, ответ «нет». Сумма пяти последовательных чисел равна пятикратному среднему; $100 : 5 = 20$, и действительно $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$.

Ответ: трёх — нет, пяти — да.

Опорная задача 4

Встретились 7 детей. Некоторые из них подарили некоторым другим по подарку (один другому не мог подарить больше одного подарка). Могло ли оказаться, что все получили поровну подарков, хотя все дарили разное количество (возможно, кто-то ничего не дарил)?

Решение. Каждый мог подарить от 0 до 6 подарков. Так как все дарили разное количество, то дети подарили 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 подарков, всего 21 подарок. Тогда каждый получил $21 : 7 = 3$ подарка. Попробуем построить пример. Обозначим детей числами от 0 до 6 — по числу подаренных подарков. Ребёнок 6 дарит всем, ребёнок 0 — никому. Пусть ребёнок 1 дарит ребёнку 6; ребёнок 2 — детям 4 и 5; ребёнок 3 — детям 1, 2 и 6; ребёнок 4 — детям 0, 1, 3 и 5; ребёнок 5 — детям 0, 2, 3, 4 и 6. Проверка: ребёнок 0 получил подарки от 4, 5,

6; ребёнок 1 — от 3, 4, 6; ребёнок 2 — от 3, 5, 6; ребёнок 3 — от 4, 5, 6; ребёнок 4 — от 2, 5, 6; ребёнок 5 — от 2, 4, 6; ребёнок 6 — от 1, 3, 5. Все получили по 3 подарка.

Ответ: могло.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Может ли сумма двух нечётных чисел быть нечётным числом?
2. Может ли произведение двух натуральных чисел быть меньше их суммы?
3. Можно ли разделить 7 яблок между тремя детьми (не разрезая яблок) так, чтобы каждый получил нечётное число яблок?
4. Можно ли разложить 10 конфет в 4 кучки так, чтобы во всех кучках было разное число конфет? А 9 конфет?
5. Можно ли разменять 100 рублей семью купюрами по 10 и 50 рублей?
6. Существует ли треугольник со сторонами 2 см, 3 см и 6 см?
7. Можно ли расставить на шахматной доске 9 ладей так, чтобы они не били друг друга?
8. Может ли в одном месяце быть 5 воскресений? А 6 воскресений?
9. Может ли число, сумма цифр которого равна 4, делиться на 3?
10. Верно ли, что все числа, оканчивающиеся цифрой 7, простые?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Можно ли разбить числа от 1 до 10 на две группы с одинаковыми произведениями?
12. Можно ли разменять 100 рублей пятнадцатью монетами по 1, 5 и 10 рублей?
13. Может ли сумма четырёх последовательных натуральных чисел равняться 2018? А 2020?
14. Можно ли расставить числа от 1 до 9 в клетках квадрата 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была чётной?
15. Можно ли расставить перед числами 1, 2, 3, ..., 10 знаки «+» и «−» так, чтобы значение получившегося выражения было равно нулю?
16. Существуют ли пять натуральных чисел, сумма которых равна 20 и произведение которых тоже равно 20?
17. Можно ли закрасить в квадрате 4×4 пять клеток так, чтобы в каждом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?
18. Шестеро школьников посадили 5 деревьев. Каждое дерево сажало разное число школьников, а каждый школьник участвовал в посадке одинакового числа деревьев. Могло ли так случиться?
19. За один ход можно прибавить к числу одну из его цифр или вычесть из него одну из его цифр (например, из 142 можно получить $142 + 2 = 144$ или $142 - 4 = 138$). а) Можно

ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021? б) Можно ли из числа 1000 получить 2021?

20. Существует ли число, у которого произведение суммы цифр на количество цифр равно 2023?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Вершины 222-угольника покрасили в красный и синий цвета. Сторону назовём одноцветной, если её концы одного цвета, и разноцветной, если разного. Можно ли раскрасить вершины так, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну?

22. Мама, папа и девять детей встали в ряд на прямой дорожке. Мама и папа стоят рядом на расстоянии 1 м друг от друга. Может ли сумма расстояний от всех детей до мамы равняться сумме расстояний от всех детей до папы?

23. Можно ли расставить числа от 1 до 9 в клетках квадрата 3×3 так, чтобы число в каждой угловой клетке было хотя бы на 4 больше каждого из соседних с ним (по стороне) чисел?

24. За круглым столом сидят 7 человек — мальчики и девочки. Может ли оказаться, что у каждого из них ровно один сосед — мальчик?

25. Можно ли выписать в ряд 10 натуральных чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, стоящих подряд, была чётной, а сумма всех десяти чисел — нечётной?

26. Можно ли расставить в вершинах куба числа от 1 до 8 так, чтобы суммы чисел в вершинах каждой грани были одинаковыми?

27. Может ли сумма нескольких последовательных натуральных чисел, начиная с 1, оканчиваться цифрой 7? Цифрой 8?

28. Можно ли числа от 1 до 9 записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

29. Шахматный король обошёл доску 8×8 , побывав на каждой клетке ровно по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Могло ли оказаться, что ровно 31 его ход был сделан по диагонали?

30. Петя утверждает, что выписал в ряд несколько натуральных чисел, сумма которых равна 2025, а сумма их последних цифр равна 1996. Может ли Петя быть прав?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 4. Десятичная запись числа

Цели занятия

- повторить понятия цифры, разряда, разрядного слагаемого;
- научить записывать число через разрядные слагаемые и использовать такую запись в задачах;
- рассмотреть задачи на приписывание и перестановку цифр, на сумму цифр, на наибольшие и наименьшие числа.

Планируемые результаты: учащиеся умеют раскладывать число по разрядам, решать задачи на цифры.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Цифры и числа; Буквенная запись; Приписывание и вычёркивание цифр; Подсчёт цифр; Наибольшее и наименьшее число	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Цифры и числа

Для записи чисел мы используем десять **цифр**: 0, 1, 2, ..., 9. Значение цифры зависит от её места (разряда): в числе 555 первая пятёрка означает 5 сотен, вторая — 5 десятков, третья — 5 единиц. Поэтому наша система записи называется **позиционной десятичной**.

Каждое число можно разложить по разрядам: $3507 = 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7$.

Буквенная запись

Двузначное число с цифрами a (десятки) и b (единицы) обозначают $\overline{ab}$ (черта сверху показывает, что это не произведение). Тогда

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b, \quad \overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Первая цифра числа не может быть нулём.

Полезные следствия:

- $\overline{ab} + \overline{ba} = 11 \cdot (a + b)$ — сумма числа и «перевёртыша» делится на 11;
- $\overline{ab} - \overline{ba} = 9 \cdot (a - b)$ — разность делится на 9;
- $\overline{abc} - \overline{cba} = 99 \cdot (a - c)$.

Приписывание и вычёркивание цифр

- Если к числу n приписать справа цифру d , получится число $10 \cdot n + d$.
- Если приписать справа два нуля, число увеличится в 100 раз.
- Если к числу приписать слева цифру d , то к нему прибавится $d \cdot 10$, $d \cdot 100$, $d \cdot 1000$, ... — в зависимости от того, сколько цифр в числе.

Подсчёт цифр

Однозначных чисел 9, двузначных — 90 (от 10 до 99), трёхзначных — 900. Чтобы записать все числа от 1 до 99, нужно $9 + 90 \cdot 2 = 189$ цифр, от 1 до 999 — $189 + 900 \cdot 3 = 2889$ цифр.

Наибольшее и наименьшее число

Из двух чисел с разным количеством цифр больше то, у которого цифр больше. Из чисел с одинаковым количеством цифр больше то, у которого больше первая цифра (а при равенстве — вторая и т. д.). Поэтому, чтобы получить **наибольшее** число, нужно сделать в нём как можно больше цифр, а старшие цифры — как можно большими. Чтобы получить **наименьшее**, нужно как можно меньше цифр, а старшие цифры — как можно меньшими.

Основные идеи и подходы к решению

- Раскладываете число по разрядам: $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$.
- Приписать цифру справа — значит умножить на 10 и прибавить эту цифру.

- **Перестановка цифр:** разность числа и «перевёртыша» делится на 9, сумма двузначного числа и «перевёртыша» делится на 11.
- **Подсчёт цифр** ведите по группам: однозначные, двузначные, трёхзначные числа.
- **Наибольшее число** — больше цифр и большие цифры впереди; **наименьшее** — меньше цифр и малые цифры впереди (но не ноль на первом месте).
- **Сумма цифр** отличает число от «остатка»: число и сумма его цифр дают одинаковый остаток при делении на 9.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр. Найдите все такие числа.

Решение. Пусть число равно $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$. По условию $10 \cdot a + b = 4 \cdot (a + b) = 4 \cdot a + 4 \cdot b$. Убирая из обеих частей $4 \cdot a$ и b , получаем $6 \cdot a = 3 \cdot b$, то есть $b = 2 \cdot a$. Так как b — цифра, a может быть равно 1, 2, 3 или 4. Получаем числа 12, 24, 36, 48. Проверка: $12 = 4 \cdot 3$, $24 = 4 \cdot 6$, $36 = 4 \cdot 9$, $48 = 4 \cdot 12$.

Ответ: 12, 24, 36, 48.

Опорная задача 2

К натуральному числу n приписали справа одну цифру. Получилось число, в 13 раз большее n . Чему могло равняться n ?

Решение. Если приписана цифра d , получилось число $10 \cdot n + d$. По условию $10 \cdot n + d = 13 \cdot n$, откуда $d = 3 \cdot n$. Так как d — цифра (не больше 9), то n равно 1, 2 или 3, а d равно 3, 6 или 9 соответственно. Проверка: $13 = 13 \cdot 1$, $26 = 13 \cdot 2$, $39 = 13 \cdot 3$.

Ответ: 1, 2 или 3.

Опорная задача 3

Сколько цифр понадобится, чтобы пронумеровать страницы книги, в которой 150 страниц?

Решение. Страницы с 1 по 9 — 9 однозначных номеров, 9 цифр. Страницы с 10 по 99 — 90 двузначных номеров, $90 \cdot 2 = 180$ цифр. Страницы со 100 по 150 — $150 - 100 + 1 = 51$ трёхзначный номер, $51 \cdot 3 = 153$ цифр. Всего $9 + 180 + 153 = 342$ цифр.

Ответ: 342.

Опорная задача 4

Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а сумма цифр равна 20.

Решение. Чтобы число было больше, в нём должно быть как можно больше цифр. Семь различных цифр дают сумму не меньше $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 > 20$, поэтому цифр не больше шести. Шесть различных цифр с суммой 20 существуют, например 0, 1, 2, 3, 5, 9. Среди шестизначных чисел наибольшее то, у которого больше первая цифра:

возьмём 9. Остальные пять цифр дают сумму 11, а пять различных цифр в сумме дают не меньше $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$; значит, это цифры 0,1,2,3,5, и вторая цифра равна 5. Расставляем цифры по убыванию: 953210.

Ответ: 953210.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Сколько существует двузначных чисел? Трёхзначных?
2. Запишите наибольшее и наименьшее пятизначные числа, все цифры которых различны.
3. Сколько раз встречается цифра 1 при записи всех чисел от 1 до 20?
4. Как изменится число, если приписать к нему справа нуль? Два нуля?
5. Найдите все двузначные числа, которые увеличиваются на 9, если переставить их цифры.
6. К числу приписали справа нуль, и оно увеличилось на 252. Какое это было число?
7. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 25.
8. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых все цифры одинаковы?
9. На сколько увеличится трёхзначное число, если приписать к нему слева цифру 5?
10. Из цифр 2, 0, 7 составьте все трёхзначные числа, в которых цифры не повторяются.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Найдите все двузначные числа, которые в 7 раз больше суммы своих цифр.
12. Двузначное число на 45 больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, а сумма его цифр равна 11. Найдите это число.
13. Алла задумала трёхзначное число, в котором нет цифры 0 и все цифры различны. Белла записала число из тех же цифр в обратном порядке. Галя вычла из большего числа меньшее. Какая цифра стоит в разряде десятков полученной разности?
14. Сумма двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна 121. Найдите все такие двузначные числа.
15. Сколько цифр понадобится, чтобы пронумеровать страницы книги с 1-й по 250-ю?
16. Для нумерации страниц книги потребовалось 1392 цифры. Сколько страниц в книге?
17. Шестизначное число начинается с цифры 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, получится число, в 3 раза большее исходного. Найдите это число.
18. Найдите сумму цифр всех чисел от 1 до 99.
19. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны, причём никакие две его цифры нельзя поменять местами так, чтобы получилось меньшее четырёхзначное число.
20. Из числа 1234512345 вычеркните пять цифр так, чтобы оставшееся число было: а) наибольшим; б) наименьшим.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

- 21.** Ваня задумал двузначное число, переставил его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в 4 раза больше задуманного числа. Какое число задумал Ваня?
- 22.** Найдите все трёхзначные числа, которые в 11 раз больше суммы своих цифр.
- 23.** Сколько существует трёхзначных чисел, у которых средняя цифра равна сумме крайних цифр?
- 24.** Петя выписал подряд все натуральные числа от 1 до 100: 123456789101112 ... 99100. Сколько цифр он написал? Какая цифра стоит на сотом месте?
- 25.** Каких чисел от 1 до 1000 больше: тех, в записи которых есть единица, или тех, в записи которых единицы нет?
- 26.** Найдите все двузначные числа без нуля в записи, которые делятся на произведение своих цифр.
- 27.** Существуют ли два последовательных натуральных числа, у каждого из которых сумма цифр делится на 7?
- 28.** Из записи 123456789101112 ... 5960 (выписаны подряд числа от 1 до 60) вычеркнули 100 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим. Какое число получилось?
- 29.** Вовочка складывает числа в столбик по-своему: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр одного разряда пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, $248 + 208$ у него получается 4416. а) Для скольких упорядоченных пар трёхзначных чисел Вовочка получит правильный ответ? б) Найдите наименьшую возможную разность между ответом Вовочки и верным ответом для остальных пар.
- 30.** Назовём натуральное число n квадратируемым, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждое число в сумме со своим номером в ряду даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо: 3,2,1,5,4 (здесь $3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 4$, $5 + 4 = 4 + 5 = 9$). Какие из чисел 7, 9, 11, 15 квадратируемы?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 5. Искусство вычислений

Цели занятия

- повторить законы арифметических действий и научить применять их для рациональных вычислений;
- познакомить с приёмом Гаусса для суммы последовательных чисел;
- научить расставлять знаки действий и скобки, чтобы получить нужный результат.

Планируемые результаты: учащиеся умеют вычислять рационально, находить закономерности.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Законы действий; Полезные приёмы; Приём Гаусса; Расстановка знаков и скобок	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Законы действий

- **Переместительный:** $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Сочетательный:** $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Распределительный:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Благодаря этим законам слагаемые и множители можно переставлять и группировать так, как удобно: $17 + 38 + 83 + 62 = (17 + 83) + (38 + 62) = 100 + 100 = 200$; $25 \cdot 37 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 37 = 3700$.

Полезные приёмы

- Умножение на 5, 25, 125: $5 = 10 : 2$, $25 = 100 : 4$, $125 = 1000 : 8$. Например, $48 \cdot 25 = 48 : 4 \cdot 100 = 1200$.
- Умножение на 9, 99, 999: $9 = 10 - 1$. Например, $45 \cdot 99 = 4500 - 45 = 4455$.
- Умножение двузначного числа на 11: $11 \cdot \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10 + \overline{ab}$. Например, $37 \cdot 11 = 370 + 37 = 407$.
- Вынесение общего множителя: $56 \cdot 73 + 56 \cdot 27 = 56 \cdot (73 + 27) = 5600$.

Приём Гаусса

Говорят, что маленький Карл Гаусс мгновенно сложил числа от 1 до 100. Он заметил, что числа можно разбить на пары с одинаковой суммой: $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 50 + 51 = 101$. Пар 50, поэтому сумма равна $50 \cdot 101 = 5050$.

В общем виде: если числа идут **через одинаковый шаг** (например, 3, 7, 11, 15, ...), то их сумма равна

$$(\text{первое число} + \text{последнее число}) \cdot \text{количество чисел} : 2.$$

Количество чисел от a до b подряд равно $b - a + 1$. Количество чётных чисел от 2 до 100 равно 50, нечётных от 1 до 99 — тоже 50.

Расстановка знаков и скобок

Порядок действий: сначала действия в скобках, затем умножение и деление (слева направо), затем сложение и вычитание (слева направо). Чтобы получить нужное число, полезно идти «от ответа»: разложить ответ на множители или представить его в виде суммы и подобрать, из каких чисел получаются эти множители и слагаемые.

Основные идеи и подходы к решению

- **Группируйте слагаемые** так, чтобы получались круглые числа.
- **Выносите общий множитель за скобки.**
- **Заменяйте неудобные числа удобными:** $99 = 100 - 1$, $25 = 100 : 4$.
- **Сумма чисел с постоянным шагом:** $(\text{первое} + \text{последнее}) \cdot \text{количество} : 2$.
- **Разбивайте на пары** с одинаковой суммой или разностью.

- **Идите от ответа:** раскладываете нужное число на множители или слагаемые.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Вычислите сумму $1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Решение. Разобьём числа на пары: первое с последним, второе с предпоследним и т. д.: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, ..., $50 + 51 = 101$. Пар 50, поэтому сумма равна $50 \cdot 101 = 5050$. Другой способ: запишем сумму дважды — в прямом и обратном порядке — и сложим столбиками; в каждом из 100 столбиков сумма 101, значит, удвоенная сумма равна $100 \cdot 101 = 10100$, а сумма равна 5050.

Ответ: 5050.

Опорная задача 2

Вычислите удобным способом: а) $4 \cdot 37 \cdot 25$; б) $56 \cdot 73 + 56 \cdot 27$; в) $45 \cdot 99$.

Решение. а) $4 \cdot 37 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 37 = 100 \cdot 37 = 3700$. б) $56 \cdot 73 + 56 \cdot 27 = 56 \cdot (73 + 27) = 56 \cdot 100 = 5600$. в) $45 \cdot 99 = 45 \cdot (100 - 1) = 4500 - 45 = 4455$.

Ответ: а) 3700; б) 5600; в) 4455.

Опорная задача 3

Что больше: сумма всех нечётных чисел от 1 до 2019 или сумма всех чётных чисел от 2 до 2018? На сколько?

Решение. Нечётных чисел от 1 до 2019 — 1010, чётных от 2 до 2018 — 1009. Запишем разность и сгруппируем: $1 + (3 - 2) + (5 - 4) + \dots + (2019 - 2018)$. В скобках 1009 разностей, каждая равна 1, и ещё одна единица впереди. Значит, сумма нечётных больше на $1 + 1009 = 1010$.

Ответ: сумма нечётных больше на 1010.

Опорная задача 4

Расставьте между цифрами 1 2 3 4 5 знаки действий и скобки так, чтобы получилось 100 (порядок цифр не менять).

Решение. Идём от ответа: $100 = 4 \cdot 5 \cdot 5$. Цифры 4 и 5 стоят в конце, а ещё одну пятёрку можно получить из первых цифр: $2 + 3 = 5$, причём единицу можно взять множителем. Получаем $1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 1 \cdot 5 \cdot 20 = 100$.

Ответ: например, $1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Вычислите удобным способом: $17 + 38 + 83 + 62$.

2. Вычислите: $25 \cdot 48$.

3. Вычислите: $999 + 99 + 9$.

4. Вычислите: $37 \cdot 11$.
5. Вычислите сумму $1 + 2 + 3 + \dots + 10$.
6. Вычислите сумму $2 + 4 + 6 + \dots + 20$.
7. Вычислите: $48 \cdot 35 + 48 \cdot 65$.
8. Вычислите: $125 \cdot 32$.
9. Вычислите: $1000 - 999 + 998 - 997 + \dots + 2 - 1$.
10. Расставьте скобки так, чтобы равенство стало верным: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 70$.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Вычислите сумму всех нечётных чисел от 1 до 99.
12. Вычислите: $(1 + 3 + 5 + \dots + 99) - (2 + 4 + 6 + \dots + 98)$.
13. Вычислите: $101 \cdot 47 - 47$.
14. Вычислите: $1234 \cdot 5 + 1234 \cdot 3 + 1234 \cdot 2$.
15. С помощью четырёх четвёрок, знаков действий и скобок получите каждое из чисел от 0 до 10.
16. Вычислите сумму $11 + 12 + 13 + \dots + 40$.
17. Расставьте цифры 1, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 3 в записи разности двух четырёхзначных чисел
 $\square \square \square \square - \square \square \square \square$ (по одной цифре в каждый квадратик) так, чтобы разность была наибольшей. Чему она равна? (Четырёхзначное число не может начинаться с нуля.)
18. Задано правило, по которому каждой паре чисел X и Y ставится в соответствие число $X \nabla Y$. Известно, что для любых X и Y верно: $X \nabla 0 = X$ и $X \nabla (Y + 1) = (X \nabla Y) + 2$. Найдите формулу для $X \nabla Y$ и вычислите $2019 \nabla 19$.
19. Вычислите: $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) : (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)$.
20. Найдите сумму всех трёхзначных чисел.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Вычислите: $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$.
22. Вычислите $12345679 \cdot 9$ и $12345679 \cdot 18$. Как, не вычисляя, найти $12345679 \cdot 45$?
23. Коля взял два натуральных числа и нашёл их сумму, разность (первое минус второе), произведение и частное (первое делить на второе). Сложив четыре результата, он получил 153. Найдите эти числа.
24. Расставьте между числами 1 2 3 4 5 6 7 8 9 знаки «+» и «−» так, чтобы получилось 1.
25. Сумма нескольких (не меньше двух) последовательных натуральных чисел равна 100. Найдите эти числа. Укажите все варианты.
26. Вычислите: $1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + 111111111$ (в последнем слагаемом девять единиц).
27. Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 25?

28. Найдите сумму всех чётных трёхзначных чисел.

29. В записи $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ некоторые знаки умножения заменили знаками деления. Может ли значение получившегося выражения равняться 1?

30. Произведение $100 \cdot 100$ записали в виде суммы десятков: $100 \cdot 100 = 10 + 10 + \dots + 10$. Сколько получилось слагаемых? А если записать $1000 \cdot 1000$ в виде суммы сотен?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 6. Математические ребусы

Цели занятия

- познакомить с правилами решения числовых ребусов (буквенных и «звёздочных»);
- научить анализировать последние и первые цифры, учитывать переносы, делать оценки;
- научить вести перебор с отсечением лишних вариантов и доказывать отсутствие решений.

Планируемые результаты: учащиеся умеют восстанавливать запись вычислений, вести перебор с отсечением.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Правила ребусов; С чего начинать; Как вести перебор; Ребус без решений	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Правила ребусов

В **буквенном ребусе** цифры заменены буквами: одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Первая цифра многозначного числа не может быть нулём. В **«звёздочном» ребусе** часть цифр заменена звёздочками; звёздочки могут обозначать как одинаковые, так и разные цифры, если в условии не сказано иное.

Решить ребус — значит найти все решения (или доказать, что их нет), если в условии не сказано «найдите какое-нибудь решение».

С чего начинать

- **Первая цифра суммы.** Сумма двух четырёхзначных чисел меньше $9999 + 9999 = 19998$. Если она пятизначная, то её первая цифра — 1.
- **Последняя цифра.** Последняя цифра суммы (произведения) зависит только от последних цифр слагаемых (множителей). Например, если $A + A$ оканчивается на A , то $A = 0$.
- **Переносы.** При сложении двух чисел в следующий разряд переносится 0 или 1, при сложении трёх чисел — 0, 1 или 2. Если в каком-то разряде $0 + 0 +$ (перенос) оканчивается на 0, то $0 = 0$ без переноса или $0 = 9$ с переносом 1.
- **Оценки.** Если $3 \cdot \overline{KOT}$ — трёхзначное число, то $K \leq 3$.
- **Чётность и делимость.** Удвоенное число всегда чётно; разность числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делится на 9.

Как вести перебор

Когда простые наблюдения исчерпаны, остаётся перебор. Его нужно вести **по порядку**, начиная с разряда, где вариантов меньше всего, и сразу отбрасывать варианты, противоречащие условию. Удобно записывать разряды справа налево и следить за переносами.

Ребус без решений

Иногда нужно доказать, что ребус решений не имеет. Для этого показывают, что любой вариант приводит к противоречию: две разные буквы получаются равными, число получается слишком большим или маленьким, нарушается чётность.

Основные идеи и подходы к решению

- **Первая цифра суммы двух чисел с «лишним» разрядом равна 1.**
- **Последние цифры** дают первые уравнения: $A + A$ оканчивается на $A \Rightarrow A = 0$.
- **Переносы:** при сложении двух чисел — 0 или 1, трёх чисел — 0, 1 или 2.
- **Повторяющаяся буква** в результате и слагаемом даёт сильное ограничение.

- **Оценка** сокращает перебор: сколько цифр у результата, какой может быть первая цифра.
- **Перебор ведём по разрядам справа налево**, отбрасывая противоречия сразу.
- «Нет решений» доказывают перебором всех случаев или через противоречие.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Решите ребус: УДАР + УДАР = ДРАКА.

Решение. Сумма двух четырёхзначных чисел меньше 20000, а результат пятизначный, поэтому $D = 1$. Рассмотрим разряд сотен: $D + D + (\text{перенос}) = 2 + (\text{перенос})$ оканчивается на А, значит, $A = 2$ или $A = 3$. Но А — последняя цифра числа $P + P$, то есть чётная. Значит, $A = 2$, и из разряда десятков переноса нет. В разряде единиц $P + P$ оканчивается на 2: $P = 1$ или $P = 6$; так как $D = 1$, то $P = 6$, и в разряд десятков переносится 1. Десятки: $A + A + 1 = 5$, значит, $K = 5$. Тысячи: $Y + Y$ (из сотен переноса нет) равно $\overline{1P} = 16$, откуда $Y = 8$. Проверка: $8126 + 8126 = 16252$.

Ответ: $8126 + 8126 = 16252$.

Опорная задача 2

Решите ребус: КОКА + КОЛА = ВОДА.

Решение. Единицы: $A + A$ оканчивается на А, значит, $A = 0$. Сотни: $O + O + (\text{перенос})$ оканчивается на О. Если $O = 0$, то $O = A$ — нельзя; значит, $O = 9$, а из разряда десятков пришёл перенос 1, то есть $K + L = 10 + D$. Тысячи: $K + K + 1 = B$ (из сотен перенос 1, так как $9 + 9 + 1 = 19$), значит, $K \leq 4$. При $K = 4$ получаем $B = 9 = O$ — нельзя. При $K \leq 3$ нужно $L \geq 10 - K \geq 7$, причём $L \neq 9$. Перебор: $K = 3, L = 7$ даёт $D = 0 = A$ — нельзя; $K = 3, L = 8$ даёт $D = 1, B = 7$ — подходит; $K = 2, L = 8$ даёт $D = 0$ — нельзя; $K = 1$ требует $L \geq 9$ — нельзя. Проверка: $3930 + 3980 = 7910$.

Ответ: $3930 + 3980 = 7910$.

Опорная задача 3

Восстановите запись умножения столбиком.

$$\begin{array}{r}
 \times \quad * \ 1 \\
 \quad * \ * \\
 \hline
 \quad * \ * \ * \\
 * \ * \ 8 \\
 \hline
 2 \ * \ * \ 4
 \end{array}$$

Решение. Второе неполное произведение — это первый множитель, умноженный на цифру десятков второго множителя. Первый множитель оканчивается на 1, поэтому произведение оканчивается той же цифрой, что и цифра десятков; значит, цифра десятков второго множителя равна 8. Аналогично результат оканчивается на 4, значит, цифра

единиц второго множителя равна 4. Итак, второй множитель 84. Результат от 2000 до 2999, а 2000: $84 > 23$ и 2999: $84 < 36$, поэтому первый множитель от 24 до 35 и оканчивается на 1 — это 31. Проверка: $31 \cdot 4 = 124$, $31 \cdot 8 = 248$, $31 \cdot 84 = 2604$.

Ответ: $31 \cdot 84 = 2604$.

Опорная задача 4

Докажите, что ребус $\text{КОТ} + \text{КОТ} = \text{ТОК}$ не имеет решений.

Решение. Результат трёхзначный, поэтому $2 \cdot \overline{\text{КОТ}} < 1000$ и $K \leq 4$. Цифра К — последняя цифра числа $T + T$, значит, К чётна: $K = 2$ или $K = 4$. Если $K = 2$, то $T + T$ оканчивается на 2, то есть $T = 1$ или $T = 6$; но $\overline{\text{ТОК}} = 2 \cdot \overline{20T}$ — от 400 до 599, поэтому $T = 4$ или $T = 5$. Противоречие. Если $K = 4$, то $T = 2$ или $T = 7$, а $\overline{\text{ТОК}} = 2 \cdot \overline{40T}$ — от 800 до 999, то есть $T = 8$ или $T = 9$. Снова противоречие.

Ответ: решений нет.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Восстановите запись: $** + ** = *97$.
2. Восстановите запись: $** - ** = 89$.
3. Восстановите запись: $**** - *** = 1$.
4. Девочка заменила каждую букву своего имени её номером в русском алфавите и получила число 2011533. Как её зовут?
5. Решите ребус: $A + A + A = BA$.
6. Решите ребус: $OX + OX + OX + OX = AX$. Найдите все решения.
7. Найдите все решения ребуса $AB + BA = 132$.
8. Решите ребус: $T \cdot T = PT$. Найдите все решения.
9. Найдите какое-нибудь решение ребуса $ДВА + ДВА = ТРИ$.
10. Докажите, что ребус $ТРИ + ТРИ = ШЕСТЬ$ не имеет решений.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Решите ребус: $КИС + КСИ = ИСК$.
12. Найдите какое-нибудь решение ребуса $МУХА + МУХА = СЛОН$.
13. Укажите какое-нибудь решение ребуса $2014 + ГОД = СОЧИ$ (буквы обозначают разные цифры, но они могут совпадать с цифрами числа 2014).
14. Решите ребус: $ABV + ABV + ABV = BBB$.
15. Замените звёздочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр были различными: $*** - ** = 23$.
16. Найдите какое-нибудь решение ребуса $ОДИН + ОДИН + ОДИН + ОДИН + ОДИН = ПЯТЬ$.

17. Решите ребус: ЛЕТО + ЛЕТО = ПОЛЕТ.
18. Решите ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.
19. Докажите, что ребус $\text{ТОК} + \text{ТОК} = \text{КОТ}$ не имеет решений.
20. Докажите, что ребус $\text{ЖУК} + \text{ЖУК} = \text{ПАУК}$ не имеет решений.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Решите ребус: ВАГОН + ВАГОН = СОСТАВ.
22. Решите ребус: ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР.
23. Решите ребус: КОШКА + КОШКА + КОШКА = СОБАКА. Найдите все решения.
24. Найдите все решения ребуса $\text{АБ} \cdot \text{В} = \text{ГГГ}$.
25. Замените звёздочки нечётными цифрами так, чтобы получилось верное равенство: $** \cdot ** = ****$.
26. Решите ребус: КНИГА + КНИГА + КНИГА = НАУКА.
27. В ребусе $\text{АБ} + \text{ВГ} = \text{ДЕ}$ все буквы обозначают разные цифры. Какое наименьшее значение может иметь сумма ДЕ?
28. Решите ребус: $\text{АБВГ} \cdot 9 = \text{ГВБА}$.
29. Докажите, что ребус $\text{ЛЕТО} - \text{ОТЕЛ} = 2026$ не имеет решений.
30. Расставьте цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 (каждую по одному разу) вместо звёздочек так, чтобы получилось верное равенство: $*** = ***$.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 7. Чётность

Цели занятия

- повторить свойства чётных и нечётных чисел, чётность суммы и произведения;
- научить применять соображения чётности для доказательства невозможности;
- познакомить с идеями чередования и разбиения на пары.

Планируемые результаты: учащиеся умеют применять соображения чётности.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Чётные и нечётные числа; Чередование; Разбиение на пары; Как применять чётность	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Чётные и нечётные числа

Число называется **чётным**, если оно делится на 2, и **нечётным**, если не делится. Чётные числа можно записать как $2 \cdot k$, нечётные — как $2 \cdot k + 1$. Число чётно тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна (0, 2, 4, 6, 8).

Правила для суммы и произведения:

- чётное $\pm$ чётное = чётное; нечётное $\pm$ нечётное = чётное; чётное $\pm$ нечётное = нечётное;
- чётное $\cdot$ любое число = чётное; нечётное $\cdot$ нечётное = нечётное.

Отсюда главное правило: **сумма нескольких чисел чётна тогда и только тогда, когда нечётных слагаемых чётное количество**. Произведение нечётно тогда и только тогда, когда все множители нечётны. Разность ведёт себя так же, как сумма.

Чередование

Если в цепочке объекты двух видов **чередуются** (чёрное — белое — чёрное..., «туда» — «обратно»...), то в замкнутой цепочке объектов каждого вида поровну, а всего их — чётное число. Например, шестерёнки, сцепленные в кольцо, вращаются попеременно по часовой стрелке и против неё; если их нечётное число, то кольцо вращаться не сможет.

Шахматный конь каждым ходом меняет цвет поля. Значит, после чётного числа ходов он стоит на поле того же цвета, что и вначале, а после нечётного — на поле другого цвета.

Разбиение на пары

Если предметы удалось разбить на пары, то их чётное количество. Значит, если предметов нечётное количество, то хотя бы один остался без пары. Например, если в классе 25 учеников, то разбить всех на пары нельзя.

Как применять чётность

Чаще всего чётность помогает доказать, что что-то **невозможно**: нужно найти величину, которая «по условию» должна быть одной чётности, а «на самом деле» — другой.

Основные идеи и подходы к решению

- Сумма чётна $\Leftrightarrow$ нечётных слагаемых чётное количество.
- Произведение нечётно $\Leftrightarrow$ все множители нечётны.
- Замена знака «+» на «-» перед числом не меняет чётности суммы.
- Чередование в замкнутой цепочке возможно только при чётном числе звеньев.
- Конь меняет цвет поля каждым ходом.
- Разбиение на пары доказывает чётность количества.
- Ищите противоречие в чётности — это частый способ доказать невозможность.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Одиннадцать шестерёнок соединены в замкнутую цепочку: первая сцеплена со второй, вторая — с третьей, ..., одиннадцатая — с первой. Могут ли шестерёнки вращаться?

Решение. Сцепленные шестерёнки вращаются в противоположных направлениях. Если первая вращается по часовой стрелке, то вторая — против, третья — по, ..., то есть все

шестерёнки с нечётными номерами вращаются по часовой стрелке, а с чётными — против. Одиннадцатая шестерёнка имеет нечётный номер и вращается по часовой стрелке, как и первая. Но они сцеплены и должны вращаться в разные стороны. Противоречие.

Ответ: не могут.

Опорная задача 2

Может ли шахматный конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом поле доски ровно по одному разу?

Решение. На доске 64 поля, поэтому конь сделает 63 хода. Каждым ходом он меняет цвет поля, значит, после нечётного числа ходов окажется на поле другого цвета, чем в начале. Но поля $a1$ и $h8$ — одного цвета (оба чёрные). Значит, такой обход невозможен.

Ответ: не может.

Опорная задача 3

В тетради 96 листов, страницы пронумерованы числами от 1 до 192. Вася вырвал 25 листов и сложил все 50 написанных на них чисел. Мог ли он получить 2002?

Решение. На каждом листе две страницы с номерами $2 \cdot k - 1$ и $2 \cdot k$, их сумма $4 \cdot k - 1$ нечётна. Сумма 25 нечётных чисел нечётна (нечётных слагаемых нечётное количество). А 2002 — чётное число.

Ответ: не мог.

Опорная задача 4

На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 10$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их сумму или разность. В конце осталось одно число. Может ли оно быть равно нулю?

Решение. Посмотрим, как меняется чётность суммы всех чисел на доске. Если стереть a и b и записать $a + b$, сумма не изменится. Если записать $a - b$, сумма уменьшится на $2 \cdot b$ — на чётное число. В обоих случаях чётность суммы сохраняется. Вначале сумма равна $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ и нечётна. Значит, и последнее число нечётно, то есть не равно нулю.

Ответ: не может.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Чётна или нечётна сумма $1 + 2 + 3 + \dots + 10$?
2. Чётно или нечётно произведение $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 99$?
3. Может ли сумма пяти нечётных чисел быть равной 100?
4. Петя купил 5 одинаковых тетрадей и 3 одинаковые ручки. И тетрадь, и ручка стоят нечётное число рублей. Мог ли он заплатить за покупку 63 рубля?
5. Можно ли разложить 25 конфет в 4 коробки так, чтобы в каждой коробке было нечётное число конфет?

6. Сумма двух натуральных чисел нечётна. Чётно или нечётно их произведение?
7. Можно ли расставить между числами 1 2 3 4 5 6 7 знаки «+» и «−» так, чтобы значение выражения было равно нулю?
8. Чётна или нечётна сумма трёх последовательных натуральных чисел?
9. На столе лежат 9 монет орлом вверх. За один ход можно перевернуть ровно одну монету. Можно ли за 10 ходов положить все монеты решкой вверх?
10. В классе 25 учеников. Можно ли рассадить их по партам так, чтобы за каждой партой сидели ровно двое?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересечь все его стороны?
12. Из книги выпал кусок. Первая выпавшая страница имеет номер 143, а номер последней записан теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц выпало?
13. Кузнечик прыгает вдоль прямой, каждый раз на 1 см влево или вправо. Может ли он через 25 прыжков оказаться в исходной точке?
14. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 9 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 1 или на 3?
15. Можно ли расставить в клетках таблицы 5×5 натуральные числа так, чтобы сумма чисел в каждой строке была чётной, а в каждом столбце — нечётной?
16. Выписаны числа от 25 до 57. Двое по очереди ставят между соседними числами знаки «+» или «−». Когда все знаки расставлены, вычисляют результат. Если он чётен, выигрывает первый игрок, если нечётен — второй. Кто выиграет?
17. Можно ли переставить числа 1, 2, ..., 100 в ряд так, чтобы любые два соседних числа отличались ровно на 2?
18. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90° (вправо или влево). Докажите, что вернуться в исходную точку она может только через целое число часов.
19. За круглым столом сидят 25 человек. Может ли оказаться, что у каждого из них ровно один сосед того же пола?
20. Можно ли разбить числа 1, 2, ..., 33 на 11 групп по три числа так, чтобы в каждой группе одно из чисел было равно сумме двух других?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. На острове живут правдивцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. 2043 жителя встали в круг, и каждого спросили про его правого соседа: «Он правдивец или лжец?». Могло ли оказаться, что ответов «правдивец» было ровно 2022?
22. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2025. Разрешается стереть любые два числа и записать их разность (из большего вычитается меньшее). В конце осталось одно число. Может ли оно быть равно 0? А 1?

- 23.** Можно ли обойти конём все клетки доски 5×5 , побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и последним ходом вернуться на исходную клетку?
- 24.** В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. По сигналу каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку. Обязательно ли после этого найдётся пустая клетка?
- 25.** Можно ли нарисовать замкнутую ломаную из 7 звеньев, каждое звено которой пересекает ровно одно из остальных звеньев?
- 26.** Можно ли разбить числа $1, 2, \dots, 100$ на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была простым числом?
- 27.** В вершинах куба записаны числа: в одной вершине 1, в остальных — нули. За один ход можно прибавить по единице к числам на концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа стали равными?
- 28.** На доске написаны 10 плюсов и 15 минусов. Разрешается стереть любые два знака и записать вместо них плюс, если стёртые знаки одинаковы, и минус, если разные. Какой знак останется на доске после 24 таких операций?
- 29.** В клетках таблицы 4×4 записаны единицы, и только в одной клетке записано число 3. За один ход можно в любой строке или в любом столбце заменить все единицы тройками, а тройки — единицами. Можно ли за несколько ходов получить таблицу из одних единиц?
- 30.** Петя выписал в ряд 2025 натуральных чисел. Оказалось, что любые два соседних числа отличаются на 1 или на 3. Может ли сумма первого и последнего числа быть нечётной?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 8. Делимость. Признаки делимости

Цели занятия

- повторить понятия делителя и кратного, свойства делимости суммы, разности и произведения;
- изучить признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25 и на составные числа;
- научить применять признаки делимости в задачах на восстановление цифр и доказательство.

Планируемые результаты: учащиеся умеют применять признаки и свойства делимости.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Делители и кратные; Свойства делимости; Признаки делимости; Делимость на составные числа; Почему работает признак делимости на 9	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Делители и кратные

Говорят, что число a **делится** на число b (или b — **делитель** a , а a — **кратное** b), если $a = b \cdot k$ для некоторого натурального k . Например, 36 делится на 4, так как $36 = 4 \cdot 9$.

Свойства делимости

1. Если каждое из чисел a и b делится на c , то их сумма и разность делятся на c .
2. Если a делится на c , а b не делится, то $a + b$ на c **не** делится.
3. Если хотя бы один множитель делится на c , то и произведение делится на c .
4. Если a делится на b , а b — на c , то a делится на c .

Признаки делимости

- **На 2, 5, 10** — по последней цифре: на 2 — если она чётна, на 5 — если 0 или 5, на 10 — если 0.
- **На 4 и на 25** — по числу из двух последних цифр; **на 8** — по числу из трёх последних цифр.
- **На 3 и на 9** — по сумме цифр: число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9).
- **На 11** — по знакопеременной сумме цифр: сложим цифры, стоящие на нечётных местах, и отдельно — на чётных; число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность этих сумм делится на 11. Например, у числа 91729 суммы равны $9 + 7 + 9 = 25$ и $1 + 2 = 3$, разность 22 делится на 11, значит, и число делится на 11.

Делимость на составные числа

Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3; на 12 — если делится на 3 и на 4; на 15 — на 3 и на 5; на 18 — на 2 и на 9; на 36 — на 4 и на 9; на 45 — на 5 и на 9; на 72 — на 8 и на 9. Важно, чтобы два делителя не имели общих множителей, кроме 1. Например, число 12 делится и на 4, и на 6, но на 24 не делится!

Почему работает признак делимости на 9

$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = (99 \cdot a + 9 \cdot b) + (a + b + c)$. Первая скобка делится на 9, поэтому $\overline{abc}$ и $a + b + c$ одновременно делятся или не делятся на 9 (и на 3). Более того, число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 9.

Основные идеи и подходы к решению

- **Сумма делится, если делится каждое слагаемое**; если одно слагаемое делится, а другое нет, сумма не делится.
- **Признаки по последним цифрам**: 2, 5, 10 — одна цифра; 4, 25 — две; 8 — три.
- **Признаки по сумме цифр**: 3 и 9; по знакопеременной сумме — 11.

- **Составной делитель** раскладываем на взаимно простые множители (например, $36 = 4 \cdot 9$) и проверяем оба признака.
- **Восстановление цифр:** сначала используем признаки «по последним цифрам», затем — «по сумме цифр».
- **Удобные разложения:** $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $111 = 3 \cdot 37$, $999 = 27 \cdot 37$.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15. Найдите все решения.

Решение. Число $\overline{a15b}$ должно делиться на 5 и на 3. По признаку делимости на 5 $b = 0$ или $b = 5$. Сумма цифр $a + 1 + 5 + b$ должна делиться на 3. Если $b = 0$, то $a + 6$ делится на 3, $a = 3, 6, 9$. Если $b = 5$, то $a + 11$ делится на 3, $a = 1, 4, 7$.

Ответ: 3150, 6150, 9150, 1155, 4155, 7155.

Опорная задача 2

Найдите все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$, которые делятся на 36.

Решение. $36 = 4 \cdot 9$, причём 4 и 9 не имеют общих делителей, кроме 1. Делимость на 4: число $\overline{5y}$ делится на 4, значит, $y = 2$ или $y = 6$. Делимость на 9: $3 + 4 + x + 5 + y = 12 + x + y$ делится на 9. При $y = 2$ нужно, чтобы $14 + x$ делилось на 9: $x = 4$. При $y = 6$: $18 + x$ делится на 9, $x = 0$ или $x = 9$.

Ответ: 34452, 34056, 34956.

Опорная задача 3

Трёхзначное число записали дважды подряд и получили шестизначное число. Докажите, что оно делится на 7, на 11 и на 13.

Решение. Если трёхзначное число равно $\overline{abc}$, то шестизначное равно $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001$. А $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Значит, шестизначное число делится на 7, на 11 и на 13 (и даже на 1001).

Опорная задача 4

В классе 28 учеников. На 8 Марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Роз было в 4 раза больше, чем нарциссов, и в 3 раза меньше, чем тюльпанов. Сколько было подарено роз?

Решение. Пусть нарциссов n . Тогда роз $4 \cdot n$, тюльпанов $12 \cdot n$, всего цветов $17 \cdot n$. С другой стороны, если мальчиков m , а девочек d , то цветов $m \cdot d$, причём $m + d = 28$. Значит, $m \cdot d$ делится на 17. Так как 17 — простое число, одно из чисел m , d делится на 17, то есть равно 17 (оба меньше 28). Тогда другое равно 11, цветов $17 \cdot 11 = 187$, нарциссов $187 : 17 = 11$, роз $4 \cdot 11 = 44$.

Ответ: 44 розы.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Какие из чисел 135, 246, 1000, 5555, 7776 делятся на 2? на 3? на 5? на 9?
2. Какую цифру нужно поставить вместо звёздочки, чтобы число делилось на 9: а) $543*$; б) $6*2$; в) $25*0$; г) $*72$?
3. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое делится на 9.
4. Сколько существует двузначных чисел, кратных 7?
5. Коля и Петя купили одинаковые лыжи. Петя заплатил трёхрублёвыми купюрами, а Коля — пятирублёвыми, причём всего они дали в кассу меньше 10 купюр. Сколько стоят лыжи?
6. Делится ли сумма $13 + 1313 + 131313$ на 13?
7. Проверьте, что разность $782 - 287$ делится на 9 и на 11. Верно ли, что разность любого трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делится на 9 и на 11?
8. Число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24?
9. Делится ли число 1 000 000 001 на 3? На 11?
10. Не вычисляя, определите, делится ли произведение $12 \cdot 371$ на 6, на 7.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. К числу 18 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.
12. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 0 и 1 и делится на 225.
13. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{7x36y}$, которые делятся на 72.
14. На празднике присутствовали только супружеские пары. Каждый мужчина съел на три апельсина больше и на два мандарина меньше, чем его жена. Апельсинов и мандаринов было съедено поровну. Докажите, что общее число гостей делится на 4.
15. Каждому мальчику в лагере подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. Катя подсчитала, что всего было подарено 4046 фигурок. Докажите, что Катя ошиблась.
16. Может ли двузначное число делиться на пять других двузначных чисел?
17. Докажите, что любое шестизначное число, записанное шестью одинаковыми цифрами, делится на 3, 7, 11, 13 и 37.
18. Найдите наибольшее пятизначное число, которое делится на 11 и все цифры которого различны.
19. Найдите все трёхзначные числа, которые делятся на 99. Что общего у всех этих чисел?
20. Петя выписал подряд 2025 раз число 2025: $20252025 \dots 2025$. Делится ли полученное число на 9? На 11?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Докажите, что сумма всех шестизначных чисел, в записи которых нет цифр 0 и 9, делится на 37.
22. Существует ли натуральное число, которое делится на 2025 и сумма цифр которого равна 2025?
23. Найдите наименьшее десятизначное число, в записи которого все цифры различны и которое делится на 36.
24. Можно ли, переставив цифры числа 123456789, получить число, делящееся на 11?
25. Трёхзначное число делится на 37. Докажите, что число, полученное из него переносом первой цифры в конец, тоже делится на 37.
26. Существует ли десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого встречаются все цифры от 0 до 9?
27. Докажите, что число 10 ... 08 (единица, затем 2024 нуля, затем восьмёрка) делится на 72.
28. Сколько существует четырёхзначных чисел вида $\overline{a97b}$, делящихся на 45?
29. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 4 и сумма цифр которого равна 40.
30. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 9. Простые числа. НОД и НОК

Цели занятия

- повторить понятия простого и составного числа, научить раскладывать числа на простые множители;
- научить находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное;
- показать применение НОД и НОК в задачах о делении на равные части и о совпадениях.

Планируемые результаты: учащиеся умеют раскладывать числа на множители, находить НОД и НОК.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Простые и составные числа; Разложение на простые множители; НОД и НОК; Где встречаются НОД и НОК	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Простые и составные числа

Натуральное число называется **простым**, если у него ровно два делителя: 1 и само число. Числа, у которых больше двух делителей, называются **составными**. Число 1 не является ни простым, ни составным. Простые числа до 50: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Число 2 — единственное чётное простое число.

Решето Эратосфена. Выпишем числа от 2 до 100. Обведём 2 и вычеркнем все остальные числа, кратные 2. Обведём следующее невычеркнутое число 3 и вычеркнем кратные 3, и так далее. Обведённые числа — простые. Достаточно вычёркивать кратные 2, 3, 5, 7, так как $11 \cdot 11 > 100$.

Разложение на простые множители

Каждое составное число можно разложить в произведение простых множителей, причём единственным образом (с точностью до порядка множителей): $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Это утверждение называют **основной теоремой арифметики**. Из него следует: если произведение делится на простое число p , то хотя бы один множитель делится на p .

НОД и НОК

Наибольший общий делитель (НОД) двух чисел — наибольшее число, на которое делятся оба числа. **Наименьшее общее кратное (НОК)** — наименьшее число, которое делится на оба числа.

Чтобы найти их, разложим числа на простые множители: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. В НОД входят общие множители (столько раз, сколько они встречаются в обоих разложениях): $\text{НОД}(84, 90) = 2 \cdot 3 = 6$. В НОК входят все множители, каждый столько раз, сколько он встречается в «богатейшем» разложении: $\text{НОК}(84, 90) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$. Всегда $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$. Числа, у которых НОД равен 1, называются **взаимно простыми**.

Где встречаются НОД и НОК

- **НОД** — когда что-то делят на одинаковые части или группы: наибольшее число одинаковых подарков, наибольшая длина одинаковых кусков.
- **НОК** — когда ищут совпадения повторяющихся событий: через сколько минут два автобуса снова встретятся на остановке, через сколько оборотов шестерёнки вернуться в исходное положение.

Основные идеи и подходы к решению

- **Раскладывайте числа на простые множители** — это ключ к НОД, НОК и делимости.
- **Если произведение делится на простое p , то на p делится один из множителей.**
- **Совпадения событий** — это НОК периодов.
- **Деление на одинаковые части** — это НОД.

- Простые числа, кроме 2, нечётны; простые числа, кроме 3, не делятся на 3.
- $\text{НОД} \cdot \text{НОК} = a \cdot b$.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Разложите на простые множители числа 360 и 84 и найдите их НОД и НОК.

Решение. $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. Общие множители: $2 \cdot 2 \cdot 3$, поэтому $\text{НОД} = 12$. В НОК берём три двойки, две тройки, пятёрку и семёрку: $\text{НОК} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Проверка: $12 \cdot 2520 = 30240 = 360 \cdot 84$.

Ответ: $\text{НОД} = 12$, $\text{НОК} = 2520$.

Опорная задача 2

Когда открыли новый магазин игрушек, Таня заходила туда каждый день начиная с первого, Олег — каждый второй день, Дима — каждый третий, Игорь — каждый четвёртый, Оля — каждый пятый (каждый впервые пришёл в свой второй, третий, четвёртый, пятый день соответственно). В какой день они впервые все окажутся в магазине одновременно?

Решение. Олег бывает в магазине в дни с номерами, кратными 2, Дима — кратными 3, Игорь — кратными 4, Оля — кратными 5. Все вместе они окажутся в магазине в день, номер которого делится на 2, 3, 4 и 5. Наименьший такой номер — $\text{НОК}(2,3,4,5) = 60$.

Ответ: в 60-й день.

Опорная задача 3

В доме несколько подъездов, во всех подъездах одинаковое число этажей, на каждом этаже одинаковое число квартир (больше одной). Квартир на этаже меньше, чем подъездов, а подъездов меньше, чем этажей. Всего в доме 165 квартир. Сколько в доме подъездов?

Решение. Пусть на этаже k квартир, подъездов p , этажей e . Тогда $k \cdot p \cdot e = 165$ и $1 < k < p < e$. Разложим: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Каждое из трёх чисел больше 1, а простых множителей всего три, поэтому каждое из чисел k, p, e — один из множителей 3, 5, 11. С учётом порядка $k = 3, p = 5, e = 11$.

Ответ: 5 подъездов.

Опорная задача 4

Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N + 2$ делится на 2, $N + 3$ — на 3, ..., $N + 10$ — на 10.

Решение. $N + 2$ делится на 2 тогда и только тогда, когда N делится на 2; $N + 3$ делится на 3 — когда N делится на 3, и так далее. Значит, N делится на все числа от 2 до 10, а наименьшее такое число — $\text{НОК}(2,3, \dots, 10)$. Разложим: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, 5, 7 — остальные числа от 2 до 10 делят произведение $8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Ответ: 2520.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Выпишите все простые числа, меньшие 50. Сколько их?
2. Разложите на простые множители числа 84, 180 и 1001.
3. Найдите НОД и НОК чисел 24 и 36.
4. Найдите НОД и НОК чисел 18 и 25.
5. Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?
6. Может ли произведение двух простых чисел быть простым числом?
7. Из 48 конфет и 36 печений нужно составить одинаковые подарки, используя всё. Какое наибольшее число подарков можно составить? Что будет в каждом подарке?
8. С конечной остановки по двум маршрутам одновременно выехали автобусы. Первый возвращается каждые 30 минут, второй — каждые 40 минут. Через какое наименьшее время они снова окажутся на конечной остановке вместе?
9. Маша задумала число и сказала: «Это число меньше 30, его называют, когда считают тройками, и когда считают пятёрками». Какое число задумала Маша?
10. Сколько делителей у числа 12? Выпишите их.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Доктор Пилюлькин осматривал коротышек, стоявших в ряд: каждого второго он помазал йодом, каждого шестого — зелёной, каждого седьмого — мазью от синяков. Каким по счёту был первый коротышка, которого помазали всеми тремя средствами?
12. В классе больше 25, но меньше 40 учеников. На контрольной треть класса получила «пятёрки», четверть — «четвёрки», шестая часть — «тройки», остальные — «двойки». Сколько учеников в классе?
13. Число при делении на 3, 4, 5 и 6 даёт остатки 2, 3, 4 и 5 соответственно. Найдите наименьшее такое число.
14. Две сцепленные шестерёнки имеют 12 и 18 зубцов. Через сколько оборотов первой шестерёнки они впервые вернутся в исходное положение?
15. Произведение двух натуральных чисел равно 720, а их НОД равен 12. Найдите эти числа.
16. Найдите все простые числа p , для которых числа $p + 10$ и $p + 14$ тоже простые.
17. Может ли сумма трёх простых чисел равняться 100?
18. Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 5?
19. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6, но не делится на 7.
20. Ящик длиной 60 см, шириной 36 см и высотой 24 см нужно заполнить одинаковыми кубиками без пустот. Кубики какого наибольшего размера можно взять? Сколько их понадобится?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Приведите пример таких натуральных чисел a и b , что $a \cdot b \cdot (2 \cdot a + b) = 2015$.
22. Найдите наименьшее натуральное N , большее 12, такое, что N делится на 12, $N + 2$ — на 14, $N + 4$ — на 16, а $N + 6$ — на 18.
23. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник 301×215 клеток и провели в нём диагональ. Сколько клеток она пересекает (по внутренним точкам)?
24. Найдите все натуральные n , при которых числа n , $n + 2$ и $n + 4$ — простые.
25. Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных делителя?
26. Сколько трёхзначных чисел имеют чётное число различных делителей?
27. Докажите, что для любого натурального числа n существует простое число, большее n . (Подсказка: рассмотрите число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 1$.)
28. НОД двух чисел равен 6, а НОК равен 72. Найдите эти числа, если оба они больше 6.
29. Натуральное число имеет ровно 5 различных делителей. Может ли оно делиться на 15?
30. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 12 различных делителей.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 10. Деление с остатком. Периодичность

Цели занятия

- повторить деление с остатком и запись $a = b \cdot q + r$;
- научить находить остатки суммы и произведения по остаткам слагаемых и множителей;
- научить решать задачи о периодических процессах (календарь, повторяющиеся узоры, циклы).

Планируемые результаты: учащиеся умеют использовать остатки и периодичность.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Деление с остатком; Остатки суммы и произведения; Периодичность; Календарь	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Деление с остатком

Разделить число a на число b с остатком — значит представить его в виде

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b,$$

где q — **неполное частное**, r — **остаток**. Например, $47 = 6 \cdot 7 + 5$: при делении 47 на 6 частное 7, остаток 5. Остаток всегда меньше делителя. Если остаток равен нулю, число делится нацело.

Все числа по остаткам от деления на 3 делятся на три вида: $3 \cdot k$, $3 \cdot k + 1$, $3 \cdot k + 2$. Аналогично при делении на 2 — чётные $2 \cdot k$ и нечётные $2 \cdot k + 1$.

Остатки суммы и произведения

Остаток суммы (разности, произведения) определяется остатками слагаемых (множителей). Например, если a при делении на 7 даёт остаток 4, а b — остаток 5, то $a + b$ даёт тот же остаток, что и $4 + 5 = 9$, то есть 2; $a \cdot b$ — тот же остаток, что и $4 \cdot 5 = 20$, то есть 6.

Поэтому, чтобы найти остаток большого выражения, можно заменять числа их остатками.

Периодичность

Многие процессы повторяются через одинаковые промежутки: дни недели (период 7), часы на циферблате (период 12 или 24), повторяющиеся узоры и слова. Если последовательность повторяется с периодом T , то её n -й элемент совпадает с элементом, номер которого равен остатку от деления n на T (если остаток 0 — с последним элементом периода).

Например, в последовательности МАТЕМАТИКАМАТЕМАТИКА... период 10. Так как $2023 = 10 \cdot 202 + 3$, то 2023-я буква совпадает с третьей — это Т.

Календарь

В обычном году 365 дней = 52 недели и 1 день, в високосном 366 дней = 52 недели и 2 дня. Поэтому день недели, на который приходится данная дата, через год сдвигается на 1 (а если между датами есть 29 февраля — на 2).

Основные идеи и подходы к решению

- **Запись** $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$.
- **Заменяйте числа их остатками** при вычислении остатков сумм и произведений.
- **Разбиение на классы по остаткам**: $3 \cdot k$, $3 \cdot k + 1$, $3 \cdot k + 2$ — и разбор каждого случая.
- **Найдите период** — и сведите вопрос о «далёком» элементе к остатку.
- **Неделя — период 7**: через 7 дней тот же день недели.
- **Внимательно с началом отсчёта**: если первый элемент имеет номер 1, то номер с остатком 0 соответствует последнему элементу периода.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Некто пишет подряд без пробелов слово «МАТЕМАТИКА»: МАТЕМАТИКАМАТЕМАТИКА... Какой будет 2023-я буква?

Решение. В слове 10 букв, и запись повторяется с периодом 10. $2023 = 10 \cdot 202 + 3$: после 202 полных слов идёт 3-я буква очередного слова, то есть Т.

Ответ: Т.

Опорная задача 2

Будем считать пальцы на руке так: 1 — большой, 2 — указательный, 3 — средний, 4 — безымянный, 5 — мизинец, 6 — безымянный, 7 — средний, 8 — указательный, 9 — большой, 10 — указательный и так далее. Какой палец будет 2025-м?

Решение. Счёт идёт «туда и обратно»: большой, указательный, средний, безымянный, мизинец, безымянный, средний, указательный — и затем снова большой (9-й). Значит, последовательность повторяется с периодом 8: числу n соответствует тот же палец, что и остатку от деления n на 8 (остатку 0 — указательный). $2025 = 8 \cdot 253 + 1$, остаток 1 — большой палец.

Ответ: большой.

Опорная задача 3

Найдите все натуральные числа, у которых частное от деления на 8 равно остатку.

Решение. Если частное и остаток равны r , то число равно $8 \cdot r + r = 9 \cdot r$, причём остаток r меньше 8, а частное r не равно 0 (иначе число равно 0). Значит, $r = 1, 2, \dots, 7$, а числа равны 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63. Проверка: $63 = 8 \cdot 7 + 7$.

Ответ: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63.

Опорная задача 4

В некотором месяце ровно пять пятниц, причём первый и последний день месяца — не пятницы. Каким днём недели является 12-е число этого месяца?

Решение. Пять пятниц занимают не меньше $4 \cdot 7 + 1 = 29$ дней. В месяце из 29 дней пятница должна быть 1-го и 29-го — это первый и последний день, не подходит. В месяце из 30 дней пятницы — 1-го или 2-го числа; первое невозможно, а при пятнице 2-го числа пятницей будет и 30-е — последний день. В месяце из 31 дня пятницы могут быть 1, 2 или 3-го числа; 1-е отпадает, при 3-м пятницей будет 31-е — последний день. Значит, пятницы приходятся на 2, 9, 16, 23, 30-е числа. Тогда 12-е — это $9 + 3$, через три дня после пятницы, — понедельник.

Ответ: понедельник.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Найдите частное и остаток при делении 100 на 7 и 2025 на 9.
2. Какой остаток даёт число 12345 при делении на 5? На 10? На 2?
3. Сегодня вторник. Какой день недели будет через 50 дней?
4. Какая цифра стоит на 100-м месте в записи 123123123 ...?
5. При делении числа на 7 получилось неполное частное 12 и остаток 5. Найдите это число.
6. Число при делении на 4 даёт остаток 3. Какой остаток оно даёт при делении на 2?
7. Бусы нанизаны в таком порядке: красная, синяя, синяя, жёлтая, красная, синяя, синяя, жёлтая, ... Какого цвета 50-я бусина?
8. Может ли остаток от деления на 7 быть равен 7?
9. Часы показывают 9:00. Что они будут показывать через 100 часов?
10. Сколько чисел от 1 до 100 при делении на 7 дают остаток 3?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Может ли в одном месяце быть 5 понедельников и 5 пятниц?
12. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 даёт остаток 3, а при делении на 5 — остаток 4.
13. Число a при делении на 9 даёт остаток 4, а число b — остаток 7. Какие остатки при делении на 9 дают числа $a + b$ и $a \cdot b$?
14. Какой остаток при делении на 3 даёт сумма $1 + 2 + 3 + \dots + 100$?
15. Докажите, что квадрат натурального числа при делении на 3 даёт остаток 0 или 1.
16. Найдите все трёхзначные числа, которые при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дают остаток 1.
17. Докажите, что сумма шести последовательных натуральных чисел при делении на 6 даёт остаток 3.
18. Найдите остаток от деления числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 + 7$ на 9.
19. Может ли сумма двух чисел, дающих при делении на 5 остатки 3 и 4, делиться на 5?
20. В году 53 воскресенья. Каким днём недели могло быть 1 января этого года?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Определите, простым или составным является число $N = 7 \cdot 9 \cdot 13 + 2020 \cdot 2018 \cdot 2014$.
22. Лекарь велел Геральту принимать лекарство 180 дней по графику «2 через 1»: два дня приёма, один день отдыха, снова два дня приёма и т. д. Геральт начал приём в понедельник. Сколько раз он будет принимать лекарство в понедельник и следующий за ним вторник подряд?
23. У Васи два будильника. Оба звонят ровно в 7:00, а потом первый звонит каждые 2 минуты, а второй — каждые 3 минуты. Если будильники звонят одновременно, звонок

считается одним. Вася услышал 17 звонков и встал. Через сколько минут после 7:00 это произошло?

24. В семиэтажном доме лифт курсирует между первым и седьмым этажами, останавливаясь на каждом этаже: 1,2, ...,7,6, ...,1,2, ... На каждой остановке, начиная с первого этажа, в лифт заходил один домохозяй и никто не выходил. На каком этаже зашёл тысячный домохозяй?

25. За круглым столом на равных расстояниях друг от друга сидят люди с табличками 1,2,3, ... (по часовой стрелке). Человек с табличкой 31 заметил, что от него до человека с табличкой 7 такое же расстояние, как до человека с табличкой 14. Сколько людей за столом?

26. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 даёт остаток 6, при делении на 8 — остаток 7, а при делении на 9 — остаток 8.

27. Докажите, что при любом натуральном n число $n \cdot (n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)$ делится на 6.

28. Найдите остаток от деления числа 2^{100} на 3.

29. Число 2025 выписали подряд много раз: 202520252025 ... Какая цифра стоит на 2026-м месте?

30. Найдите остаток от деления на 7 числа 10^6 и числа 10^{2025} .

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 11. Последняя цифра. Сравнение чисел

Цели занятия

- научить находить последнюю цифру суммы, произведения и степени, не вычисляя самого числа;
- познакомить с периодичностью последних цифр степеней;
- научить сравнивать числа и выражения без полного вычисления.

Планируемые результаты: учащиеся умеют находить последнюю цифру, сравнивать числа рассуждением.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Последняя цифра суммы и произведения; Последние цифры степеней; Последние цифры квадратов; Сравнение без вычислений	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Последняя цифра суммы и произведения

Последняя цифра суммы и произведения зависит **только от последних цифр** слагаемых и множителей. Например, $2027 \cdot 1348$ оканчивается той же цифрой, что $7 \cdot 8 = 56$, то есть 6. Это частный случай правила об остатках: последняя цифра — это остаток от деления на 10.

Последние цифры степеней

Степень a^n — это произведение n множителей, равных a . Выпишем последние цифры степеней:

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	8	6	2	4
3^n	3	9	7	1	3	9
7^n	7	9	3	1	7	9
8^n	8	4	2	6	8	4
4^n	4	6	4	6	4	6
9^n	9	1	9	1	9	1

Степени чисел, оканчивающихся на 0, 1, 5, 6, оканчиваются той же цифрой. Для всех цифр последние цифры степеней повторяются с периодом 4 (для 4 и 9 — даже с периодом 2). Поэтому, чтобы найти последнюю цифру a^n , достаточно знать последнюю цифру a и остаток от деления n на 4 (остатку 0 соответствует четвёртый столбец таблицы).

Пример: 3^{2025} . $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, остаток 1, последняя цифра такая же, как у 3^1 , — 3.

Последние цифры квадратов

Квадраты натуральных чисел оканчиваются только цифрами 0, 1, 4, 5, 6, 9. Значит, число, оканчивающееся на 2, 3, 7 или 8, не может быть квадратом.

Сравнение без вычислений

- **Сравнение разностью:** $2025 \cdot 2027 = 2025 \cdot 2026 + 2025$, а $2026 \cdot 2026 = 2025 \cdot 2026 + 2026$, поэтому второе произведение больше на 1.
- **Сравнение степеней:** $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$, $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$, поэтому $2^{30} < 3^{20}$.
- **Оценки:** $2^{10} = 1024 > 1000$, поэтому $2^{100} > 1000^{10} = 10^{30}$.
- **Промежуточное число:** чтобы сравнить a и b , иногда удобно найти c , для которого $a < c < b$.

Основные идеи и подходы к решению

- **Последняя цифра результата зависит только от последних цифр чисел.**
- **Последние цифры степеней повторяются с периодом 4:** находим остаток показателя при делении на 4.
- **Квадраты не оканчиваются на 2, 3, 7, 8.**

- Произведение, содержащее множители 2 и 5, оканчивается нулём.
- Сравнивайте степени, приводя их к одинаковому показателю или основанию.
- Сравнивайте произведения, выделяя общую часть.
- Используйте промежуточное число для сравнения.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Какой цифрой оканчивается число 2^{2025} ?

Решение. Последние цифры степеней двойки повторяются с периодом 4: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... Так как $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, последняя цифра числа 2^{2025} такая же, как у 2^1 , то есть 2.

Ответ: 2.

Опорная задача 2

Какой цифрой оканчивается сумма $5^{2020} + 6^{2019}$?

Решение. Любая степень пятёрки оканчивается на 5, любая степень шестёрки — на 6. Сумма оканчивается той же цифрой, что $5 + 6 = 11$, то есть 1.

Ответ: 1.

Опорная задача 3

Что больше: 2^{30} или 3^{20} ?

Решение. 2^{30} — произведение 30 двоек, его можно разбить на 10 групп по три двойки: $2^{30} = 8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8 = 8^{10}$. Аналогично $3^{20} = 9^{10}$. Так как $8 < 9$, то $8^{10} < 9^{10}$.

Ответ: 3^{20} больше.

Опорная задача 4

Что больше: $2025 \cdot 2027$ или $2026 \cdot 2026$?

Решение. По распределительному закону $2025 \cdot 2027 = 2025 \cdot (2026 + 1) = 2025 \cdot 2026 + 2025$, а $2026 \cdot 2026 = (2025 + 1) \cdot 2026 = 2025 \cdot 2026 + 2026$. Второе число больше на 1.

Ответ: $2026 \cdot 2026$ больше на 1.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Какой цифрой оканчивается произведение $7 \cdot 17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot 47$?
2. Какой цифрой оканчивается сумма $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99$?
3. Какой цифрой оканчивается число 2^{100} ? Число 3^{100} ?
4. Какой цифрой оканчивается число 6^{100} ? Число 25^{25} ?
5. Какой цифрой оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 10?

6. Какой цифрой оканчивается число 9^{2025} ?
7. Что больше: 4^5 или 5^4 ?
8. Что больше: $111 \cdot 999$ или $333 \cdot 333$?
9. Что больше: $999 \cdot 1001$ или $998 \cdot 1002$? На сколько?
10. Какой цифрой оканчивается произведение всех трёхзначных чисел?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Какой цифрой оканчивается сумма $2^{2025} + 3^{2025}$?
12. Какой цифрой оканчивается число 2023^{2023} ?
13. Может ли квадрат натурального числа оканчиваться цифрой 2? Цифрой 7?
14. Какой цифрой оканчивается сумма $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 10 \cdot 10$?
15. Что больше: 2^{100} или 10^{30} ?
16. Что больше: 3^{40} или 4^{30} ?
17. Что больше: 5^{300} или 3^{500} ?
18. Что больше: 10^{20} или 20^{10} ?
19. Может ли число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 3$ при $n \geq 5$ быть квадратом натурального числа?
20. Найдите наименьшее $n > 2016$, при котором сумма $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не делится на 10.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Какой цифрой оканчивается сумма $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 10^{10}$?
22. Найдите две последние цифры числа 2^{100} .
23. Докажите, что $2^{2025} + 3^{2025}$ делится на 5.
24. Что больше: 31^{11} или 17^{14} ?
25. Какими цифрами может оканчиваться число n^4 ? Докажите, что $n^5 - n$ делится на 10 при любом натуральном n .
26. Докажите, что произведение $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99$ меньше, чем 50^{50} .
27. Существует ли натуральное n , при котором число $n \cdot n + n + 1$ делится на 10?
28. Какой цифрой оканчивается число 7^{7^7} (семь в степени 7^7)?
29. Что больше: 2^{2025} или 5^{860} ?
30. Сравните числа $1234567 \cdot 1234569$ и $1234568 \cdot 1234568$.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 12. Дроби и доли

Цели занятия

- повторить понятия доли и дроби, нахождение части числа и числа по его части;
- научить сравнивать дроби разными способами, в том числе через дополнение до единицы;
- научить решать задачи «на остаток» и задачи с египетскими дробями.

Планируемые результаты: учащиеся умеют решать задачи на части и дроби.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Доли и дроби; Основное свойство дроби; Сравнение дробей; Задачи «на остаток»; Египетские дроби	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Доли и дроби

Если целое разделить на n равных частей, каждая часть называется **долей** и записывается $\frac{1}{n}$. Дробь $\frac{m}{n}$ означает m таких долей. Число m — числитель, n — знаменатель.

- **Часть от числа:** чтобы найти $\frac{m}{n}$ от числа a , нужно a разделить на n и умножить на m . Например, $\frac{3}{4}$ от 48 — это $48 : 4 \cdot 3 = 36$.
- **Число по его части:** если $\frac{m}{n}$ числа равны b , то число равно $b : \frac{m}{n} = b \cdot \frac{n}{m}$. Например, если $\frac{2}{5}$ числа равны 18, то число равно $18 : \frac{2}{5} = 18 \cdot \frac{5}{2} = 45$.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, получится равная дробь: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. С помощью этого свойства дроби сокращают и приводят к общему знаменателю.

Сравнение дробей

- С одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель: $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$.
- С одинаковыми числителями больше та, у которой меньше знаменатель: $\frac{3}{7} > \frac{3}{8}$.
- **Через дополнение до единицы:** $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$, $\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7}$; так как $\frac{1}{6} > \frac{1}{7}$, то $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$.
- Через общий знаменатель или с помощью промежуточного числа (например, $\frac{1}{2}$).

Задачи «на остаток»

Если сначала взяли часть целого, а потом часть **остатка**, то вторая часть считается от остатка, а не от целого. Например, если взяли $\frac{1}{3}$ пирога, а затем $\frac{1}{2}$ остатка, то во второй раз взяли $\frac{1}{2}$ от $\frac{2}{3}$, то есть $\frac{1}{3}$ пирога. Такие задачи удобно решать, представляя целое отрезком, или с конца.

Египетские дроби

В Древнем Египте пользовались почти только дробями с числителем 1. Любую дробь можно представить суммой различных таких дробей: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Полезно равенство $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, например $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Основные идеи и подходы к решению

- **Часть от числа:** разделить на знаменатель, умножить на числитель.
- **Число по части:** разделить на числитель, умножить на знаменатель.
- **Часть остатка $\neq$ часть целого:** следите, от чего берётся доля.

- Сравнение через дополнение до 1 удобно для дробей, близких к 1.
- Изображайте целое отрезком и отмечайте на нём части.
- Разность $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ помогает складывать длинные суммы.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Петя готовил уроки 1 час 40 минут. На математику он потратил $\frac{1}{5}$ этого времени, а на географию — $\frac{1}{4}$ оставшегося. Сколько минут он готовил математику и сколько — географию?

Решение. 1 час 40 минут = 100 минут. На математику: $100 : 5 = 20$ минут. Осталось $100 - 20 = 80$ минут, на географию — $80 : 4 = 20$ минут.

Ответ: по 20 минут.

Опорная задача 2

Что больше: $\frac{2021}{2022}$ или $\frac{2022}{2023}$?

Решение. $\frac{2021}{2022} = 1 - \frac{1}{2022}$, $\frac{2022}{2023} = 1 - \frac{1}{2023}$. Так как $\frac{1}{2022} > \frac{1}{2023}$, то от единицы в первом случае отнимается больше, и первая дробь меньше.

Ответ: $\frac{2022}{2023}$ больше.

Опорная задача 3

У Вани на дне рождения было 5 друзей. Первому он отрезал $\frac{1}{6}$ пирога, второму — $\frac{1}{5}$ остатка, третьему — $\frac{1}{4}$ нового остатка, четвёртому — $\frac{1}{3}$ оставшегося к этому моменту пирога. Последний кусок Ваня разделил пополам с пятым другом. Кому достался самый большой кусок?

Решение. Первый получил $\frac{1}{6}$ пирога, осталось $\frac{5}{6}$. Второй получил $\frac{1}{5}$ от $\frac{5}{6}$, то есть $\frac{1}{6}$; осталось $\frac{4}{6}$. Третий получил $\frac{1}{4}$ от $\frac{4}{6}$ — снова $\frac{1}{6}$; осталось $\frac{3}{6}$. Четвёртый — $\frac{1}{3}$ от $\frac{3}{6}$, то есть $\frac{1}{6}$; осталось $\frac{2}{6}$, их Ваня поделил пополам с пятым другом: по $\frac{1}{6}$.

Ответ: все куски одинаковы, каждый — $\frac{1}{6}$ пирога.

Опорная задача 4

Вычислите: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, $\frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$. При сложении все промежуточные дроби сокращаются, остаётся $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Найдите $\frac{3}{4}$ от 48.
2. Найдите число, $\frac{2}{5}$ которого равны 18.
3. Что больше: $\frac{3}{7}$ или $\frac{3}{8}$?
4. Какую часть часа составляют 20 минут? 45 минут?
5. Который сейчас час, если оставшаяся часть суток вдвое больше прошедшей?
6. В классе 24 ученика, $\frac{3}{8}$ из них — мальчики. Сколько в классе девочек?
7. Автомобилист проехал $\frac{2}{9}$ дороги, это 40 км. Какова длина дороги?
8. Что больше: $\frac{5}{6}$ или $\frac{6}{7}$?
9. Батон и ещё полбатона стоят 30 рублей. Сколько стоит батон?
10. Что больше: половина от трети или треть от половины?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. На день рождения к Васе пришли четыре друга. Первый получил $\frac{1}{5}$ пирога, второй — $\frac{1}{4}$ остатка, третий — $\frac{1}{3}$ нового остатка. Оставшуюся часть Вася разделил поровну между собой и четвёртым другом. Кому достался самый большой кусок?
12. Я отпил $\frac{1}{6}$ чашки чёрного кофе и долил чашку молоком. Затем выпил $\frac{1}{3}$ чашки и снова долил молоком. Потом выпил полчашки и долил молоком. Наконец, выпил всю чашку. Чего я выпил больше: кофе или молока?
13. Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно и смотрел, пока не осталось проехать половину того пути, который он проехал, смотря в окно. Какую часть всего пути он смотрел в окно?
14. Вычислите: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.
15. Какое число нужно прибавить к числителю и к знаменателю дроби $\frac{5}{8}$, чтобы получилась дробь $\frac{3}{4}$?
16. Представьте число 1 в виде суммы трёх различных дробей с числителем 1.
17. У Ани и Вани денег поровну. Какую часть своих денег Аня должна отдать Ване, чтобы у него стало вдвое больше денег, чем у неё?
18. Найдите дробь со знаменателем 15, которая больше $\frac{2}{3}$, но меньше $\frac{4}{5}$.
19. Найдите все несократимые дроби со знаменателем 12, которые больше $\frac{1}{3}$, но меньше $\frac{3}{4}$.

20. Двум воронам досталось немного сыра. Первой досталось 100 г, часть из которых отняла лисица. Кусок второй вороны был вдвое больше, чем у первой, но съесть она успела вдвое меньше, чем первая. Часть сыра, которую лисица отняла у второй вороны, оказалась втрое больше, чем отнятая у первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. У Пети 10 друзей. Первому он отдал $\frac{1}{12}$ своих конфет и ещё $\frac{1}{12}$ конфеты, второму — $\frac{1}{11}$ оставшихся конфет и ещё $\frac{1}{11}$ конфеты, третьему — $\frac{1}{10}$ оставшихся и ещё $\frac{1}{10}$, ..., десятому — $\frac{1}{3}$ оставшихся и ещё $\frac{1}{3}$ конфеты. После этого у Пети осталась одна конфета. Сколько конфет было у него вначале?

22. Найдите все несократимые дроби, которые увеличиваются в 3 раза, если к числителю и к знаменателю прибавить по 12.

23. Сравните дроби $\frac{20222021}{20212020}$ и $\frac{20212020}{20202019}$.

24. Вычислите: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

25. Представьте дробь $\frac{3}{7}$ в виде суммы нескольких различных дробей с числителем 1.

26. Коля за 2 часа сделал половину заданий по математике, $\frac{3}{4}$ заданий по физике и все задания по химии. Закончив всю работу, он обнаружил, что на химию ушло четверть всего времени. Если бы он делал только физику, то сделал бы её за час. За какое время Коля сделал все задания?

27. Найдите две несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна $\frac{86}{111}$.

28. Двое рабочих вместе могут выполнить работу за 6 дней, а первый один — за 10 дней. Какую часть работы выполняет второй рабочий за день? За сколько дней он выполнит всю работу один?

29. Что больше: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$ или $\frac{1}{10}$?

30. Сколькими способами можно представить дробь $\frac{1}{6}$ в виде суммы двух дробей с числителем 1 (дроби могут быть одинаковыми, порядок слагаемых не важен)?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 13. Задачи на движение

Цели занятия

- повторить связь скорости, времени и расстояния;
- научить решать задачи на движение навстречу, в противоположных направлениях, вдогонку, по реке;
- познакомить с понятиями скорости сближения, длины поезда и средней скорости.

Планируемые результаты: учащиеся умеют составлять схему движения, использовать скорость сближения.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Основная формула; Два движущихся объекта; Движение по реке; Длина поезда; Средняя скорость	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Основная формула

Расстояние равно скорости, умноженной на время: $s = v \cdot t$. Отсюда $v = s : t$ и $t = s : v$. Важно, чтобы единицы были согласованы: если скорость в километрах в час (км/ч), то время — в часах, а расстояние — в километрах. Полезно помнить: $1 \text{ км/ч} = 1000 \text{ м} : 60 \text{ мин}$, а $36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с}$.

Два движущихся объекта

- **Навстречу друг другу:** расстояние между ними уменьшается на $v_1 + v_2$ за единицу времени — это **скорость сближения**.
- **В противоположных направлениях:** расстояние увеличивается со скоростью $v_1 + v_2$ — **скорость удаления**.
- **Вдогонку (в одном направлении):** расстояние меняется со скоростью $v_1 - v_2$.

Время до встречи равно начальному расстоянию, делённому на скорость сближения.

Движение по реке

Если собственная скорость лодки v , а скорость течения u , то скорость **по течению** $v + u$, **против течения** $v - u$, а **плот** плывёт со скоростью течения u . Полусумма скоростей по течению и против течения равна собственной скорости лодки, а полуразность — скорости течения.

Длина поезда

Поезд проходит мимо столба, когда проходит расстояние, равное своей длине. Чтобы проехать мост, поезд должен пройти длину моста **плюс** свою длину.

Средняя скорость

Средняя скорость — это весь путь, делённый на всё время движения. Она, как правило, **не равна** среднему арифметическому скоростей! Если туда ехали со скоростью 60 км/ч, а обратно — 40 км/ч, то на 120 км (например) ушло $2 + 3 = 5$ часов, и средняя скорость равна $240 : 5 = 48 \text{ км/ч}$, а не 50 км/ч.

Основные идеи и подходы к решению

- **Рисуйте схему:** отрезок пути, стрелки, отметки времени.
- **Скорость сближения** при движении навстречу — сумма скоростей, при движении вдогонку — разность.
- **По реке:** $v + u$ по течению, $v - u$ против течения, u — скорость плота.
- **Поезд проходит мост:** путь равен длине моста плюс длина поезда.
- **Средняя скорость = весь путь : всё время.**
- Если время одинаковое, расстояния относятся как скорости; если расстояние одинаковое, времена обратно пропорциональны скоростям.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Из двух сёл, расстояние между которыми 24 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода со скоростями 5 км/ч и 3 км/ч. Вместе с первым пешеходом выбежала собака со скоростью 12 км/ч. Добежав до второго пешехода, она повернула назад, добежала до первого, снова повернула и так бегала, пока пешеходы не встретились. Сколько километров пробежала собака?

Решение. Скорость сближения пешеходов $5 + 3 = 8$ км/ч, они встретятся через $24 : 8 = 3$ часа. Всё это время собака бежала со скоростью 12 км/ч и пробежала $12 \cdot 3 = 36$ км. Считать отдельные отрезки её пути не нужно!

Ответ: 36 км.

Опорная задача 2

Баба-Яга должна прибыть на Лысую Гору ровно в полночь. Если она полетит на ступе со скоростью 50 км/ч, то опоздает на 2 часа, а если на электровенике со скоростью 150 км/ч, то прилетит на 2 часа раньше. В котором часу она вылетела и с какой скоростью летела на метле, если прибыла точно в срок?

Решение. На электровенике скорость в 3 раза больше, значит, время полёта в 3 раза меньше. Разница во времени $2 + 2 = 4$ часа составляет $3 - 1 = 2$ «части», то есть одна часть (время на электровенике) — 2 часа, время на ступе — 6 часов. Расстояние $50 \cdot 6 = 300$ км. Ступа прилетела бы на 2 часа позже срока, значит, по плану полёт длится $6 - 2 = 4$ часа, вылет в 20:00. Скорость метлы $300 : 4 = 75$ км/ч.

Ответ: в 20 часов, со скоростью 75 км/ч.

Опорная задача 3

Катер проплыл 72 км между пристанями по течению реки за 2 часа, а против течения — за 3 часа. За сколько часов это расстояние проплывёт плот?

Решение. Скорость по течению $72 : 2 = 36$ км/ч, против течения $72 : 3 = 24$ км/ч. Разность этих скоростей равна удвоенной скорости течения: $36 - 24 = 12$, значит, скорость течения 6 км/ч. Плот плывёт со скоростью течения: $72 : 6 = 12$ часов.

Ответ: за 12 часов.

Опорная задача 4

Автомобиль проехал из города А в город Б со скоростью 60 км/ч, а обратно — со скоростью 40 км/ч. Найдите его среднюю скорость на всём пути.

Решение. Расстояние не дано, но ответ от него не зависит. Пусть расстояние 120 км (число, которое делится и на 60, и на 40). Туда автомобиль ехал $120 : 60 = 2$ часа, обратно $120 : 40 = 3$ часа. Весь путь 240 км, всё время 5 часов, средняя скорость $240 : 5 = 48$ км/ч. (Ответ 50 км/ч — типичная ошибка: медленнее машина едет дольше, поэтому скорость 40 км/ч «весит» больше.)

Ответ: 48 км/ч.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Велосипедист едет со скоростью 15 км/ч. Какое расстояние он проедет за 3 часа?
2. Два поезда одновременно отошли от одной станции в противоположных направлениях со скоростями 60 км/ч и 70 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет 260 км?
3. Две моторные лодки одновременно отправились навстречу друг другу от двух пристаней, расстояние между которыми 132 км. Скорости лодок 20 км/ч и 24 км/ч. Через сколько часов они встретятся?
4. Велосипедист и мотоциклист одновременно выехали из одного пункта в одном направлении. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, велосипедиста — 12 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 3 часа?
5. Пешеход идёт со скоростью 4 км/ч. Его догоняет велосипедист, едущий со скоростью 12 км/ч; сейчас между ними 6 км. Через сколько минут велосипедист догонит пешехода?
6. Поезд длиной 300 м проходит мимо столба за 15 секунд. Найдите скорость поезда в метрах в секунду и в километрах в час.
7. Скорость течения реки 3 км/ч. За сколько часов плот проплывёт 24 км?
8. Расстояние 120 км автомобиль проехал за 2 часа, а на обратный путь потратил 3 часа. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.
9. Черепаха ползёт со скоростью 1 м в минуту. За какое время она проползёт 1 км?
10. Колобок убегает от Лисы со скоростью 8 м/с. Между ними 30 м, Лиса бежит со скоростью 10 м/с. Через сколько секунд Лиса догонит Колобка?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Маша и Лена вышли из дома и пошли в магазин. Маша шла быстрее и дошла до магазина за 12 минут. Потратив 2 минуты на покупку, она пошла назад и встретила Лену ещё через 2 минуты. Сколько времени потребуется Лене, чтобы дойти до магазина? Скорости девочек постоянны.
12. Из пункта А в пункт Б одновременно выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист доехал до Б, сразу развернулся и поехал обратно. В этот момент велосипедист проехал 10 км. Когда велосипедист проехал ещё 2 км, он встретил мотоциклиста. Найдите расстояние между А и Б.
13. Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша посчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?
14. Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки А в точку Б, расстояние между которыми 15 м. Толстый ползёт со скоростью 3 м в минуту и уносит за раз 5 г, Тонкий — со скоростью 5 м в минуту и уносит 3 г. Кто из них быстрее доставит весь груз? (Скорость с грузом и без груза одинакова.)

15. Поезд длиной 450 м проходит мост длиной 750 м за 1 минуту. Найдите скорость поезда в км/ч.
16. Навстречу друг другу едут два поезда длиной 300 м и 200 м со скоростями 54 км/ч и 36 км/ч. Сколько секунд они будут проезжать друг мимо друга (от встречи «голов» до расставания «хвостов»)?
17. Первую половину пути автомобиль ехал со скоростью 30 км/ч, вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость.
18. Пассажир поезда, идущего со скоростью 60 км/ч, заметил, что встречный поезд, идущий со скоростью 75 км/ч, прошёл мимо его окна за 4 секунды. Какова длина встречного поезда?
19. Мотоциклист рассчитал, что если поедет со скоростью 40 км/ч, то опоздает на 1 час, а если со скоростью 60 км/ч — приедет на 1 час раньше срока. Каково расстояние?
20. Пешеход и велосипедист одновременно отправились из А в Б, расстояние 12 км. Велосипедист едет в 3 раза быстрее, чем идёт пешеход. Доехав до Б, велосипедист сразу повернул назад и встретил пешехода. Сколько километров прошёл пешеход до встречи?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Из деревни А в деревню Б и из Б в А на рассвете одновременно вышли навстречу друг другу две старушки. Они встретились в полдень, не остановились, и первая пришла в Б в 4 часа дня, а вторая пришла в А в 9 часов вечера. В котором часу был рассвет?
22. Вова с папой ехали по прямой дороге с постоянной скоростью. В 12:05 они проехали мимо километрового столба с двузначным числом $\overline{XY}$, в 12:47 — мимо столба с числом $\overline{YX}$, а в 13:05 — мимо столба с числом $\overline{X0Y}$. С какой скоростью они ехали?
23. Иван Семёнович каждый день выезжает на работу в одно и то же время, едет с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он выехал на 40 минут позже обычного, поехал со скоростью на 60 % больше обычной и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?
24. Стоя на движущемся эскалаторе, человек поднимается за 1 минуту, а по неподвижному эскалатору он поднимается пешком за 3 минуты. За какое время он поднимется, идя по движущемуся эскалатору?
25. Лодка плывёт от А до Б по течению 3 часа, а обратно — 6 часов. За сколько часов доплывёт от А до Б плот?
26. Первую половину пути автомобиль ехал со скоростью 20 км/ч. С какой скоростью ему нужно ехать вторую половину, чтобы средняя скорость на всём пути оказалась 40 км/ч?
27. Из пункта А вниз по реке отплыл плот, а одновременно из пункта Б, расположенного ниже по течению на 60 км, навстречу ему отправился катер. Они встретились через 3 часа. Найдите собственную скорость катера.
28. Если автомобиль увеличит скорость на 10 км/ч, то приедет в пункт назначения на 1 час раньше, а если уменьшит скорость на 10 км/ч — на 1,5 часа позже. Найдите расстояние и первоначальную скорость.

29. По круговой дорожке длиной 400 м из одной точки одновременно стартовали два бегуна со скоростями 5 м/с и 3 м/с. Через сколько секунд они впервые встретятся, если бегут: а) в одном направлении; б) навстречу друг другу?

30. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки круговой дорожки в противоположных направлениях. Они встретились через 2 минуты, а ещё через 3 минуты первый вернулся в точку старта. За какое время пробегает круг второй бегун?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 14. Задачи на работу и покупки

Цели занятия

- научить решать задачи на совместную работу, принимая всю работу за единицу;
- научить решать задачи на бассейны и трубы, на цену, количество и стоимость;
- познакомить с методом уравнивания.

Планируемые результаты: учащиеся умеют принимать работу за единицу, решать задачи на совместную работу.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Работа, производительность, время; Совместная работа; Задачи «на нормы»; Цена, количество, стоимость; Метод уравнивания	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Работа, производительность, время

Объём работы равен производительности, умноженной на время: $A = P \cdot t$. Если объём работы не указан, его принимают за 1 (целая работа). Тогда работник, выполняющий всю работу за 6 часов, за час выполняет $\frac{1}{6}$ работы — это его **производительность**.

Совместная работа

При совместной работе производительности **складываются**. Если первый делает работу за 4 часа, а второй — за 12 часов, то вместе за час они делают $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ работы, а всю работу — за 3 часа.

В задачах о бассейнах и трубах труба, через которую вода **вытекает**, «работает в минус»: её производительность вычитается.

Задачи «на нормы»

Если 3 землекопа за 3 часа выкапывают 3 ямы, то один землекоп за 3 часа выкапывает одну яму. Удобно сначала найти, сколько делает **один** работник за **единицу** времени, а затем пересчитать для нужного числа работников и времени.

Цена, количество, стоимость

Стоимость равна цене, умноженной на количество. Если покупка состоит из нескольких товаров, стоимости складываются.

Метод уравнивания

Если даны две покупки, например «3 тетради и 2 ручки стоят 81 рубль, а 2 тетради и 3 ручки — 84 рубля», то полезно их сложить (5 тетрадей и 5 ручек стоят 165 рублей, значит, тетрадь и ручка вместе — 33 рубля) или вычесть (ручка дороже тетради на 3 рубля). Так находят цену каждого товара без уравнений.

Основные идеи и подходы к решению

- **Всю работу принимаем за 1.**
- **Производительность** — часть работы в единицу времени: $\frac{1}{t}$.
- **При совместной работе производительности складываются**, у «сливающейся» трубы — вычитаются.
- **Сначала находим, сколько делает один работник за единицу времени.**
- **Метод уравнивания:** складываем или вычитаем покупки.
- **«Если бы все были одного вида»** — удобный приём для задач о двух видах товаров.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Через первую трубу бак наполняется за 4 минуты, через вторую — за 12 минут. За сколько минут наполнится бак через обе трубы?

Решение. За минуту первая труба наполняет $\frac{1}{4}$ бака, вторая — $\frac{1}{12}$ бака. Вместе за минуту — $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ бака. Весь бак наполнится за 3 минуты.

Ответ: за 3 минуты.

Опорная задача 2

Если открыть кран с холодной водой, ванна наполнится за 10 минут, если с горячей — за 15 минут. Если вытащить пробку, полная ванна выльется за 12 минут. За сколько минут наполнится ванна, если открыть оба крана и вытащить пробку?

Решение. За минуту холодный кран наполняет $\frac{1}{10}$ ванны, горячий — $\frac{1}{15}$, а через слив уходит $\frac{1}{12}$ ванны. Приведём к знаменателю 60: $\frac{6}{60} + \frac{4}{60} - \frac{5}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$. Значит, ванна наполнится за 12 минут.

Ответ: за 12 минут.

Опорная задача 3

Влад купил несколько шариковых и гелевых ручек. Если бы все купленные ручки были гелевыми, он заплатил бы в 4 раза больше, а если бы все были шариковыми — в 2 раза меньше. Во сколько раз гелевая ручка дороже шариковой?

Решение. Пусть всего ручек N , и Влад заплатил S рублей. Тогда N гелевых ручек стоят $4 \cdot S$, а N шариковых — $\frac{S}{2}$. Значит, N гелевых ручек дороже N шариковых в $4 \cdot S : \frac{S}{2} = 8$ раз, а одна гелевая ручка дороже одной шариковой тоже в 8 раз.

Ответ: в 8 раз.

Опорная задача 4

За 3 тетради и 2 ручки заплатили 81 рубль, а за 2 тетради и 3 ручки — 84 рубля. Сколько стоит тетрадь и сколько стоит ручка?

Решение. Сложим покупки: 5 тетрадей и 5 ручек стоят $81 + 84 = 165$ рублей, значит, одна тетрадь и одна ручка вместе стоят 33 рубля. Вычтем: вторая покупка отличается от первой тем, что в ней на одну ручку больше и на одну тетрадь меньше, и она дороже на 3 рубля. Значит, ручка дороже тетради на 3 рубля. Тетрадь стоит $(33 - 3) : 2 = 15$ рублей, ручка — 18 рублей. Проверка: $3 \cdot 15 + 2 \cdot 18 = 81$, $2 \cdot 15 + 3 \cdot 18 = 84$.

Ответ: тетрадь — 15 рублей, ручка — 18 рублей.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Мастер делает 24 детали за 3 часа. Сколько деталей он сделает за 5 часов?
2. Бак наполняется за 6 минут. Какая часть бака наполняется за 1 минуту? За 4 минуты?
3. Привезённого корма уткам хватило бы на 30 дней, а гусям — на 45 дней. На сколько дней хватит корма уткам и гусям вместе?
4. Три одинаковые тетради стоят 36 рублей. Сколько стоят 5 таких тетрадей?
5. Ручка дороже карандаша на 12 рублей, а вместе они стоят 30 рублей. Сколько стоит карандаш?
6. Три землекопа за 3 часа выкапывают 3 ямы. Сколько ям выкопают 6 землекопов за 6 часов?
7. Тетрадь дешевле ручки в 3 раза, а 3 ручки дороже 5 тетрадей на 60 копеек. Сколько стоит тетрадь и сколько ручка?
8. Пять кур за 5 дней несут 5 яиц. Сколько яиц снесут 10 кур за 10 дней?
9. Кран, из которого вытекает 30 л воды в минуту, наполнил ванну за 5 минут. Потом кран закрыли и открыли слив, через который вся вода вытекла за 6 минут. Сколько литров вытекло за первые 2 минуты?
10. Первый рабочий может выполнить задание за 2 часа, второй — за 3 часа. За какое время они выполнят задание вместе?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Бассейн наполняется через первую трубу за 3 часа, через вторую — за 6 часов, а через третью полный бассейн опорожняется за 4 часа. За сколько часов наполнится пустой бассейн, если открыть все три трубы?
12. Профессор установил, что два студента и три аспиранта за 7 дней приносят столько же пользы, сколько четыре студента и один аспирант за 5 дней. От кого больше пользы: от одного студента или от одного аспиранта?
13. Продавец закупил партию ручек по одной цене. Одни покупатели покупали одну ручку за 10 рублей, другие — 3 ручки за 20 рублей. Оказалось, что с каждой покупки продавец получал одинаковую прибыль. По какой цене продавец закупил ручки?
14. За 2 кг яблок и 3 кг груш заплатили 340 рублей, а за 3 кг яблок и 2 кг груш — 310 рублей. Сколько стоит килограмм яблок и килограмм груш?
15. Если ученик купит 9 ручек, у него останется 76 копеек, а если купит 13 ручек — ему не хватит 64 копеек. Сколько денег у ученика?
16. Мама лепит 100 пельменей за 20 минут, а папа — за 30 минут. За сколько минут они вместе слепят 100 пельменей?
17. Первый рабочий может выполнить заказ за 12 часов, второй — за 6 часов. Сначала первый работал один 3 часа, затем к нему присоединился второй. Сколько всего часов ушло на заказ?

18. Первая и вторая бригады вместе выполняют работу за 12 дней, вторая и третья — за 15 дней, первая и третья — за 20 дней. За сколько дней выполнят работу все три бригады вместе?

19. Маугли попросил пятерых обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали орехов поровну и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую другую по одному ореху. В результате Маугли получил вдвое меньше орехов, чем было собрано. Сколько орехов получил Маугли?

20. Хозяин нанял работника на 30 дней, обещая заплатить 9 рублей и кафтан. Через 3 дня работник ушёл и получил только кафтан. Сколько стоит кафтан?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Однажды Валера пошёл на дачу, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок и вместе вернулись через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга одна, если ей нужно вернуться через час после выхода? (Способности Валеры и Ольги и условия работы не меняются.)

22. Мама, папа, Вася и Нина лепили пельмени. Мама и Нина слепили на 4 пельменя больше, чем папа и Вася, а мама и папа — на 2 пельменя больше, чем Вася и Нина. Потом Вася и мама ушли, а Нина и папа продолжали лепить с той же скоростью, и каждый налепил ещё вдвое больше, чем сначала. Кто теперь налепил больше: мама и папа вместе или Вася и Нина вместе?

23. За полтора часа Пончик съел запас варенья, причём за любой промежуток времени длительностью ровно один час (внутри этих полутора часов) он съедал ровно 3 кг. Можно ли утверждать, что Пончик съедал в среднем 3 кг варенья в час?

24. Бригада должна была выполнить работу за 10 дней. Проработав 4 дня, она получила подкрепление — ещё 2 таких же рабочих, — и закончила работу через 3 дня. Сколько рабочих было в бригаде вначале?

25. Двое рабочих, работая вместе, выполнили работу за 12 дней. Если бы первый сделал половину работы, а затем второй — оставшуюся половину, на всё ушло бы 25 дней. За сколько дней каждый рабочий выполнит всю работу один?

26. Бельчонок в день съедает либо 9 ягод, либо 2 ореха, либо 1 орех и 4 ягоды, либо только грибы. За 10 дней он съел 30 ягод и 9 орехов. Сколько из этих дней он ел только грибы?

27. Две свечи одинаковой длины зажгли одновременно. Первая сгорает за 4 часа, вторая — за 5 часов. Через сколько времени вторая свеча станет в 4 раза длиннее первой?

28. Четыре девочки пели песни, аккомпанируя друг другу: каждый раз одна играет на фортепиано, а три поют. Аня спела 8 песен, Таня — 6, Оля — 3, Катя — 7. Сколько раз аккомпанировала Таня?

29. Петя читает по 20 страниц в день. Если бы он читал по 30 страниц в день, то прочитал бы книгу на 3 дня быстрее. Сколько страниц в книге?

30. Четверо бельчат запасали орехи: каждый день один из них собирал грибы, а трое других — орехи. Через несколько дней оказалось, что первый бельчонок собирал орехи больше всех — 8 раз, а второй — меньше всех, 5 раз. Сколько прошло дней? Составьте возможный график работы.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 15. Части, отношения и проценты

Цели занятия

- научить решать задачи на части и отношения величин;
- повторить понятие процента и три основные задачи на проценты;
- познакомить с задачами на смеси, сплавы и сушку, в которых сохраняется масса «сухого вещества».

Планируемые результаты: учащиеся умеют решать задачи на части и проценты.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Задачи на части; Проценты; Увеличение и уменьшение на проценты; Смеси, сплавы, сушка	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Задачи на части

Если величины относятся как 2:3, то удобно считать, что первая состоит из 2 равных частей, а вторая — из 3 таких же частей. Тогда вместе — 5 частей, разность — 1 часть. Узнав, сколько приходится на одну часть, находим все величины.

Пример: сплав состоит из олова и свинца в отношении 5:2; в куске массой 210 г всего 7 частей, одна часть — $210:7 = 30$ г, свинца $2 \cdot 30 = 60$ г.

Проценты

Процент — это одна сотая часть: $1\% = \frac{1}{100}$. Значит, 50% — это половина, 25% — четверть, 10% — десятая часть, 20% — пятая часть.

Три основные задачи:

1. **Найти процент от числа:** 15% от 80 — это $80:100 \cdot 15 = 12$.
2. **Найти число по его проценту:** если 30% числа равны 24, то число равно $24:30 \cdot 100 = 80$.
3. **Найти, сколько процентов одно число составляет от другого:** 9 от 36 — это $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Увеличение и уменьшение на проценты

Увеличить число на 10% — значит умножить его на 1,1 (получить 110%); уменьшить на 10% — умножить на 0,9. Если цену сначала увеличили на 10%, а потом уменьшили на 10%, то она стала $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$ от исходной — уменьшилась на 1%. Проценты во втором действии считаются от **нового** значения!

Смеси, сплавы, сушка

В задачах о смесях и сушке удобно следить за веществом, масса которого **не меняется**. При сушке испаряется только вода, а масса «сухого вещества» остаётся прежней. При смешивании растворов масса чистого вещества (кислоты, соли) складывается, а при добавлении воды — не меняется.

Пример: свежие грибы содержат 90% воды, сушёные — 12%. Сухого вещества в 22 кг свежих грибов 10%, то есть 2,2 кг. В сушёных грибах это 88% массы, поэтому сушёных грибов получится $2,2:88 \cdot 100 = 2,5$ кг.

Основные идеи и подходы к решению

- **Отношение $a:b$** — это a частей и b частей; ищем одну часть.
- **Процент — сотая часть.** 50% — половина, 25% — четверть, 20% — пятая часть.
- **Последовательные изменения в процентах** считаем от нового значения: умножаем на 1,1, 0,9 и т. п.

- В смесях и сушке ищем неизменную величину: сухое вещество, чистую кислоту, соль.
- Рисуите отрезки или «столбики» частей — это делает задачу наглядной.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Для приготовления крема берут одну часть сливочного масла и две части сахара. Сколько масла и сколько сахара нужно, чтобы приготовить 1,5 кг крема?

Решение. В креме $1 + 2 = 3$ части, одна часть — $1,5 : 3 = 0,5$ кг. Масла $0,5$ кг, сахара $2 \cdot 0,5 = 1$ кг.

Ответ: 0,5 кг масла и 1 кг сахара.

Опорная задача 2

Жучка тяжелее кошки в 3 раза, мышка легче кошки в 10 раз, репка тяжелее мышки в 60 раз. Во сколько раз репка тяжелее Жучки?

Решение. Примем массу мышки за одну часть. Тогда кошка весит 10 частей, Жучка — $3 \cdot 10 = 30$ частей, репка — 60 частей. Репка тяжелее Жучки в $60 : 30 = 2$ раза.

Ответ: в 2 раза.

Опорная задача 3

Свежие грибы содержат 90% воды, а сушёные — 12%. Сколько сушёных грибов получится из 22 кг свежих?

Решение. При сушке испаряется только вода. В свежих грибах сухого вещества $100\% - 90\% = 10\%$, то есть $22 : 10 = 2,2$ кг. В сушёных грибах эти 2,2 кг составляют $100\% - 12\% = 88\%$ массы. Значит, сушёных грибов $2,2 : 88 \cdot 100 = 2,5$ кг.

Ответ: 2,5 кг.

Опорная задача 4

Цену товара сначала повысили на 10%, а затем понизили на 10%. Изменилась ли цена по сравнению с первоначальной?

Решение. Пусть цена была 100 рублей. После повышения на 10% она стала 110 рублей. Понижение на 10% считается уже от 110 рублей: 10% от 110 — это 11 рублей, новая цена $110 - 11 = 99$ рублей. Цена уменьшилась на 1 рубль, то есть на 1%.

Ответ: цена уменьшилась на 1%.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Найдите 15% от 80.
2. 30% числа равны 24. Найдите это число.
3. Сколько процентов составляет 9 от 36?

4. Сплав состоит из олова и свинца, на 5 частей олова приходится 2 части свинца. Сколько граммов свинца в куске сплава массой 210 г?
5. Мальчиков и девочек в классе в отношении 4: 5, всего 36 учеников. Сколько в классе мальчиков?
6. Для начинки берут 3 части черники и 2 части сахара. Сколько черники и сколько сахара нужно для 1,25 кг начинки?
7. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% всех страниц книги. Сколько страниц в книге?
8. Цену 200 рублей снизили на 15%. Какой стала цена?
9. В классе 25 учеников, 60% из них — девочки. Сколько в классе девочек?
10. Волк, Ёж, Чиж и Бобёр делили апельсин. Ежу досталось вдвое больше долек, чем Чижу, Чижу — впятеро меньше, чем Бобру, а Бобру — на 8 долек больше, чем Чижу. Сколько долек было в апельсине, если Волку досталась только кожура?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. У Пети есть 10 конфет и ещё половина того количества конфет, которые есть у Миши. У Миши 15 конфет и ещё 75% того количества, которое есть у Пети. Сколько конфет у мальчиков вместе?
12. У Маши 4 красных, 3 синих и 5 жёлтых кусков пластилина. Сначала она разделила пополам каждый не красный кусок, а затем разделила пополам каждый не жёлтый кусок. Сколько кусков пластилина у неё получилось?
13. Огурцы содержат 96% воды. Сколько килограммов останется от 25 кг огурцов, если представить, что вся вода испарилась?
14. Малина при сушке теряет 75% своей массы. Сколько нужно свежей малины, чтобы получить 6 кг сушёной?
15. Гномик в начале года был ростом 50 см. За этот год он подрос на 50%, а за следующий — на 40%. В каком году он подрос больше? На сколько процентов он подрос за два года?
16. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать батон по красным кольцам, получится 5 кусков, по жёлтым — 7 кусков, по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?
17. В делегации каждый знал английский или немецкий язык, а некоторые — оба. Четверть знающих английский знала и немецкий, а шестая часть знающих немецкий знала и английский. Кого в делегации больше: знающих английский или знающих немецкий?
18. Кофейный напиток содержит 50% сои, 30% ячменя, 12% желудей и 8% семян шиповника. Сколько граммов каждого компонента в 800 г напитка?
19. Цену товара повысили на 20%, а затем понизили на 20%. Стала ли цена прежней?
20. Маша смешала 50 г раствора кислоты с концентрацией 90% и 100 г раствора с концентрацией 95%, а затем добавила воды. Получился раствор с концентрацией 5%. Сколько граммов воды она добавила?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Свежие яблоки содержат 90% воды, а сушёные — 12%. Лена считает, что если в компоте больше 95% воды, то он невкусный. Какое наибольшее количество вкусного компота она может сварить из 4 кг свежих и 1 кг сушёных яблок и воды? (Испарением при варке пренебречь.)
22. На первом занятии кружка 4 ученика сказали, что не знают ни одного языка программирования, а остальные знают *Python*, или *Java*, или оба языка. Среди знающих хотя бы один язык знающие *Python* составили 60%, причём шестая часть знающих *Python* знает и *Java*. Знающие *Java* составили $\frac{5}{12}$ всех участников кружка. Сколько всего участников кружка?
23. Арбуз массой 20 кг содержал 99% воды. Когда он немного усох, содержание воды стало 98%. Сколько теперь весит арбуз?
24. Цену товара повысили на 25%. На сколько процентов нужно понизить новую цену, чтобы получить первоначальную?
25. Ширину прямоугольника увеличили на 20%, а длину уменьшили на 20%. Как изменилась площадь?
26. В двух классах 60 учеников. В первом классе отличники составляют 20%, во втором — 30%, а всего отличников 15. Сколько учеников в каждом классе?
27. Смешали 3 кг раствора соли с концентрацией 20% и 2 кг раствора с концентрацией 30%. Какова концентрация получившегося раствора? Сколько килограммов воды нужно добавить, чтобы концентрация стала 15%?
28. Один сплав содержит 10% меди, другой — 40%. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 12 кг сплава, содержащего 20% меди?
29. Петя потратил 40% своих денег, а затем — половину остатка. После этого у него осталось 120 рублей. Сколько денег было у Пети вначале?
30. Число 2025 увеличили на несколько процентов, а результат уменьшили на столько же процентов и получили 1944. На сколько процентов увеличивали число?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 16. Возраст, часы, календарь

Цели занятия

- научить решать задачи на возраст, опираясь на неизменность разности возрастов;
- научить находить угол между стрелками часов и моменты совпадения стрелок;
- повторить устройство календаря, научить определять дни недели.

Планируемые результаты: учащиеся умеют решать задачи на возраст, время и календарь.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Задачи на возраст; Часы со стрелками; Календарь	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Задачи на возраст

Главное наблюдение: **разность возрастов двух людей не меняется** со временем. Через n лет каждый станет старше на n лет, а сумма возрастов k человек увеличится на $k \cdot n$.

Пример: отцу 40 лет, сыну 10. Разность 30 лет. Когда отец будет втрое старше сына, разность 30 лет составит $3 - 1 = 2$ «сыновних возраста», то есть сыну будет 15 лет. Это произойдёт через 5 лет.

Часы со стрелками

Циферблат — это круг, 360° . Минутная стрелка проходит полный круг за 60 минут, то есть поворачивается на 6° в минуту. Часовая стрелка проходит круг за 12 часов: 30° в час, или $\frac{1}{2}$ градуса в минуту. Значит, минутная стрелка «обгоняет» часовую на $6 - \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$ градуса в минуту.

Чтобы найти угол между стрелками в момент h часов m минут, найдём положения стрелок (в градусах от отметки 12): часовая — $30 \cdot h + \frac{m}{2}$, минутная — $6 \cdot m$, и вычтем.

Стрелки совпадают в 12:00, затем — через $360:5\frac{1}{2} = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$ минуты, и так далее: за 12 часов 11 раз, за сутки — 22 раза.

Календарь

В обычном году 365 дней, в **високосном** — 366 (в феврале 29 дней). Год високосный, если его номер делится на 4; исключение — годы, делящиеся на 100, но не делящиеся на 400 (1900 — не високосный, 2000 — високосный).

Дни в месяцах: 31 день в январе, марте, мае, июле, августе, октябре, декабре; 30 — в апреле, июне, сентябре, ноябре; 28 или 29 — в феврале.

Так как $365 = 52 \cdot 7 + 1$, каждая дата следующего года приходится на следующий день недели (а если между ними 29 февраля — сдвигается на 2 дня).

Основные идеи и подходы к решению

- **Разность возрастов постоянна.**
- **«Во сколько раз старше»:** разность возрастов делим на (кратность -1) — получаем возраст младшего.
- **Минутная стрелка — 6° в минуту, часовая — $\frac{1}{2}$ градуса в минуту, скорость сближения $5\frac{1}{2}$ градуса в минуту.**
- **Стрелки совпадают каждые $65\frac{5}{11}$ минуты, 22 раза в сутки.**
- **Дни недели повторяются каждые 7 дней:** считаем остаток числа дней при делении на 7.
- **Високосный год** — делится на 4 (века — на 400).

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Петя в три раза старше Ани, а Аня на 8 лет младше Пети. Сколько лет каждому?

Решение. Если возраст Ани — одна часть, то возраст Пети — три части, а разность — две части. Она равна 8 годам, значит, одна часть — 4 года. Ане 4 года, Пете 12 лет. Проверка: $12 = 3 \cdot 4$, $12 - 4 = 8$.

Ответ: Ане 4 года, Пете 12 лет.

Опорная задача 2

Деду 56 лет, а внуку 14. Через сколько лет дед будет вдвое старше внука?

Решение. Разность возрастов $56 - 14 = 42$ года не меняется. Когда дед будет вдвое старше, разность будет равна возрасту внука. Значит, внуку будет 42 года, а это случится через $42 - 14 = 28$ лет. Проверка: деду будет $56 + 28 = 84 = 2 \cdot 42$.

Ответ: через 28 лет.

Опорная задача 3

Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 3 часа 20 минут?

Решение. Минутная стрелка за 20 минут повернулась от отметки 12 на $20 \cdot 6 = 120^\circ$. Часовая стрелка в 3:00 стояла на $3 \cdot 30 = 90^\circ$, а за 20 минут сдвинулась ещё на $20 \cdot \frac{1}{2} = 10^\circ$, то есть она на 100° . Угол между стрелками $120 - 100 = 20^\circ$.

Ответ: 20° .

Опорная задача 4

Часы показывают ровно 12:00. Через сколько минут часовая и минутная стрелки снова совпадут?

Решение. Минутная стрелка движется со скоростью 6° в минуту, часовая — $\frac{1}{2}$ градуса в минуту. Минутная должна обогнать часовую на целый круг, 360° , сближаясь со скоростью $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ градуса в минуту. Время $360 : \frac{11}{2} = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$ минуты, то есть стрелки совпадут примерно в 1 час 5 минут 27 секунд.

Ответ: через $65\frac{5}{11}$ минуты.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Маме 30 лет, дочке 6. Сколько лет было маме, когда родилась дочь? Через сколько лет мама будет втрое старше дочки?
2. Отцу 40 лет, сыну 10. Через сколько лет отец будет в 3 раза старше сына?
3. Сумма возрастов трёх детей 15 лет. Чему будет равна сумма их возрастов через 3 года?
4. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 3:00, 6:00, 9:00?
5. Какой угол образуют стрелки ровно в 4 часа?
6. Какие из годов 1900, 2000, 2024, 2025 високосные?
7. 1 сентября — понедельник. Каким днём недели будет 1 октября?

8. Часы, отражённые в зеркале, показывают 9:00. Сколько времени на самом деле?
9. Часы отстают на 6 минут в сутки. Через сколько дней они снова покажут верное время? (Часы двенадцатичасовые.)
10. На какой угол поворачивается минутная стрелка за 1 минуту? Часовая — за 1 час? Часовая — за 1 минуту?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Аня и Таня — сёстры, им вместе 28 лет. Сейчас Ане вдвое больше лет, чем было Тане тогда, когда Ане было столько лет, сколько Тане сейчас. Сколько лет старшей сестре?
12. Дед, отец и сын на вопрос о возрасте ответили так. Дед: «Нам троим 121 год». Отец: «Мне и сыну вместе 44 года, а сын на 28 лет моложе меня». Сколько лет каждому?
13. Матери было 25 лет, когда родился сын, и 28 лет, когда родилась дочь. Сейчас им всем вместе 46 лет. Сколько лет каждому?
14. Внучке столько месяцев, сколько лет деду. Вместе им 91 год. Сколько лет деду и сколько внучке?
15. Ваня втрое моложе папы, но втрое старше сестры Ани. Папа старше Ани на 40 лет. Сколько лет Ване?
16. Папа работает по графику «2 через 2» (2 дня работает, 2 дня отдыхает), мама — «1 через 2» (1 день работает, 2 отдыхает), а дети учатся с понедельника по пятницу. В субботу 2 сентября мама ездила к бабушке (у неё был выходной), а в воскресенье 3 сентября вся семья была дома. Когда у всей семьи снова будет общий выходной?
17. Часы показывают 12:00. Через сколько минут стрелки впервые образуют прямой угол?
18. В 3 часа дня стрелки образуют прямой угол. Когда стрелки впервые после этого совпадут?
19. Сколько раз за сутки совпадают часовая и минутная стрелки?
20. 1 января 2001 года был понедельник. Каким днём недели было 1 января 2000 года?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Назовём дату «палиндромом», если её запись в формате ДД.ММ.ГГГГ читается одинаково слева направо и справа налево (точки не учитываются). Например, 22.02.2022 — палиндром. Когда наступит следующая после неё дата-палиндром?
22. Часы показывают полдень. Через сколько минут прямая, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелками, впервые пройдёт через отметку циферблата, соответствующую 43 минутам?
23. Гагара вылетела из Уэлена (Чукотка) 1 июля ровно в 3 часа утра по местному времени и прилетела в Уэйлс (Аляска) 30 июня ровно в 10 часов утра по местному времени. Обратно она вылетела 1 июля в 3 часа дня по местному времени и прилетела в Уэлен 2 июля в 4 часа дня по местному времени. Сколько длился полёт в одну сторону, если в обе стороны гагара летела одинаково?

- 24.** Я сейчас вдвое старше, чем был ты тогда, когда я был таким, как ты сейчас. Когда ты станешь таким, как я сейчас, нам вместе будет 63 года. Сколько лет каждому из нас?
- 25.** Часы бьют каждый час столько раз, сколько часов показывают (от 1 до 12), а кроме того, один раз каждые полчаса. Сколько ударов они сделают за сутки?
- 26.** 1 января 2025 года — среда. В каком году впервые после 2025 года календарь полностью повторит календарь 2025 года (все даты придутся на те же дни недели)?
- 27.** Сколько раз за сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?
- 28.** Какой угол образуют стрелки в 7 часов 38 минут?
- 29.** В семье Ивановых нет близнецов. Каждый из детей сказал: «У меня есть старший брат». Оказалось, что правду сказали ровно шестеро. Сколько детей может быть в семье, если мальчиков на 4 больше, чем девочек?
- 30.** Когда отцу был 31 год, сыну было 8 лет. Сейчас отец вдвое старше сына. Сколько лет сыну сейчас?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 17. Решение задач с конца. Метод предположения

Цели занятия

- научить решать задачи «с конца», заменяя действия обратными;
- закрепить метод предположения для задач о двух видах предметов;
- научить сравнивать и складывать условия задачи (метод уравнивания).

Планируемые результаты: учащиеся умеют выбирать удобный арифметический метод.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Решение с конца; Метод предположения; Сложение и сравнение условий; Задачи на «если бы...»	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Решение с конца

Если в задаче описана цепочка действий и известен **результат**, а найти нужно **начальное** значение, удобно идти от конца к началу. Каждое действие заменяем обратным: сложение — вычитанием, умножение — делением и наоборот.

Пример: «Задумали число, прибавили 5, умножили на 2 и получили 24». С конца: $24 : 2 = 12$, $12 - 5 = 7$. Задумано число 7.

Особенно удобен этот способ в задачах вида «отдал половину и ещё половинку»: если после этого осталось x , то до этого было $\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 2 \cdot x + 1$.

Метод предположения

В задачах о двух видах предметов (куры и кролики, двух- и четырёхместные лодки, монеты двух достоинств) предполагают, что все предметы одного вида, вычисляют, что получилось бы, и сравнивают с условием. Разница показывает, сколько предметов на самом деле другого вида.

Пример: у кур и овец 36 голов и 100 ног. Если бы все были курами, ног было бы 72. Лишние $100 - 72 = 28$ ног дают овцы, у каждой на 2 ноги больше, чем у курицы: овец $28 : 2 = 14$, кур 22.

Сложение и сравнение условий

Если известны суммы попарно (например, «Маша и Лена вместе получили 23 пятёрки, Света и Маша — 18, Света и Лена — 15»), полезно сложить все условия: каждая девочка посчитана дважды, сумма $23 + 18 + 15 = 56$ — удвоенное общее число пятёрок. Далее каждое число находится вычитанием.

Если два условия отличаются одним изменением, их разность показывает результат этого изменения. Это **метод уравнивания**.

Задачи на «если бы...»

Фразы «если бы он отдал...», «если бы переложили...» описывают воображаемую ситуацию. Нужно чётко записать, что было бы после воображаемого действия, и связать это с исходными данными. Часто помогает то, что общая сумма при перекладывании не меняется.

Основные идеи и подходы к решению

- **Известен результат — идём с конца**, заменяя действия обратными.
- **«Половина и ещё половинка» с конца**: было $2 \cdot x + 1$, если осталось x .
- **Метод предположения**: «пусть все одного вида», затем исправляем разницу.
- **Складываем попарные суммы** — получаем удвоенную общую сумму.
- **Вычитаем похожие условия** — находим влияние одного изменения.
- **При перекладывании общая сумма не меняется**.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Колхозница принесла на базар яблоки. Первому покупателю она продала половину яблок и ещё пол-яблока, второму — половину остатка и ещё пол-яблока, и так далее; шестому

покупателю она тоже продала половину оставшихся яблок и ещё пол-яблока, и после этого яблок не осталось. Сколько яблок она принесла?

Решение. Идём с конца. Если после покупателя осталось x яблок, то до него было $2 \cdot x + 1$ (половина и ещё половинка — это $x + 1$, а $x + (x + 1) = 2 \cdot x + 1$). После шестого покупателя осталось 0, до него было 1; до пятого — 3; до четвёртого — 7; до третьего — 15; до второго — 31; до первого — 63.

Ответ: 63 яблока.

Опорная задача 2

У кур и овец вместе 36 голов и 100 ног. Сколько овец?

Решение. Предположим, что все 36 животных — куры. Тогда ног было бы $36 \cdot 2 = 72$. На самом деле ног на $100 - 72 = 28$ больше. Если заменить курицу овцой, число ног увеличится на 2. Значит, овец $28 : 2 = 14$. Проверка: $14 \cdot 4 + 22 \cdot 2 = 56 + 44 = 100$.

Ответ: 14 овец.

Опорная задача 3

Бельчонок набрал поровну сосновых, еловых и кедровых шишек. Потом выкинул несколько еловых шишек и добавил столько же кедровых. Теперь еловых и сосновых шишек вместе 12, а сосновых и кедровых — 28. Сколько кедровых шишек он добавил?

Решение. Пусть шишек каждого вида было по n , а выкинул и добавил по k штук. Тогда еловых стало $n - k$, кедровых $n + k$. Сравним: «сосновые + кедровые» и «сосновые + еловые» отличаются на $(n + k) - (n - k) = 2 \cdot k$. По условию разница $28 - 12 = 16$, значит, $k = 8$.

Ответ: 8 шишек.

Опорная задача 4

Старший брат сказал младшему: «Дай мне 8 копеек, тогда у меня будет вдвое больше денег, чем у тебя». Младший ответил: «Лучше ты дай мне 8 копеек, тогда у нас будет поровну». Сколько денег у каждого?

Решение. Если старший отдаст 8 копеек и денег станет поровну, то у старшего на 16 копеек больше. Если же младший отдаст 8 копеек старшему, разница станет $16 + 16 = 32$ копейки, и при этом у старшего вдвое больше. Значит, у младшего тогда 32 копейки, у старшего 64. До передачи у младшего было $32 + 8 = 40$, у старшего $64 - 8 = 56$ копеек. Проверка: $56 - 8 = 48 = 40 + 8$.

Ответ: 56 и 40 копеек.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Задумали число, прибавили к нему 5, результат умножили на 2 и получили 24. Какое число задумали?
2. Задумали число, умножили его на 3, вычли 7 и получили 20. Какое число задумали?

3. На крыше сидели голуби. Прилетели ещё 15 голубей, а затем улетели 18, и на крыше осталось 16 голубей. Сколько голубей сидело вначале?
4. Кот в сапогах поймал четырёх щук и ещё половину улова. Сколько щук он поймал?
5. Торговка рассуждала: «Если к моим яблокам прибавить половину их да ещё десяток, то будет целая сотня». Сколько у неё яблок?
6. У кур и овец вместе 19 голов и 46 ног. Сколько кур и сколько овец?
7. В клетке сидят фазаны и кролики. Всего у них 35 голов и 94 ноги. Сколько фазанов и сколько кроликов?
8. Ведро, полное воды, весит 10 кг, а наполненное наполовину — 6 кг. Сколько весит пустое ведро?
9. Встретились два пастуха, Иван и Пётр. Иван сказал: «Отдай мне одну овцу — тогда у меня будет вдвое больше овец, чем у тебя». Пётр ответил: «Лучше ты отдай мне одну овцу — тогда у нас будет поровну». Сколько овец у каждого?
10. Брат и сестра получили вместе 90 рублей. Если сестра отдаст брату 10 рублей, брат станет вдвое богаче сестры. Сколько денег у каждого?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Крестьянка продала первому покупателю половину яиц и ещё пол-яйца, второму — половину остатка и ещё пол-яйца, третьему — половину нового остатка и ещё пол-яйца. После этого у неё осталось 10 яиц. Сколько яиц у неё было?
12. В первый день Петя потратил половину своих денег и ещё 20 рублей, во второй — половину остатка и ещё 20 рублей. У него осталось 30 рублей. Сколько денег было у Пети?
13. В наборе было поровну карандашей, ручек и фломастеров. Денис убрал несколько карандашей и добавил столько же фломастеров. Теперь ручек и карандашей вместе 15, а ручек и фломастеров — 21. Сколько карандашей убрал Денис?
14. Мощность генератора «Алдан» на 100 кВт меньше суммарной мощности генераторов «Бия» и «Витим», а мощность «Бии» на 120 кВт меньше суммарной мощности «Алдана» и «Витима». Чему равна мощность генератора «Витим»?
15. Маша и Лена вместе получили 23 пятёрки, Света и Маша — 18, Света и Лена — 15. Сколько пятёрок получила каждая?
16. Вася и Петя должны найти одинаковое количество плоских камешков. Когда Вася принёс 120 камешков, а Петя — 147, Васе осталось найти вчетверо больше камешков, чем Пете. Сколько камешков должен был найти каждый?
17. Купили 20 тетрадей по 12 рублей и по 18 рублей и заплатили 300 рублей. Сколько купили тетрадей каждого вида?
18. Надя испекла пирожки с малиной, черникой и клубникой. С малиной — половина всех пирожков, с черникой — на 14 меньше, чем с малиной, а с клубникой — вдвое меньше, чем с малиной и черникой вместе. Сколько пирожков каждого вида испекла Надя?

19. Камни разложены в 5 кучек. В пятой кучке камней в 6 раз больше, чем в третьей; во второй — вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе; в первой — втрое меньше, чем в пятой, и на 10 меньше, чем в четвёртой; в четвёртой — вдвое меньше, чем во второй. Сколько всего камней?

20. Мальчик читал книгу 5 дней, каждый день на 5 страниц больше, чем накануне. Всего он прочитал 150 страниц. Сколько страниц он прочитал в первый день?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Книги упаковали в 3 сумки. Потом из первой сумки переложили одну книгу во вторую, из второй — одну книгу в третью, из третьей — одну книгу в первую. После этого средний вес книги в первой сумке уменьшился на 60 г, во второй — уменьшился на 20 г, а в третьей — увеличился на 100 г. В первой и второй сумках по 10 книг. Сколько книг в третьей сумке?

22. Бельчонок в день съедает либо 8 ягод, либо 1 орех, либо 2 ореха и 5 ягод, либо только грибы. За 12 дней он съел 31 ягоду и 10 орехов. Сколько из этих дней он ел только грибы?

23. На каждой вышке есть несколько площадок. Каждые две соседние по высоте площадки соединены лесенкой, ещё одна лесенка ведёт с верхней площадки на верхушку вышки и ещё одна — с нижней площадки на землю. Всего на вышках города 2021 площадка и 2102 лесенки. Сколько в городе вышек?

24. Вагоны поезда должны быть пронумерованы подряд, начиная с единицы, но в спешке два соседних вагона получили одинаковые номера (далее нумерация продолжилась подряд). Сумма номеров всех вагонов оказалась равной 111. Сколько вагонов в поезде и какой номер использован дважды?

25. Вася записал на доске три различных натуральных числа. Если увеличить наибольшее из них на 1, произведение всех трёх станет 84, а если увеличить наименьшее на 1 — то 96. Чему будет равно произведение, если увеличить на 1 среднее число?

26. Ване подарили три набора конфет: в них леденцы, шоколадные и мармеладные конфеты. Всего леденцов во всех наборах столько же, сколько шоколадных, и столько же, сколько мармеладных. В первом наборе шоколадных и мармеладных поровну, а леденцов на 7 больше. Во втором наборе леденцов и шоколадных поровну, а мармеладных на 15 меньше. Сколько конфет в третьем наборе, если леденцов в нём нет?

27. Среднее арифметическое чисел a и b на 5 больше среднего арифметического чисел a , b , c , а среднее арифметическое чисел a и c на 8 меньше среднего арифметического всех трёх чисел. На сколько среднее арифметическое чисел b и c отличается от среднего арифметического всех трёх чисел?

28. Вася записал три различных натуральных числа. Если увеличить наибольшее на 1, произведение станет 72, а если увеличить наименьшее на 1 — то 80. Чему будет равно произведение, если увеличить на 1 среднее число?

29. На контрольной 20 задач. За верно решённую задачу ставят 5 очков, за неверную снимают 3 очка. Петя ответил на все задачи и набрал 60 очков. Сколько задач он решил верно?

30. Школьников, записавшихся в кружок, распределили на 6 групп так, что численности любых двух групп отличаются не больше чем на 1. Оказалось, что ровно в четырёх группах по 13 человек. Сколько могло быть школьников? Укажите все варианты.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 18. Суммы, средние и оценки

Цели занятия

- научить работать со средним арифметическим и суммами в текстовых задачах;
- научить использовать оценки (неравенства) для нахождения неизвестных;
- показать приём «если среднее равно m , то найдётся число не меньше m ».

Планируемые результаты: учащиеся умеют использовать суммирование условий и оценки.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Среднее арифметическое; Свойства среднего; Оценки; Суммы по условиям	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое нескольких чисел — это их сумма, делённая на их количество. Главное: **сумма = среднее · количество**. Поэтому в задачах о средних удобно переходить к суммам.

Пример: средний возраст 11 футболистов 22 года (сумма возрастов 242). Когда одного удалили, средний возраст десяти стал 21 год (сумма 210). Удалённому $242 - 210 = 32$ года.

Свойства среднего

- Среднее не меньше наименьшего числа и не больше наибольшего.
- Если среднее равно m , то хотя бы одно число не меньше m и хотя бы одно не больше m .
- Если к набору добавить число, большее среднего, среднее увеличится; меньшее — уменьшится.

Оценки

Многие задачи решаются с помощью оценок: «таких предметов не больше...», «сумма не меньше...». Полезные факты:

- сумма n различных натуральных чисел не меньше $1 + 2 + \dots + n$;
- если «среди любых 11 фруктов есть яблоко», то груш не больше 10;
- если каждый из k предметов весит не меньше a , то вместе они весят не меньше $k \cdot a$.

Когда оценки «сверху» и «снизу» совпадают, мы находим точный ответ.

Суммы по условиям

Если известны суммы нескольких групп, их удобно сложить или вычесть (как на прошлом занятии). Если известны **все** попарные суммы четырёх чисел, их общая сумма равна утроенной сумме чисел (каждое число входит в три пары).

Основные идеи и подходы к решению

- **Сумма = среднее · количество** — переходите от средних к суммам.
- **Есть число не меньше среднего и число не больше среднего.**
- **Сумма n различных натуральных чисел $\geq 1 + 2 + \dots + n$.**
- **«Среди любых k есть...»** означает, что предметов другого вида не больше $k - 1$.
- **Оценка сверху + оценка снизу = точный ответ.**
- **Складывайте все условия-суммы:** каждое число входит в несколько сумм одинаковое число раз.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

В тарелке 28 яблок и груш. Среди любых 11 фруктов есть хотя бы одно яблоко, а среди любых 19 фруктов — хотя бы одна груша. Сколько в тарелке яблок и сколько груш?

Решение. Если бы груш было 11 или больше, можно было бы взять 11 груш, среди которых нет яблока. Значит, груш не больше 10. Аналогично яблок не больше 18. Всего фруктов 28, а $10 + 18 = 28$, поэтому груш ровно 10, яблок ровно 18.

Ответ: 18 яблок и 10 груш.

Опорная задача 2

Кошка родила котят. Два самых лёгких котёнка весят вместе 80 г, четыре самых тяжёлых — 200 г, а все котята вместе — 500 г. Сколько котят родила кошка?

Решение. Средний вес двух самых лёгких — 40 г, поэтому более лёгкий весит не больше 40 г, а более тяжёлый из них — не меньше 40 г; все остальные котята весят не меньше 40 г. Средний вес четырёх самых тяжёлых 50 г, поэтому все остальные котята весят не больше 50 г. «Средние» котята весят вместе $500 - 80 - 200 = 220$ г, каждый — от 40 до 50 г. Если их k , то $40 \cdot k \leq 220 \leq 50 \cdot k$, откуда $k = 5$. Всего котят $2 + 5 + 4 = 11$.

Ответ: 11 котят.

Опорная задача 3

Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Во время матча одного игрока удалили, и средний возраст оставшихся стал 21 год. Сколько лет удалённому игроку?

Решение. Сумма возрастов всех игроков $11 \cdot 22 = 242$ года, оставшихся — $10 \cdot 21 = 210$ лет. Удалённому $242 - 210 = 32$ года.

Ответ: 32 года.

Опорная задача 4

Сумма пяти различных натуральных чисел равна 37, причём наименьшее из них не меньше половины наибольшего. Найдите эти числа.

Решение. Пусть наименьшее число a . Остальные числа различны и больше a , поэтому сумма не меньше $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5 \cdot a + 10$, откуда $5 \cdot a + 10 \leq 37$, $a \leq 5$. С другой стороны, наибольшее число не больше $2 \cdot a$, а остальные три — различные числа, меньшие наибольшего; сумма не больше $a + 2 \cdot a + (2 \cdot a - 1) + (2 \cdot a - 2) + (2 \cdot a - 3) = 9 \cdot a - 6$, откуда $9 \cdot a - 6 \geq 37$, $a \geq 5$. Значит, $a = 5$, наибольшее число не больше 10, а четыре числа от 6 до 10 дают сумму $37 - 5 = 32$. Сумма чисел от 6 до 10 равна 40, убрать нужно 8. Числа: 5, 6, 7, 9, 10.

Ответ: 5, 6, 7, 9, 10.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Средний рост трёх мальчиков 150 см. Чему равна сумма их ростов?
2. Найдите среднее арифметическое чисел 4, 7, 10 и 15.
3. Средняя оценка Пети за 4 контрольные равна 4. Какую оценку ему нужно получить за пятую контрольную, чтобы средняя оценка стала 4,2?
4. Сумма трёх последовательных натуральных чисел равна 30. Найдите эти числа.
5. У Пети и Васи вместе 20 марок, у Васи и Коли — 25, у Пети и Коли — 15. Сколько марок у каждого?
6. Средний рост пяти мальчиков 150 см. Могут ли все они быть ниже 150 см?
7. В корзине 10 яблок средней массой 200 г. В неё положили яблоко массой 310 г. Какой стала средняя масса яблок?
8. Сумма двух чисел 50, а их разность 12. Найдите эти числа.
9. Три арбуза весят вместе 15 кг. Докажите, что среди них есть арбуз, который весит не меньше 5 кг.
10. Сеня задумал два числа, вычел из большего меньшее, сложил оба числа и их разность и получил 68. Каким было большее число?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Миша, Петя, Коля и Вася сыграли 16 партий в «дурака». Каждый хотя бы раз остался «в дураках». Больше всех «в дураках» оставался Миша, а Петя и Коля вместе остались 9 раз. Сколько раз остался «в дураках» Вася?
12. На поляне кустов на 6 меньше, чем деревьев. Прилетели птицы и сели так, что на всех деревьях их поровну и на всех кустах поровну, причём на каждом дереве хотя бы на 10 птиц больше, чем на каждом кусте. На деревьях сидело 128 птиц. Сколько было кустов?
13. На сколько недель может «накладываться» год? (Год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на этот год. Неделя — с понедельника по воскресенье.)
14. Сумма десяти различных натуральных чисел равна 55. Найдите эти числа.
15. Сумма семи различных натуральных чисел равна 30. Найдите все такие наборы чисел.
16. Четыре девочки дежурили так: каждый день одна отдыхала, а три дежурили. Через несколько дней оказалось, что Марина дежурила больше всех — 7 раз, а Катя меньше всех — 4 раза. Сколько прошло дней?
17. Среднее арифметическое пяти чисел равно 10. Когда одно число убрали, среднее арифметическое оставшихся стало 9. Какое число убрали?
18. Сумма шести различных натуральных чисел равна 25. Может ли наибольшее из них быть равным 10? А 11?

19. В классе 30 учеников, средний балл за контрольную равен 4. У 10 мальчиков средний балл 3,7. Каков средний балл девочек?

20. Сумма трёх чисел равна 110. Первое число вдвое больше второго, а второе на 10 больше третьего. Найдите эти числа.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. У Петра 5 клеток с кроликами, стоящих в ряд, в каждой хотя бы один кролик. Двух кроликов назовём соседями, если они сидят в одной клетке или в соседних клетках. Оказалось, что у каждого кролика либо 3, либо 7 соседей. Сколько кроликов в центральной клетке?

22. Сумма нескольких различных натуральных чисел равна 100. Какое наибольшее количество чисел может быть?

23. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 10. Какое наибольшее значение может иметь одно из этих чисел?

24. Выписаны в ряд 2025 чисел, сумма любых трёх подряд равна 15. Первое число равно 1, последнее — 2. Найдите 1000-е число.

25. В классе 25 учеников. Средний рост мальчиков 140 см, девочек — 135 см, а всего класса — 138 см. Сколько в классе мальчиков?

26. Четыре мальчика собрали вместе 60 грибов, каждый — не меньше 10, и все — разное количество. Петя собрал больше всех. Какое наименьшее число грибов мог собрать Петя?

27. На четырёх карточках написаны числа. Сложив их всеми возможными способами по два, получили суммы 7, 8, 9, 10, 11, 12. Какие числа написаны на карточках?

28. Средний возраст шести детей 10 лет. Все возрасты — целые различные числа, младшему 7 лет. Может ли старшему быть 20 лет?

29. Даны шесть чисел, сумма любых двух из которых меньше 10. Может ли сумма всех шести чисел быть равной 30?

30. Массы десяти гирь — различные целые числа граммов, а общая масса гирь 100 г. Две самые лёгкие гири весят вместе 9 г. Какую наибольшую массу может иметь самая тяжёлая гиря?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 19. Логические задачи. Метод таблиц

Цели занятия

- научить решать логические задачи на соответствие с помощью таблиц;
- научить делать цепочки логических выводов и проверять ответ;
- рассмотреть задачи «только один сказал правду» и задачи с высказываниями из двух частей.

Планируемые результаты: учащиеся умеют составлять таблицу соответствий, делать логические выводы.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Задачи на соответствие; Задачи о порядке; «Только один сказал правду»; Высказывания из двух частей	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Задачи на соответствие

В логической задаче обычно есть несколько групп объектов (люди, профессии, цвета, города), и нужно установить, что чему соответствует. Удобно составить **таблицу**: строки — одна группа, столбцы — другая. Если из условия следует, что соответствия нет, ставим «−», если есть — «+». В каждой строке и в каждом столбце ровно один «+». Как только в строке остаётся одна свободная клетка, в неё ставим «+», а в остальных клетках её столбца — «−».

Пример. Белов, Чернов и Рыжов — брюнет, блондин и рыжий. Брюнет сказал Белову: «Ни у кого из нас цвет волос не соответствует фамилии».

	брюнет	блондин	рыжий
Белов	−	−	+
Чернов	−	+	−
Рыжов	+	−	−

Белов не блондин (по условию цвет не соответствует фамилии) и не брюнет (брюнет разговаривает с ним), значит, он рыжий. Чернов не брюнет и не рыжий — блондин. Рыжов — брюнет.

Задачи о порядке

Если сказано «А левее Б», «В старше Г», удобно рисовать отрезок и располагать на нём объекты по порядку, отмечая все известные отношения.

«Только один сказал правду»

В задачах, где известно, сколько высказываний истинны, ищут **противоречащие друг другу** высказывания: из двух противоречащих ровно одно истинно. Тогда остальные высказывания определяются однозначно. Если такой пары нет, перебирают, кто сказал правду (или кто виновен), и проверяют каждый случай.

Высказывания из двух частей

Если известно, что в каждом высказывании одна часть верна, а другая неверна, предположим, что верна первая часть одного высказывания, и посмотрим, к чему это приведёт. Если получилось противоречие — значит, верна вторая часть.

Основные идеи и подходы к решению

- **Таблица соответствий:** «+» и «−», в каждой строке и столбце ровно один «+».
- **Каждое условие даёт один или несколько «−».** Начинайте с самых «сильных» условий.
- **Порядок изображайте на отрезке.**
- **Два противоречащих высказывания:** ровно одно из них истинно.
- **Перебор случаев:** «пусть виноват А...» — и проверяем все условия.
- **Обязательно проверяйте ответ по каждому условию.**

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Бельчонок сложил одежду, еду и снаряжение в три рюкзака разного цвета и поставил их в ряд у стены. Он помнит, что синий рюкзак правее, чем еда; одежда правее, чем синий рюкзак; зелёный рюкзак левее красного. В рюкзаке какого цвета одежда?

Решение. Еда левее синего рюкзака, а одежда правее него. Значит, синий рюкзак стоит посередине, слева — рюкзак с едой, справа — с одеждой (в синем — снаряжение). Зелёный и красный рюкзаки стоят по краям, причём зелёный левее. Значит, справа красный рюкзак — в нём одежда.

Ответ: в красном.

Опорная задача 2

Три внучки — Оля, Катя и Маша, все разного возраста, — пришли к бабушке. Одна принесла торт, другая — цветы, третья — конфеты. Оля старше девочки, которая принесла цветы, а девочка, принёсшая торт, старше Оли. Маша младше Кати. Кто принёс торт?

Решение. Возраст «торт» > Оля > «цветы». Значит, Оля — средняя по возрасту, она принесла конфеты; самая старшая принесла торт, самая младшая — цветы. Маша младше Кати, значит, Катя старшая, она и принесла торт.

Ответ: Катя.

Опорная задача 3

Вася, Дима, Коля и Сергей учатся в 5, 6, 7 и 8 классах и играют в рок-группе: среди них саксофонист, клавишник, барабанщик и гитарист. Вася играет на саксофоне и учится не в 8 классе. Клавишник учится в 6 классе. Барабанщика зовут не Дима. Сергей — не клавишник и не ученик 5 класса. Дима учится не в 6 классе, а барабанщик — не в 8 классе. В каком классе учится Дима и на чём он играет?

Решение. Вася — саксофонист. Клавишник учится в 6 классе, поэтому это не Дима (он не в 6 классе) и не Сергей. Значит, клавишник — Коля, он в 6 классе. Барабанщик не Дима, значит, барабанщик — Сергей, а Дима — гитарист. Сергей не в 5 классе и (как барабанщик) не в 8 — значит, в 7. Вася не в 8 классе — значит, в 5. Диме остаётся 8 класс.

Ответ: Дима учится в 8 классе и играет на гитаре.

Опорная задача 4

Один из четверых бельчат разбил банку с мёдом. Серый заявил, что банку разбил Черныш. Черныш утверждал, что виноват Огнехвост. Рыжик сказал, что он банку не разбивал, а Огнехвост — что Черныш врёт. Только один из бельчат сказал правду. Кто сказал правду и кто разбил банку?

Решение. Высказывания Черныша и Огнехвоста противоречат друг другу (Огнехвост утверждает, что Черныш лжёт), поэтому одно из них истинно. Так как правду сказал только один, Серый и Рыжик солгали. Рыжик солгал, говоря «я не разбивал», — значит,

банку разбил Рыжик. Тогда Черныш солгал (виноват не Огnehвост), а Огnehвост сказал правду. Проверка: Серый солгал (банку разбил не Черныш) — верно.

Ответ: правду сказал Огnehвост, банку разбил Рыжик.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. У Ани, Бори и Веры есть кошка, собака и попугай (у каждого одно животное). У Ани не кошка и не попугай, у Бори не кошка. У кого какое животное?
2. Маша выше Оли, Оля ниже Кати, а Катя ниже Маши. Кто самая высокая? Кто самая низкая?
3. Иванов, Петров и Сидоров учатся в 5, 6 и 7 классах. Иванов старше Петрова, а Сидоров младше Петрова. Кто в каком классе?
4. Вова, Петя и Коля любят разные фрукты: яблоки, груши и сливы. Коля не любит груши, а Вова не любит ни груши, ни яблоки. Кто какие фрукты любит?
5. Всякий раз, когда мой брат говорит правду, наша бабушка чихает. Однажды брат сказал, что получил по математике «5», но бабушка не чихнула. Тогда он сказал, что получил «4», и бабушка чихнула. Обрадовавшись, он сказал, что получил не меньше «3», но бабушка не чихнула. Какую оценку получил брат?
6. Алина, Богдан, Вика и Гриша пришли на физкультуру в шортах и футболках синего или красного цвета. У Алины и Богдана футболки красные, а шорты разного цвета. У Вики и Гриши футболки разного цвета, а шорты синие. У девочек футболки разного цвета, и шорты тоже. Кто в какой одежде?
7. Охотник обнаружил, что ночью съели куль собачьего корма. Подозреваемые заявили: Сиропчик — «Я корм не ел»; Торопыжка — «Корм съел Пончик или Сиропчик»; Пончик — «Сиропчик корм не ел». Невинные сказали правду, а виновный (он один) солгал. Кто съел корм?
8. Три подруги — Аня, Валя и Наташа — пришли в белом, красном и синем платьях, туфли у них тех же трёх цветов. Только у Ани цвет платья и туфель совпадает. У Вали ни платье, ни туфли не белые. Наташа в красных туфлях. Определите цвет платья и туфель каждой.
9. Кто из трёх ребят — Ани, Бори, Вовы — разбил окно? Аня сказала: «Это Боря». Боря: «Это не я». Вова: «Это не я». Правду сказал только один. Кто разбил окно?
10. На трёх коробках написано «Яблоки», «Груши» и «Яблоки и груши», причём все надписи неверны. Можно вынуть один фрукт из одной коробки, не заглядывая в неё. Как узнать, что лежит в каждой коробке?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет: Таня, Юра, Света и Лена. Одна из девочек ходит в детский сад, Таня старше Юры, а сумма лет Тани и Светы делится на 3. Сколько лет каждому?

12. У Ани, Оли, Светы и Маши разные увлечения: одна рисует, другая вышивает, третья вяжет, четвёртая лепит из глины. Девочка, которая рисует, живёт в одном доме с Аней и Светой. Аня и Маша показывают друг другу свои работы, а девочка, которая лепит, никому их не показывает. Девочка, которая вяжет, живёт в другом районе, чем Света и Маша. Кто чем увлекается?

13. Бельчата Таш, Ив, Дюд и Сур — чёрный, коричневый, рыжий и серый. Чёрный бельчонок любит играть с Ивом и Ташем. У серого хвост пышнее, чем у Ива и Дюда. У рыжего хвост пышнее, чем у Ива. Сур не играет ни с Ивом, ни с рыжим. Какого цвета каждый бельчонок?

14. Возле скорлупы грецкого ореха задержали четырёх бельчат. Боря заявил, что орех съел Вася. Вася утверждал, что виноват Гриша. Гриша уверял, что Вася лжёт, а Дима твердил, что орех съел не он. Только один из них сказал правду. Кто сказал правду и кто съел орех?

15. Четыре студентки живут на 11, 12, 14 и 15 этажах (13-го этажа нет), каждая на своём. Они написали три фразы, в каждой из которых одна половина верна, а другая нет: «На 11-м этаже живёт Кира, а на 12-м — Лера»; «На 12-м этаже живёт Кира, а на 14-м — Мила»; «На 12-м этаже живёт Ника, а на 15-м — Мила». Кто на каком этаже живёт?

16. В мешке 15 шариков. Раскрасьте каждый в синий, зелёный или красный цвет так, чтобы из трёх утверждений два были верны, а одно неверно: «синих на один больше, чем красных»; «красных и зелёных поровну»; «синих на 5 больше, чем зелёных».

17. У Андрея, Лейсан и Тимура 12 больших чупа-чупсов — жёлтых, зелёных и красных. Они разложили их по четыре в три одинаковых пакета. Андрей: «Ни в одном пакете нет трёх одинаковых чупа-чупсов». Лейсан: «И трёх разноцветных тоже нет ни в одном пакете». Тимур: «И все пакеты получились разными». Все были правы. Обязательно ли в каком-то пакете лежат два жёлтых и два красных чупа-чупса?

18. В чемпионате играли «Спартак», «Динамо», «Торпедо» и «Зенит». Болельщики сделали три прогноза: «“Спартак” будет первым, а “Динамо” — вторым»; «“Спартак” будет вторым, а “Торпедо” — четвёртым»; «“Зенит” будет вторым, а “Торпедо” — третьим». В каждом прогнозе одна часть сбылась, а другая нет. Как распределились места?

19. Аня, Галя, Даша, Соня и Лена приехали в лагерь из Курска, Вологды, Новороссийска, Петрозаводска и Чебоксар. Соня и Даша никогда не были в Курске. Галя и Соня были в прошлом лагере вместе с девочкой из Новороссийска. Аня и Соня подарили сувениры девочке из Чебоксар. Галя и Соня помогли девочке из Вологды занести вещи. Галя и Лена переписываются с девочкой из Чебоксар, а девочка из Новороссийска — с Аней. Кто откуда приехал?

20. Четверо приятелей учатся в 1, 2, 3 и 4 классах. Их зовут Боря, Вася, Миша и Дима, а фамилии — Иванов, Орлов, Крылов и Петров. Известно: Боря — не первоклассник; когда Вася идёт в бассейн на улицу Южную, соседнюю с его улицей, Иванов гуляет с собакой у себя во дворе на улице Зелёной; Миша на год старше Димы; Боря и Орлов — соседи и живут на улице Северной; Крылов познакомился с Петровым ровно год назад, будучи первоклассником; Вася отдал Боре учебник, по которому сам занимался в прошлом году. Определите имя, фамилию и класс каждого.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Карина, Люда, Марина и Света учатся в 3, 4, 5 и 6 классах (каждая в своём). Карина сказала: «Света младше Марины». Люда: «Карина младше Светы». Марина: «Света старше Люды». Света: «Карина старше Марины». Если в своём высказывании девочка упомянула хотя бы одну девочку старше себя, то она соврала, иначе — сказала правду. Кто в каком классе учится?

22. После чемпионата по хоккею три журналиста написали о сборной: первый — «забила больше 10, но меньше 17 шайб», второй — «забила больше 11, но меньше 18 шайб», третий — «забила нечётное число шайб». Правы оказались ровно двое. Сколько шайб могла забить сборная? Укажите все варианты.

23. После матча Антон сказал: «Я забил 3 шайбы, а Илья — одну». Илья сказал: «Я забил 4 шайбы, а Серёжа — целых 5». Серёжа сказал: «Я забил 6 шайб, а Антон — всего две». Могли ли они втроём забить 10 шайб, если каждый один раз сказал правду, а другой раз солгал?

24. У каждой из двух сестёр в кармане от 1 до 7 конфет. Папа может задать любой из сестёр вопрос о её конфетах, на который она ответит «да» или «нет». Как ему, задав не более 4 вопросов, выяснить, верно ли, что вместе у сестёр больше 7 конфет?

25. Учитель показал трём ученикам 3 белых и 2 чёрных колпака, затем завязал им глаза и надел на каждого по колпаку, а оставшиеся спрятал. Развязав глаза, каждый видит колпаки двух других, но не свой. Учитель спросил, кто знает цвет своего колпака. Все молчали. Через некоторое время один ученик сказал: «На мне белый колпак». Как он рассуждал?

26. Встретились трое: Белов, Серов и Чернов. «Заметьте, — сказал человек в белом костюме, — у одного из нас серый костюм, у другого — чёрный, у третьего — белый, но ни у кого цвет костюма не совпадает с фамилией». «Верно», — ответил Чернов. Какого цвета костюм у каждого?

27. Пять школьников — Андрей, Борис, Виктор, Григорий и Дмитрий — заняли первые пять мест на олимпиаде. Когда их спросили о результатах, они ответили: Андрей — «Я был вторым, а Борис — третьим»; Борис — «Я был вторым, а Дмитрий — пятым»; Виктор — «Я был первым, а Андрей — пятым»; Григорий — «Я был третьим, а Виктор — четвёртым». В каждом ответе одна часть верна, другая нет. Как распределились места? (Дмитрий ничего не говорил.)

28. Пятеро друзей сидят за круглым столом. Аня сидит рядом с Борей и Верой. Галя сидит не рядом с Верой. Кто сидит рядом с Димой?

29. На столе лежат четыре карточки: на двух написаны буквы А и Б, на двух других — числа 4 и 7 (на каждой карточке с одной стороны буква, с другой — число). Какие карточки нужно перевернуть, чтобы проверить правило: «Если на одной стороне карточки гласная буква, то на другой — чётное число»?

30. Среди трёх монет одна фальшивая. Трое ребят высказались: Петя — «Фальшивая — первая или вторая»; Коля — «Первая монета настоящая»; Вася — «Третья монета настоящая». Двое сказали правду, один ошибся. Какая монета может быть фальшивой?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 20. Рыцари и лжецы

Цели занятия

- познакомить с классическими задачами о рыцарях и лжецах;
- научить анализировать высказывания методом предположения: «пусть говорящий — рыцарь...»;
- научить решать задачи о рыцарях и лжецах, стоящих в ряд и по кругу, с подсчётом количества.

Планируемые результаты: учащиеся умеют анализировать истинность высказываний.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Правила; Метод предположения; Ряд и круг; Подсчёт	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Правила

На острове живут **рыцари**, которые всегда говорят правду, и **лжецы**, которые всегда лгут. Каждое высказывание рыцаря истинно, каждое высказывание лжеца ложно.

Полезные наблюдения:

- Никто не может сказать «Я лжец»: рыцарь не может так солгать, а лжец не может сказать правду.
- На вопрос «Ты рыцарь?» любой житель ответит «да», поэтому такой вопрос ничего не выясняет.
- Если A говорит про B «Он лжец», то A и B — разного типа. Если A говорит про B «Он рыцарь», то они одного типа.
- Если житель говорит «Хотя бы один из нас двоих лжец», то он рыцарь, а его собеседник — лжец.

Метод предположения

Выбираем одного жителя и предполагаем, что он рыцарь. Тогда его слова верны — делаем выводы и проверяем, нет ли противоречия. Затем предполагаем, что он лжец (его слова ложны), и тоже проверяем. Если один из случаев ведёт к противоречию, ответ получен.

Ряд и круг

Если каждый говорит о соседе «Он лжец», то типы чередуются; по кругу это возможно только при чётном числе жителей. Если каждый говорит одно и то же утверждение о количестве рыцарей, то это утверждение либо истинно для всех, либо ложно для всех; поэтому все говорящие — одного типа (если правдивость утверждения не зависит от говорящего).

Подсчёт

В задачах «сколько рыцарей?» полезно обозначить количество рыцарей буквой и записать, что означает высказывание для рыцаря и для лжеца. Часто помогает оценка: например, если каждому рыцарю нужен сосед-лжец, а у лжеца не больше двух соседей, то рыцарей не больше, чем вдвое больше лжецов.

Основные идеи и подходы к решению

- «Я лжец» сказать никто не может.
- «Он лжец» — разные типы; «он рыцарь» — одинаковые.
- Предполагаем: «пусть он рыцарь», ищем противоречие.
- Два взаимоисключающих утверждения: ровно одно истинно — значит, ровно один из говорящих рыцарь.
- По кругу чередование возможно только при чётном числе жителей.
- Обозначьте число рыцарей буквой и запишите условие для рыцаря и для лжеца.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Встретились два жителя острова, A и B . A сказал: «Мы оба лжецы». Кто есть кто?

Решение. Если бы *A* был рыцарем, то его слова были бы правдой, и он оказался бы лжецом — противоречие. Значит, *A* — лжец, и его слова ложны: неверно, что оба лжецы. Так как *A* лжец, то *B* — рыцарь.

Ответ: *A* — лжец, *B* — рыцарь.

Опорная задача 2

За круглым столом сидят 10 жителей острова. Каждый сказал: «Мой сосед справа — лжец». Сколько за столом рыцарей?

Решение. Если житель — рыцарь, его сосед справа действительно лжец. Если житель — лжец, то его сосед справа — рыцарь. Значит, рыцари и лжецы чередуются. За столом из 10 человек их по 5. (Если бы за столом сидело нечётное число жителей, такое чередование было бы невозможно.)

Ответ: 5 рыцарей.

Опорная задача 3

В ряд стоят шесть человек, каждый — рыцарь или лжец. Первый говорит: «Справа от меня ровно пять лжецов», второй — «Слева от меня ровно один лжец», третий — «Справа от меня ровно три лжеца», четвёртый — «Слева от меня ровно три лжеца», пятый — «Справа от меня ровно один лжец», шестой — «Слева от меня ровно один лжец». Кто есть кто? (Номера считаются слева направо.)

Решение. Первый не может быть рыцарем: тогда остальные пятеро — лжецы, и пятый, сказав «справа от меня ровно один лжец», сказал бы правду. Значит, первый — лжец. Тогда слева от второго ровно один лжец, второй сказал правду — он рыцарь. Слева от четвёртого не больше двух лжецов (первый и, возможно, третий) — четвёртый лжец. Если шестой — рыцарь, то слева от него ровно один лжец, но лжецы уже первый и четвёртый — противоречие; значит, шестой — лжец. Тогда справа от пятого ровно один лжец — пятый сказал правду, он рыцарь. Справа от третьего лжецы четвёртый и шестой — два, а не три, значит, третий — лжец. Проверка: слева от шестого лжецы 1, 3, 4 — не один, шестой действительно лжёт.

Ответ: рыцари — второй и пятый, остальные — лжецы.

Опорная задача 4

На физкультуре в шеренгу встали 25 учеников. Каждый из них — либо отличник, который всегда говорит правду, либо хулиган, который всегда лжёт. Отличник Влад встал на 13-е место. Все, кроме Влада, сказали: «Между мной и Владом ровно 6 хулиганов». Сколько всего хулиганов в шеренге?

Решение. Рассмотрим учеников справа от Влада, начиная с ближайшего. У первого из них между ним и Владом никого нет — его слова ложны, он хулиган. У второго между ним и Владом один хулиган — он тоже лжёт и является хулиганом. Так продолжается: первые шесть учеников справа — хулиганы (между каждым из них и Владом от 0 до 5 хулиганов). У седьмого между ним и Владом ровно 6 хулиганов — он говорит правду, он отличник. У восьмого, девятого, ..., двенадцатого между ними и Владом по-прежнему 6 хулиганов

(добавляются только отличники) — все они отличники. Слева от Влада картина такая же. Всего хулиганов $6 + 6 = 12$.

Ответ: 12.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Может ли житель острова рыцарей и лжецов сказать: «Я лжец»?
2. Житель А сказал жителю В: «Хотя бы один из нас — лжец». Кто есть кто?
3. Встретились двое. Первый сказал: «Мы оба рыцари». Второй сказал: «Он лжец». Кто есть кто?
4. В комнате 5 жителей острова. Каждый сказал: «Все остальные здесь — лжецы». Сколько в комнате рыцарей?
5. Каждый из 12 жителей сказал: «Среди нас нет ни одного рыцаря». Могло ли так быть?
6. В кедре два дупла. Бельчонок, сидящий у второго дупла, сказал: «В другом дупле нет орехов» и «Хотя бы в одном дупле есть орехи». Рыжие бельчата всегда говорят правду, а серые всегда лгут. Какого цвета этот бельчонок?
7. Житель А сказал: «В — рыцарь». Житель В сказал: «Мы с А разного типа». Кто такие А и В?
8. Каждый из сидящих за круглым столом сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Могут ли все сидящие быть лжецами?
9. Каждый из 7 жителей сказал: «Среди нас ровно 3 рыцаря». Сколько среди них рыцарей?
10. Что ответит любой житель острова на вопрос «Ты лжец?»? Можно ли по ответу на вопрос «Ты рыцарь?» узнать, кто перед вами?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. По кругу стоят 9 жителей, каждый сказал: «Мой сосед справа — лжец». Могло ли так быть?
12. Путник стоит на развилке; одна из дорог ведёт в деревню. Рядом стоит житель острова (рыцарь или лжец — неизвестно). Какой один вопрос, требующий ответа «да» или «нет», нужно задать, чтобы узнать, ведёт ли левая дорога в деревню?
13. Встретились 5 жителей острова. Первый сказал: «Число рыцарей среди нас — простое». Второй: «Число лжецов среди нас — простое». Третий: «Число рыцарей среди нас — чётное». Четвёртый: «Число лжецов среди нас — составное». Пятый: «Вы все — лжецы». Сколько среди них рыцарей? (Напомним: 1 — не простое и не составное число, 0 — чётное число.)
14. Шесть гномов сидят за круглым столом. Ровно два гнома всегда говорят правду, и они сидят рядом. Ровно два гнома всегда лгут, и они тоже сидят рядом. Оставшиеся два гнома могут и лгать, и говорить правду, и они не сидят рядом. Искатель сокровищ обошёл стол по кругу и спросил пятерых гномов подряд, где спрятано золото. Первый сказал — в

пещере, второй — на дне озера, третий — в замке, четвёртый — в сказочном лесу, пятый — на дне озера. Где спрятано золото?

15. Житель *A* сказал: «Я лжец или *B* — рыцарь». Кто такие *A* и *B*?

16. В комнате 4 человека. Первый сказал: «Здесь ровно один лжец», второй — «Здесь ровно два лжеца», третий — «ровно три лжеца», четвёртый — «ровно четыре лжеца». Кто из них рыцарь?

17. За круглым столом сидят 10 жителей, каждый сказал: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько за столом может быть рыцарей?

18. Каждый из 7 жителей сказал: «Среди остальных жителей лжецов больше, чем рыцарей». Сколько среди них рыцарей?

19. Путник спросил троих жителей: «Сколько среди вас рыцарей?» Первый ответил: «Ни одного». Второй ответил: «Один». Кто третий?

20. Встретились трое: *A*, *B* и *C*. *A* сказал: «Мы все — лжецы». *B* сказал: «Ровно один из нас — рыцарь». Кто есть кто?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. За круглым столом сидят 12 жителей, каждый сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Какое наименьшее и какое наибольшее число рыцарей может быть за столом?

22. На острове кроме рыцарей и лжецов живут хитрецы, которые могут говорить что угодно. Встретились трое — рыцарь, лжец и хитрец. *A* сказал: «Я хитрец». *B* сказал: «*A* говорит правду». *C* сказал: «Я не хитрец». Кто есть кто?

23. На острове встретились 100 жителей. Первый сказал: «Среди нас ровно один лжец», второй — «ровно два лжеца», ..., сотый — «ровно сто лжецов». Кто из них рыцарь?

24. В ряд стоят 7 жителей. Каждый сказал: «Рядом со мной стоит лжец». Какое наибольшее число рыцарей может быть в ряду?

25. За круглым столом сидят 2025 жителей, каждый сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Какое наибольшее число лжецов может быть за столом?

26. За круглым столом сидят 10 жителей. Каждый сказал своему соседу справа: «Ты лжец», а соседу слева: «Ты рыцарь». Могло ли так быть?

27. Перед узником две двери: одна ведёт на свободу, другая — в темницу. У дверей стоят два стража: один всегда говорит правду, другой всегда лжёт, но неизвестно, кто есть кто. Узник может задать один вопрос одному из стражей. Какой вопрос задать, чтобы выбрать дверь на свободу?

28. Каждый из 8 жителей, стоящих в ряд, сказал: «Справа от меня есть хотя бы один лжец». Сколько среди них рыцарей?

29. На острове рыцарей и лжецов 25 жителей встали в круг. Каждый сказал: «Мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько среди них может быть рыцарей?

30. Каждый из 30 жителей, сидящих за круглым столом, сказал: «Среди двух моих соседей ровно один рыцарь». Сколько за столом может быть рыцарей?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 21. Оценка плюс пример

Цели занятия

- познакомить с методом решения задач на наибольшее и наименьшее значение «оценка плюс пример»;
- научить отличать оценку от примера и записывать обе части решения;
- разобрать типичные приёмы получения оценок: разбиение на части, подсчёт, «каждый покрывает не больше...».

Планируемые результаты: учащиеся умеют доказывать оптимальность ответа.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Две части решения; Как получают оценки; Как строят пример	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Две части решения

В задачах «найдите наибольшее (наименьшее) значение...» решение состоит из двух частей:

1. **Оценка** — доказательство того, что больше (меньше) быть не может. Например: «ладей, не бьющих друг друга, не больше 8, так как в каждой горизонтали не больше одной ладьи».
2. **Пример** — построение, показывающее, что это значение достигается: «8 ладей можно расставить по диагонали доски».

Без оценки непонятно, нельзя ли сделать лучше; без примера непонятно, достижимо ли значение. Типичная ошибка — привести только пример («у меня получилось 16, значит, ответ 16») или только оценку.

Как получают оценки

- **Разбиение на части.** Доску 8×8 можно разбить на 16 квадратов 2×2 . В каждом из них может стоять не больше одного короля (короли в одном квадрате 2×2 бьют друг друга), значит, королей не больше 16.
- **«Каждый покрывает не больше...».** Если каждый предмет «обслуживает» не больше k мест, а мест n , то предметов не меньше $n:k$.
- **Подсчёт суммы или площади.** Из квадрата площадью 25 клеток нельзя вырезать больше восьми фигур по 3 клетки.
- **Наихудший случай.** Чтобы «наверняка» вытащить красный карандаш из 10 красных и 10 синих, нужно рассмотреть самый неудачный вариант: сначала вытащим все 10 синих.

Как строят пример

Пример часто подсказывает сама оценка: если доказано, что в каждой из частей не больше одного предмета, то нужно поставить по предмету в каждую часть так, чтобы условие выполнялось и между частями.

Основные идеи и подходы к решению

- **Ответ = оценка + пример.** Обе части обязательны.
- **Разбейте объект на части,** в каждой из которых не больше (не меньше) одного предмета.
- **Каждый предмет покрывает не больше k мест** — значит, предметов не меньше $n:k$.
- **Подсчёт площади, суммы, количества** даёт простые оценки.
- **«Наверняка»** — рассматривайте наихудший случай.
- **Пример ищите, ориентируясь на оценку:** в каждой части оценки должно быть «впритык».

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Белоснежка вошла в комнату, где вокруг круглого стола стояло 30 стульев. На некоторых стульях сидели гномы. Оказалось, что Белоснежка не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число гномов могло быть за столом?

Решение. Оценка. Разобьём 30 стульев на 10 групп по три стула подряд. Если в какой-то группе нет гномов, Белоснежка сядет на средний стул этой группы, и рядом с ней никого не будет. Значит, в каждой группе есть хотя бы один гном, а всего гномов не меньше 10.

Пример. Посадим гномов на каждый третий стул (на 2-й, 5-й, 8-й, ..., 29-й). Тогда каждый свободный стул стоит рядом с гномом.

Ответ: 10.

Опорная задача 2

Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Оценка. Разобьём доску на 16 квадратов 2×2 . Любые две клетки квадрата 2×2 соседствуют (по стороне или по углу), поэтому в каждом квадрате не больше одного короля, а всего — не больше 16. **Пример.** Поставим королей в левые нижние клетки всех 16 квадратов (на поля с нечётными номерами горизонтали и вертикали: $a1, a3, \dots, g7$). Между любыми двумя королями хотя бы одна клетка, они не бьют друг друга.

Ответ: 16.

Опорная задача 3

Какое наименьшее число монет по 2 и 5 рублей нужно, чтобы заплатить без сдачи 27 рублей?

Решение. Оценка. Пять монет дают не больше $5 \cdot 5 = 25$ рублей, поэтому монет не меньше шести. **Пример.** $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 2 = 27$ — шесть монет.

Ответ: 6.

Опорная задача 4

Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел $1, 2, 3, \dots, 20$ так, чтобы ни одно из выбранных чисел не было вдвое больше другого выбранного?

Решение. Оценка. Разобьём числа на цепочки, в которых каждое следующее вдвое больше предыдущего: $1 - 2 - 4 - 8 - 16$; $3 - 6 - 12$; $5 - 10 - 20$; $7 - 14$; $9 - 18$; и одиночные числа 11, 13, 15, 17, 19. В цепочке из пяти чисел можно выбрать не больше трёх (соседние выбирать нельзя), в цепочках из трёх — не больше двух, из двух — не больше одного. Всего не больше $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 5 = 14$. **Пример.** 1, 4, 16, 3, 12, 5, 20, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 — 14 чисел, ни одно не вдвое больше другого.

Ответ: 14.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. В коробке 10 красных и 10 синих карандашей. Какое наименьшее число карандашей нужно взять не глядя, чтобы среди них наверняка был красный?
2. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?
3. Какое наибольшее число воскресений может быть в году?
4. Какое наименьшее число распилов нужно сделать, чтобы распилить бревно на 10 частей?
5. Какое наименьшее число детей может быть в семье, если у каждого ребёнка есть хотя бы один брат и хотя бы одна сестра?
6. Какое наименьшее число гирь нужно, чтобы на чашечных весах взвесить любой груз массой 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7 кг, если гири кладут только на одну чашу?
7. Какое наибольшее число точек пересечения могут иметь 4 прямые?
8. В ящике 5 чёрных и 5 белых носков. Сколько носков нужно достать не глядя, чтобы среди них наверняка нашлась пара одного цвета?
9. За круглым столом 12 стульев. Какое наименьшее число людей нужно посадить, чтобы следующий пришедший обязательно сел рядом с кем-нибудь?
10. Какое наименьшее натуральное число, все цифры которого различны, имеет сумму цифр 30?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Какое наибольшее число слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?
12. Какое наименьшее число клеток доски 8×8 нужно закрасить, чтобы в любом квадрате 2×2 была хотя бы одна закрашенная клетка?
13. Из чисел 1, 2, ..., 10 выбрали несколько так, что никакие два выбранных не отличаются на 1. Какое наибольшее количество чисел могли выбрать?
14. Какое наибольшее число двузначных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых двух выбранных чисел была нечётной?
15. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из набора 1, 2, ..., 10, чтобы произведение оставшихся было квадратом натурального числа?
16. В турнире 6 команд, каждая сыграла с каждой по разу. За победу дают 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Какое наибольшее число очков могла набрать команда, оказавшаяся на последнем месте (возможно, вместе с другими)?
17. Какое наименьшее число гирь с целыми массами (в граммах) нужно, чтобы на чашечных весах взвесить любой груз от 1 до 13 г, если гири можно класть на обе чаши?

18. Какое наибольшее число клеток квадрата 5×5 можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?
19. На какое наибольшее число частей можно разрезать круглый блин тремя прямолинейными разрезами?
20. Какое наименьшее число прямых нужно провести, чтобы разрезать квадрат не меньше чем на 8 частей?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из квадрата 5×5 по линиям сетки?
22. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 30, можно выбрать так, чтобы любые два выбранных числа были взаимно просты?
23. Учительница ставит «Математический балет» с участием 5 мальчиков. Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии ровно 5 м от каждой девочки стояли ровно 2 мальчика. Какое наибольшее число девочек может участвовать в балете?
24. В городе 10 проспектов и 23 улицы, образующих прямоугольную сетку; точки пересечения — перекрёстки. Отрезок улицы или проспекта между соседними перекрёстками назовём участком. Какое наибольшее число участков можно одновременно закрыть на ремонт так, чтобы из любого перекрёстка можно было проехать в любой другой?
25. Деревянный куб $3 \times 3 \times 3$ нужно распилить на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$. После каждого распила части можно перекладывать. Какое наименьшее число распилов понадобится?
26. Какое наименьшее количество учеников может быть в классе, если девочек в нём больше 40%, но меньше 50%?
27. Какое наименьшее количество чисел нужно выбрать из $1, 2, \dots, 10$, чтобы среди них наверняка нашлись два числа с суммой 11?
28. Какое наименьшее число прямых нужно провести на плоскости, чтобы они разбили её не меньше чем на 20 частей?
29. Какое наибольшее количество клеток может бить ферзь, стоящий на доске 8×8 ?
30. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может идти подряд так, чтобы ни у одного из них сумма цифр не делилась на 7?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 22. Принцип крайнего

Цели занятия

- познакомить с принципом крайнего: рассмотрением наибольшего, наименьшего, самого левого и т. п. элемента;
- научить применять принцип крайнего в доказательствах;
- связать принцип крайнего с оценками и средним арифметическим.

Планируемые результаты: учащиеся умеют применять принцип крайнего.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	В чём состоит принцип крайнего; Крайнее и среднее; Крайнее в таблицах; Крайнее в последовательностях	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

В чём состоит принцип крайнего

Во многих задачах полезно рассмотреть **крайний** объект: наибольшее или наименьшее число, самого высокого ученика, самую левую точку, самую короткую дорогу, первую по

порядку клетку. У крайнего объекта есть особые свойства, которых нет у остальных, — с них часто и начинается решение.

Пример. Дети разного роста стоят по кругу. Докажем, что не может быть так, чтобы каждый был выше своего соседа справа. Рассмотрим самого высокого ребёнка. Его сосед слева должен быть выше него — но выше него никого нет. Противоречие.

Крайнее и среднее

Наибольшее из нескольких чисел не меньше их среднего арифметического, а наименьшее — не больше. Например, если 5 чисел дают в сумме 20, то наибольшее из них не меньше 4.

Крайнее в таблицах

Если каждое число таблицы (или круга чисел) равно среднему арифметическому соседних, рассмотрим **наибольшее** число. Его соседи не больше него, а их среднее равно ему — значит, все соседи равны ему. Двигаясь от клетки к клетке, получаем, что все числа равны.

Если числа от 1 до N записаны в клетках таблицы, рассмотрим клетки с числами 1 и N и путь между ними по соседним клеткам. Разница $N - 1$ распределена по шагам пути, поэтому на каком-то шаге соседние числа отличаются не меньше чем на $(N - 1) : (\text{число шагов})$.

Крайнее в последовательностях

Если первый элемент ряда одного вида, а последний — другого, то где-то встречаются два соседних элемента разных видов: рассмотрим **первый** элемент второго вида.

Основные идеи и подходы к решению

- Рассмотрите **наибольший или наименьший элемент** — у него особые свойства.
- **Наибольшее $\geq$ среднего, наименьшее $\leq$ среднего.**
- **Самый высокий, самый левый, самый первый** — частые «крайние» объекты.
- **Наибольшее число, равное среднему соседей, «заражает» соседей.**
- **Путь от наименьшего к наибольшему** даёт оценку разности соседних чисел.
- **Принцип крайнего часто сочетается с доказательством от противного.**

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

В классе 31 ученик. У трёх из них ровно по три друга в классе, у следующих трёх — по шесть, у следующих трёх — по девять, ..., у следующих трёх — по тридцать. Сколько друзей у 31-го ученика? (Дружба взаимна.)

Решение. Начнём с крайних. Трое, у которых по 30 друзей, дружат со всеми остальными, в том числе с 31-м учеником и с теми, у кого по 3 друга. Значит, друзья учеников «с тремя друзьями» — это ровно эти трое «самых общительных». Удалим из рассмотрения этих шестерых. У оставшихся учеников (кроме 31-го) число друзей уменьшилось на 3 (каждый

терял троих «самых общительных»): группы теперь имеют по 3, 6, ..., 24 друга, а 31-й потерял 3 друзей. Повторим рассуждение: снова удаляем группы с наибольшим и наименьшим числом друзей, и 31-й теряет ещё 3 друга. Всего пар групп пять: (3,30), (6,27), (9,24), (12,21), (15,18). На каждом шаге 31-й ученик дружит с тремя «самыми общительными» и не дружит с тремя «наименее общительными». После пяти шагов не остаётся никого, кроме 31-го. Значит, у него $5 \cdot 3 = 15$ друзей.

Ответ: 15.

Опорная задача 2

В клетках таблицы записаны числа, причём каждое число равно среднему арифметическому чисел в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

Решение. Рассмотрим клетку с наибольшим числом M . Числа в соседних клетках не больше M , а их среднее равно M . Если бы хотя бы одно из них было меньше M , среднее тоже было бы меньше M . Значит, все соседние числа равны M . Применим то же рассуждение к любой соседней клетке: её соседи тоже равны M . Переходя от клетки к клетке, доберёмся до любой клетки таблицы — во всех клетках стоит M .

Опорная задача 3

По кругу сидят 5 человек. Может ли каждый из них быть старше своего соседа справа?

Решение. Рассмотрим самого старшего. Он сам является соседом справа для человека, сидящего слева от него, и тот должен быть старше самого старшего — противоречие. (Если двое одного возраста, то «старше» тем более невозможно.)

Ответ: не может.

Опорная задача 4

В клетках доски 8×8 записаны числа от 1 до 64 (каждое по разу). Докажите, что найдутся две соседние по стороне клетки, числа в которых отличаются не меньше чем на 5.

Решение. Рассмотрим клетки с числами 1 и 64. Из одной в другую можно пройти по соседним клеткам, сделав не больше 7 шагов по горизонтали и не больше 7 по вертикали — всего не больше 14 шагов. За эти шаги число меняется от 1 до 64, то есть на 63. Если бы на каждом шаге число менялось меньше чем на 5, то есть не больше чем на 4, то за 14 шагов изменение было бы не больше $14 \cdot 4 = 56 < 63$. Значит, на каком-то шаге соседние числа отличаются не меньше чем на 5.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Сумма пяти чисел равна 20. Докажите, что хотя бы одно из них не меньше 4.
2. Как за 9 взвешиваний на чашечных весах без гирь найти самую тяжёлую из 10 гирь разной массы? Почему 8 взвешиваний может не хватить?
3. По кругу стоят 7 детей разного роста. Докажите, что найдётся ребёнок, который выше обоих своих соседей.

4. Числа от 1 до 10 записаны по кругу. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых не меньше 11.
5. Даны пять чисел, сумма любых двух из которых меньше 10. Докажите, что хотя бы четыре из них меньше 5.
6. Каждый из 10 учеников решил хотя бы одну задачу, все решили разное количество задач, а вместе — 55 задач. Сколько задач решил лучший ученик?
7. Пятеро мальчиков собрали 21 гриб, все собрали разное количество (каждый хотя бы один). Докажите, что кто-то собрал не меньше 7 грибов.
8. Докажите, что в любом треугольнике есть сторона, длина которой не меньше трети периметра.
9. В ряд записаны 10 чисел, первое равно 1, последнее — 10. Докажите, что найдутся два соседних числа, из которых правое больше левого.
10. На прямой стоят 2025 точек, каждая покрашена в красный или синий цвет, причём крайняя левая — красная, а крайняя правая — синяя. Докажите, что найдутся две соседние точки разного цвета.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. В клетках квадрата 5×5 записаны числа от 1 до 25. Докажите, что найдутся две соседние по стороне клетки, числа в которых отличаются не меньше чем на 3.
12. По кругу записаны 10 чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних. Докажите, что все числа равны.
13. Несколько ребят собрали 100 орехов, никакие двое не собрали поровну, и каждый собрал меньше 20 орехов. Каким наименьшим может быть число ребят?
14. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что найдётся ладья, которая бьёт не больше двух других ладей.
15. На прямой нарисовано несколько отрезков, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
16. В вершинах куба записаны числа, каждое из которых не больше среднего арифметического трёх чисел в соседних вершинах. Докажите, что все числа равны.
17. В турнире каждый участник сыграл с каждым по разу, ничьих не было. Докажите, что найдётся участник, выигравший не меньше половины своих партий.
18. Петя записал в клетках таблицы 3×4 натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому соседних по стороне. В одной из клеток записано 7. Какие числа могут быть в остальных клетках?
19. Пятеро ребят собрали вместе 15 шишек, у всех разное количество (у каждого хотя бы одна). Сколько шишек у каждого?
20. В ряд стоят 10 детей разного роста. Учитель хочет переставить их по росту, каждый раз меняя местами двух соседних детей, из которых левый выше правого. Докажите, что он всегда может это делать, пока дети не выстроены по росту.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

- 21.** На поляне стоят 7 детей, все попарные расстояния между ними различны. По сигналу каждый обливает из водяного пистолета ближайшего к себе ребёнка. Докажите, что кто-то останется сухим.
- 22.** Семь различных натуральных чисел дают в сумме 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых не меньше 50.
- 23.** В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать до любого другого, проехав не больше двух дорог.
- 24.** В турнире каждый сыграл с каждым по разу, ничьих не было. Докажите, что всех участников можно выстроить в ряд так, что каждый выиграл у стоящего следующим за ним.
- 25.** В клетках доски 10×10 записаны числа от 1 до 100. Докажите, что найдутся две соседние по стороне клетки, числа в которых отличаются не меньше чем на 6.
- 26.** В компании у каждого человека не больше трёх врагов (вражда взаимна). Докажите, что компанию можно разделить на две группы так, чтобы у каждого в его группе было не больше одного врага.
- 27.** На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами в отмеченных точках, внутри которого нет других отмеченных точек.
- 28.** Каждый ученик класса написал на доске, сколько у него друзей в этом классе (дружба взаимна; в классе больше одного ученика). Могли ли все написанные числа оказаться различными?
- 29.** Несколько ладей стоят на доске 8×8 так, что каждая бьёт ровно одну другую ладью. Какое наибольшее число ладей может быть на доске? (Ладья бьёт ближайшую фигуру по горизонтали и вертикали.)
- 30.** На окружности расставлено 100 чисел. Может ли каждое из них быть больше полусуммы двух соседних чисел?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 23. Задачи на переливания

Цели занятия

- научить решать задачи на переливание жидкостей с помощью сосудов без делений;
- научить записывать решение в виде последовательности состояний (таблицы);
- показать, какие объёмы можно получить, а какие нельзя (идея общего делителя).

Планируемые результаты: учащиеся умеют строить последовательность действий, записывать её в таблицу.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Правила; Запись решения; Полезные приёмы; Когда задача неразрешима	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Правила

В задачах на переливания сосуды не имеют делений. Разрешается:

- наполнить сосуд доверху (из реки, крана или большого сосуда);

- вылить всю жидкость из сосуда (в реку или в другой сосуд);
- переливать жидкость из одного сосуда в другой, пока либо первый не опустеет, либо второй не наполнится.

Нельзя отливать «на глаз» половину или треть сосуда.

Запись решения

Решение удобно записывать в виде цепочки **состояний**: сколько литров в каждом сосуде после каждого действия. Например, для сосудов 3 л и 5 л запись $(0; 5) \rightarrow (3; 2)$ означает: наполнили 5-литровый сосуд, затем перелили из него в 3-литровый, пока тот не наполнился.

действие	3 л	5 л
наполнить 5 л	0	5
перелить в 3 л	3	2
вылить 3 л	0	2
перелить 2 л в 3 л	2	0
наполнить 5 л	2	5
долить 3 л	3	4

В последней строке в 5-литровом сосуде 4 литра.

Полезные приёмы

- **Циклический приём:** всё время наполняем один сосуд, переливаем из него в другой, а другой, когда он заполнится, выливаем. Так рано или поздно получаются все возможные объёмы.
- **Большой сосуд как «копилка»:** если нужно получить объём в кастрюле, можно по частям складывать в неё жидкость из маленьких сосудов.
- **Песочные часы** работают похоже: их можно переворачивать в моменты, когда заканчивается песок в других часах.

Когда задача неразрешима

Если объёмы сосудов делятся на одно и то же число (например, 6 л и 9 л — на 3), то при любых переливаниях в сосудах будет количество литров, делящееся на это число. Поэтому сосудами 6 л и 9 л нельзя отмерить 1 л, 2 л, 4 л и т. д. Если же наибольший общий делитель объёмов равен 1, можно получить любое целое количество литров, не превышающее объёма большего сосуда.

Основные идеи и подходы к решению

- **Записывайте состояния** после каждого действия — в виде таблицы или цепочки.
- **Циклический приём:** наполняем один сосуд, переливаем в другой, полный другой выливаем.
- **Разность объёмов** получается так: наполнить больший сосуд и отлить из него меньший.

- **НОД объёмов:** все получаемые количества делятся на него.
- **Песочные часы:** переворачиваем одни часы в момент, когда кончились другие.
- **Ищите короткий путь,** но любое верное решение засчитывается.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Из восьмилитрового ведра, полного молока, нужно отлить 4 литра с помощью пустых трёхлитрового и пятилитрового бидонов.

Решение. Обозначим состояние тройкой чисел (ведро 8 л; бидон 5 л; бидон 3 л). Переливания: $(8; 0; 0) \rightarrow (3; 5; 0) \rightarrow (3; 2; 3) \rightarrow (6; 2; 0) \rightarrow (6; 0; 2) \rightarrow (1; 5; 2) \rightarrow (1; 4; 3) \rightarrow (4; 4; 0)$. То есть: наливаем 5-литровый бидон, из него — 3-литровый, 3 литра выливаем обратно в ведро, 2 литра переливаем в 3-литровый бидон, снова наливаем 5-литровый, доливаем из него 3-литровый (уходит 1 литр) — в 5-литровом бидоне 4 литра.

Ответ: см. цепочку переливаний (в ведре и в 5-литровом бидоне по 4 л).

Опорная задача 2

Как отмерить 8 л воды, находясь у реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? (8 л должно получиться в одном ведре.)

Решение. Состояние: (10 л; 6 л). $(0; 0) \rightarrow (10; 0) \rightarrow (4; 6) \rightarrow (4; 0) \rightarrow (0; 4) \rightarrow (10; 4) \rightarrow (8; 6)$. Наполняем 10-литровое ведро, переливаем из него в 6-литровое — остаётся 4 л. Выливаем 6-литровое, переливаем туда 4 л. Снова наполняем 10-литровое и доливаем 6-литровое (нужно 2 л) — в 10-литровом остаётся 8 л.

Ответ: см. цепочку.

Опорная задача 3

Имеются два ведра: 4 л и 9 л. Как набрать из реки ровно 6 л воды?

Решение. Состояние: (9 л; 4 л). $(0; 0) \rightarrow (9; 0) \rightarrow (5; 4) \rightarrow (5; 0) \rightarrow (1; 4) \rightarrow (1; 0) \rightarrow (0; 1) \rightarrow (9; 1) \rightarrow (6; 4)$. Дважды отливаем из полного 9-литрового ведра по 4 л — остаётся 1 л; переливаем его в 4-литровое. Снова наполняем 9-литровое и доливаем 4-литровое (нужно 3 л) — остаётся 6 л.

Ответ: см. цепочку.

Опорная задача 4

Можно ли, находясь у реки и имея сосуды 6 л и 9 л, отмерить 1 л воды?

Решение. Вначале в сосудах 0 л. При наполнении сосуда в нём становится 6 или 9 л, при выливании — 0. При переливании количество в каждом сосуде меняется на величину, равную разности чисел, кратных 3, или на количество, оставшееся до краёв (тоже кратное 3). Поэтому в каждом сосуде всегда количество литров, делящееся на 3. Значит, 1 л получить нельзя.

Ответ: нельзя.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Как с помощью сосудов 3 л и 5 л набрать из реки ровно 4 л воды?
2. Как с помощью сосудов 3 л и 5 л набрать из реки ровно 1 л воды?
3. Как отмерить 2 л воды, находясь у реки и имея вёдра 10 л и 6 л?
4. Как отмерить 2 л воды, имея вёдра 8 л и 5 л и реку?
5. Можно ли сосудами 4 л и 6 л отмерить 3 л воды?
6. Как с помощью 7-литрового ведра и 3-литровой банки налить в кастрюлю ровно 5 л воды из-под крана?
7. Имеются три сосуда: 9 л, 5 л и 4 л. Первый полон, остальные пусты. Как отлить 2 л?
8. Как с помощью песочных часов на 3 минуты и на 5 минут отмерить 7 минут?
9. Как отмерить 2 минуты, имея песочные часы на 3 минуты и на 5 минут?
10. Докажите, что сосудами 21 л и 35 л нельзя отмерить 30 л.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. В бочке 12 л кваса. Как разделить его пополам с помощью пустых сосудов 8 л и 5 л?
12. Как с помощью сосудов 3 л и 7 л набрать из реки 5 л воды?
13. Как, имея сосуды 7 л и 4 л и кран, получить 2 л воды?
14. В сосуде 10 л вина. Как разделить его пополам с помощью пустых сосудов 7 л и 3 л?
15. Как с помощью песочных часов на 7 и на 11 минут отмерить 15 минут?
16. Как набрать из реки 9 л воды, имея сосуды 4 л и 9 л? А 7 л?
17. Как с помощью сосудов 5 л и 7 л набрать из реки ровно 6 л воды?
18. Какие количества литров (целые) можно отмерить, имея сосуды 4 л и 10 л и реку?
19. Как с помощью сосудов 6 л и 10 л набрать из реки ровно 8 л, если 8 л должны оказаться в одном сосуде? А можно ли получить 5 л?
20. Как с помощью песочных часов на 4 и на 7 минут отмерить 9 минут?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. В бочке 16 л бензина. Как разделить его пополам с помощью пустых канистр 11 л и 6 л?
22. В бочке 24 л масла. Как разделить его на три равные части с помощью пустых сосудов 13 л, 11 л и 5 л?
23. Как с помощью сосудов 13 л и 17 л набрать из реки ровно 1 л воды?
24. Как с помощью сосудов 5 л и 17 л набрать из реки ровно 13 л?
25. Имеются сосуды 15 л и 16 л и река. Как получить 1 л? Как получить 8 л?
26. С помощью сосудов 3 л и 5 л отмерьте последовательно все количества воды от 1 до 8 л (объём может находиться в двух сосудах вместе).

- 27.** Есть песочные часы на 7 и на 11 минут. Как отмерить 4 минуты? Как отмерить 3 минуты?
- 28.** Сосуды 8 л, 5 л и 3 л: первый полон молока, остальные пусты. Получите в первом и во втором сосудах по 4 л, сделав не больше 7 переливаний.
- 29.** Имеются сосуды 2 л и 5 л и река. Как получить 1 л? Как получить 4 л? Как получить 3 л?
- 30.** Докажите, что если объёмы двух сосудов (в литрах) — взаимно простые числа $a < b$, то с их помощью у реки можно отмерить любое целое число литров от 1 до b .

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 24. Задачи на взвешивания

Цели занятия

- научить решать задачи о поиске фальшивой монеты на чашечных весах без гирь;
- показать, почему монеты выгодно делить на три группы, и научить оценивать необходимое число взвешиваний;
- рассмотреть задачи о наборах гирь и о весах с постоянной ошибкой.

Планируемые результаты: учащиеся умеют планировать взвешивания, рассматривать все исходы.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Чашечные весы без гирь; Оценка числа взвешиваний; Гири; Весы с ошибкой; Весы со стрелкой	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Чашечные весы без гирь

Одно взвешивание на чашечных весах даёт один из **трёх** результатов: перевесила левая чаша, перевесила правая чаша, равновесие. Поэтому монеты выгодно делить на **три** группы: две кладём на весы (поровну), третью откладываем.

Пример: среди 9 монет одна фальшивая, она легче. Положим по 3 монеты на каждую чашу. Если весы в равновесии, фальшивая среди отложенных трёх; иначе — среди более лёгких трёх. Вторым взвешиванием из трёх монет кладём по одной на чаши: так же находим лёгкую.

Оценка числа взвешиваний

За одно взвешивание можно различить не больше 3 вариантов, за два — не больше $3 \cdot 3 = 9$, за три — не больше 27, за четыре — 81. Значит, если монет 10, то двух взвешиваний может не хватить (вариантов 10, а исходов 9), а трёх хватит.

Гири

- Если гири кладут **на одну чашу**, удобны гири 1, 2, 4, 8, ... : гирями 1, 2, 4, 8 г можно взвесить любой груз от 1 до 15 г.
- Если гири можно класть **на обе чаши**, удобны гири 1, 3, 9, 27, ... : например, $5 = 9 - 3 - 1$ (на чашу с грузом кладут гири 3 и 1, на другую — 9). Гирями 1, 3, 9, 27 г взвешивается любой груз от 1 до 40 г.

Весы с ошибкой

Если весы всегда ошибаются на одну и ту же величину, обозначьте ошибку буквой. Каждое взвешивание даёт равенство «истинная масса + ошибка = показание». Сравнивая взвешивания, ошибку можно найти.

Весы со стрелкой

На весах со стрелкой видна масса. Если в одном из мешков все монеты фальшивые (на 1 г тяжелее), возьмём из мешков 1, 2, 3, ... монеты: лишние граммы покажут номер мешка.

Основные идеи и подходы к решению

- **Три исхода взвешивания** — делим монеты на три примерно равные группы.
- **За k взвешиваний** различимо не больше $3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3$ (k троек) вариантов.
- **Гири на одну чашу:** 1, 2, 4, 8, ...; **на обе чаши:** 1, 3, 9, 27, ...
- **Весы с ошибкой:** обозначьте ошибку и составьте равенства.
- **Весы со стрелкой:** берём из мешков разное число монет.
- Если неизвестно, легче фальшивая монета или тяжелее, вариантов вдвое больше: каждая монета может быть и лёгкой, и тяжёлой.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Среди 9 монет одна фальшивая — она легче настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

Решение. Положим на каждую чашу по 3 монеты, 3 монеты отложим. Если весы в равновесии, фальшивая среди отложенных; если одна чаша легче — среди трёх монет на ней. Итак, осталось три подозрительные монеты. Положим две из них на весы. Если равновесие — фальшивая третья, иначе — та, что легче.

Опорная задача 2

На одной чаше весов лежат 9 одинаковых алмазов, на другой — 4 одинаковых изумруда. Если добавить к алмазам один такой же изумруд, весы будут в равновесии. Сколько алмазов уравновесят один изумруд?

Решение. После добавления на одной чаше 9 алмазов и изумруд, на другой — 4 изумруда. Уберём с обеих чаш по изумруду: 9 алмазов уравновешивают 3 изумруда. Значит, 3 алмаза уравновешивают один изумруд.

Ответ: 3 алмаза.

Опорная задача 3

Весы всегда ошибаются на одну и ту же величину в одну и ту же сторону. Король Артур на них «весит» 19 стоунов, его конь — 101 стоун, а Артур на коне — 114 стоунов. Сколько весит Артур на самом деле?

Решение. Пусть весы прибавляют к истинной массе e стоунов. Тогда Артур весит $19 - e$, конь — $101 - e$, а вместе они весят $114 - e$. Значит, $(19 - e) + (101 - e) = 114 - e$, откуда $120 - e = 114$, $e = 6$. Артур весит $19 - 6 = 13$ стоунов.

Ответ: 13 стоунов.

Опорная задача 4

Какие гири нужно взять, чтобы с помощью четырёх гирь на чашечных весах можно было взвесить любой груз массой от 1 до 15 г (гири кладут на одну чашу)?

Решение. Возьмём гири 1, 2, 4 и 8 г. Гирями 1 и 2 г можно уравновесить 1, 2, 3 г; добавляя гирю 4 г, получаем ещё 4, 5, 6, 7 г; добавляя гирю 8 г, — 8, 9, ..., 15 г. Например, $13 = 8 + 4 + 1$, $11 = 8 + 2 + 1$. Меньшим числом гирь не обойтись: с тремя гирями можно составить не больше 7 разных непустых наборов, то есть не больше 7 разных масс.

Ответ: 1, 2, 4, 8 г.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Среди трёх монет одна фальшивая — она легче. Как найти её одним взвешиванием на чашечных весах без гирь?

2. Среди 8 монет одна фальшивая — она легче. Как найти её за два взвешивания?
3. Можно ли одним взвешиванием на чашечных весах без гирь наверняка найти лёгкую фальшивую монету среди четырёх монет?
4. Арбуз весит 5 кг и ещё пол-арбуза. Сколько весит арбуз?
5. Какие массы можно взвесить гирями 1 кг и 3 кг, если гири разрешается класть на обе чаши весов?
6. Две одинаковые коробки конфет и три одинаковых торта весят 8 кг, а одна коробка и один торт — 3 кг. Сколько весит торт?
7. Среди 7 одинаковых на вид колец одно легче остальных. Как найти его за два взвешивания?
8. Среди 27 монет одна фальшивая — она легче. За сколько взвешиваний её можно найти?
9. Три яблока и две груши весят 1 кг, а два яблока и три груши — 1,1 кг. Сколько весит яблоко и сколько груша (все яблоки одинаковые и все груши одинаковые)?
10. Как с помощью гирь 1, 3 и 9 кг взвесить 5 кг сахара, если гири можно класть на обе чаши весов?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. В 10 мешках лежат монеты. В одном мешке все монеты фальшивые и весят по 11 г, в остальных — настоящие по 10 г. Как одним взвешиванием на весах со стрелкой определить мешок с фальшивыми монетами?
12. Баба-Яга взвесила волшебный порошок — весы показали 6 золотников. Затем она отсыпала часть порошка, и весы показали 3 золотника. Кошей взвесил отсыпанную часть — весы показали 2 золотника. Весы ошибаются всегда на одну и ту же величину. Сколько на самом деле весят обе части порошка?
13. Среди 4 монет одна фальшивая (неизвестно, легче она или тяжелее). Кроме того, есть одна заведомо настоящая монета. Как за два взвешивания найти фальшивую?
14. Можно ли гири массой 1, 2, 3, ..., 9 г разложить на три кучки равной массы?
15. Как с помощью четырёх гирь взвесить любой груз от 1 до 40 г, если гири можно класть на обе чаши весов?
16. Как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь отвесить 1 кг крупы из мешка, в котором 16 кг?
17. Среди 10 монет одна фальшивая — она легче. Какое наименьшее число взвешиваний нужно, чтобы наверняка её найти?
18. Среди 81 монеты одна фальшивая — она легче. Как найти её за 4 взвешивания?
19. В мешке 9 кг крупы. Как с помощью чашечных весов и гирь 50 г и 200 г за три взвешивания отвесить 2 кг крупы?
20. Среди 12 монет одна фальшивая, она тяжелее. Как найти её за три взвешивания? Можно ли за два?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

- 21.** Есть 4 мешка с монетами. В некоторых мешках (может быть, в нескольких или ни в одном) все монеты фальшивые и весят по 11 г, остальные монеты весят по 10 г. Как одним взвешиванием на весах со стрелкой узнать, в каких мешках фальшивые монеты?
- 22.** Докажите, что среди 28 монет нельзя за три взвешивания наверняка найти одну лёгкую фальшивую.
- 23.** Среди трёх монет одна фальшивая, неизвестно, легче она или тяжелее. Как за два взвешивания найти её и узнать, легче она или тяжелее?
- 24.** Среди 4 монет одна фальшивая, неизвестно, легче она или тяжелее; других монет нет. Можно ли за два взвешивания не только найти фальшивую монету, но и узнать, легче она или тяжелее?
- 25.** Как с помощью чашечных весов без гирь разделить 24 кг гвоздей на две части — 9 кг и 15 кг?
- 26.** Какое наименьшее число гирь нужно иметь, чтобы на чашечных весах взвесить любой груз массой от 1 до 100 г, если гири кладутся только на одну чашу?
- 27.** Решите ту же задачу, если гири можно класть на обе чаши.
- 28.** Сколько взвешиваний нужно, чтобы среди 100 монет найти одну лёгкую фальшивую?
- 29.** Среди 6 монет две фальшивые: они легче настоящих и весят одинаково. Как за три взвешивания найти обе фальшивые монеты?
- 30.** Среди 5 монет две фальшивые: одна легче настоящей, а другая на столько же тяжелее. Как за три взвешивания найти обе фальшивые монеты?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 25. Алгоритмы и процессы

Цели занятия

- научить составлять последовательность действий (алгоритм) для достижения цели;
- рассмотреть задачи о переправах, перестановках, операциях над числами;
- научить оценивать наименьшее число шагов и доказывать, что быстрее нельзя.

Планируемые результаты: учащиеся умеют составлять алгоритм, оценивать число шагов.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Что такое алгоритм; Переправы; Наименьшее число шагов; Обратный ход; Ханойская башня	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Что такое алгоритм

Алгоритм — это точная последовательность действий, приводящая к нужному результату. В олимпиадных задачах часто требуется придумать такую последовательность (переправить людей через реку, переставить предметы, получить число) или выяснить, сколько шагов для этого нужно.

Переправы

В задачах о переправах важно помнить, что лодку кто-то должен **вернуть** обратно. Удобно записывать состояние: кто на левом берегу, кто на правом, где лодка. Часто помогает «челнок»: два лёгких пассажира (два мальчика) по очереди возвращают лодку.

Наименьшее число шагов

Если нужно сделать что-то за наименьшее число ходов, решение снова состоит из оценки и примера. Оценки получают так:

- каждый ход меняет некоторую величину не больше чем на k , а изменить её нужно на N — значит, ходов не меньше $N : k$;
- каждый ход «исправляет» не больше одной пары, а неправильных пар N — ходов не меньше N ;
- соображения чётности (например, конь каждым ходом меняет цвет поля).

Обратный ход

Чтобы получить число за наименьшее число операций « $\times 2$ » и « $+1$ », удобно идти **от конца**: если число чётное, делим пополам, если нечётное — вычитаем 1. Например, $100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ — значит, из 1 можно получить 100 за 8 операций.

Ханойская башня

Чтобы перенести башню из n колец (нельзя класть большее кольцо на меньшее), нужно перенести башню из $n - 1$ кольца на вспомогательный стержень, переложить нижнее кольцо и снова перенести на него башню из $n - 1$ кольца. Число ходов: 1, 3, 7, 15, ... — каждый раз удваивается и увеличивается на 1.

Основные идеи и подходы к решению

- **Записывайте состояние** после каждого шага.
- **Не забывайте, что лодку нужно вернуть.**
- **Оценка числа шагов:** на сколько может измениться величина за один ход.
- **Обратный ход:** от результата к началу.
- **Рекурсия:** большую задачу сводим к такой же, но меньшей (Ханойская башня).
- **Чётность** помогает доказывать, что за данное число ходов нельзя.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошёл отряд солдат. Лодка так мала, что в ней могут переправиться либо двое мальчиков, либо один солдат. Смогут ли солдаты переправиться через реку?

Решение. Смогут. Мальчики переплывают реку вместе; один остаётся на том берегу, другой возвращается с лодкой. Затем один солдат переправляется, а мальчик с того берега возвращает лодку. Теперь оба мальчика снова на исходном берегу с лодкой, а один солдат переправлен. Повторяя эти 4 рейса для каждого солдата, переправим весь отряд.

Ответ: смогут.

Опорная задача 2

В очереди в столовую стоят 16 школьников, мальчики и девочки чередуются (первым стоит мальчик). Любой мальчик, за которым стоит девочка, может поменяться с ней местами. Через некоторое время все девочки оказались в начале очереди, а все мальчики — в конце. Сколько было сделано обменов?

Решение. При каждом обмене одна девочка «обгоняет» одного мальчика, и больше ничего не меняется. В конце каждая девочка обогнала всех мальчиков, стоявших перед ней. Перед первой девочкой стоял 1 мальчик, перед второй — 2, ..., перед восьмой — 8 мальчиков. Обменов $1 + 2 + \dots + 8 = 36$.

Ответ: 36.

Опорная задача 3

По кругу стоят семеро детей: Аня, Боря, Вася, Гена, Даша, Ева, Женя. Начиная с кого-то, считают по часовой стрелке, и каждый третий уходит; счёт продолжают, пока не останется один. С кого нужно начать счёт, чтобы осталась Ева?

Решение. Посчитаем, начиная с Ани: уходят Вася, Ева, Боря, Женя, Даша, Аня — остаётся Гена. Если начать счёт на одного человека позже, весь процесс «сдвинется» по кругу на одного человека, и останется следующий за Геной. Чтобы осталась Ева (через два человека после Гены), нужно начать на два человека позже Ани — с Васи.

Ответ: с Васи.

Опорная задача 4

На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый пакет либо пустой, либо содержит ровно 5 пакетов (в которых тоже могут быть пакеты). Пустых пакетов оказалось 101. Сколько всего пакетов?

Решение. Пусть непустых пакетов k . Каждый непустой пакет содержит 5 пакетов, и каждый пакет, кроме самого внешнего, лежит ровно в одном пакете. Поэтому всего пакетов $5 \cdot k + 1$. Пустых пакетов $5 \cdot k + 1 - k = 4 \cdot k + 1 = 101$, откуда $k = 25$. Всего $5 \cdot 25 + 1 = 126$ пакетов.

Ответ: 126.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Отец весит 100 кг, двое его сыновей — по 50 кг. Лодка выдерживает не больше 100 кг. Как им переправиться через реку?
2. На сковороде помещаются два блина. Каждую сторону блина нужно жарить 1 минуту. За какое наименьшее время можно поджарить три блина с обеих сторон?
3. Ханойская башня из трёх колец разного размера надета на один из трёх стержней (большее кольцо ниже). За ход можно переложить одно верхнее кольцо на другой стержень, но нельзя класть большее кольцо на меньшее. За какое наименьшее число ходов можно перенести башню на другой стержень?
4. Как с помощью четырёх вопросов, на которые отвечают «да» или «нет», узнать задуманное число от 1 до 15?
5. В автобусе 30 пассажиров. На каждой остановке выходят 3 человека и входят 2. После какой остановки в автобусе впервые окажется 20 пассажиров?
6. На доске записано число 5. За ход можно прибавить к числу 3 или умножить его на 2. Можно ли получить 20? А 17?
7. В очереди стоят 5 человек. За одну секунду можно поменять местами двух соседей. За какое наименьшее время можно расставить их в обратном порядке?
8. Сколько ходов нужно, чтобы перенести Ханойскую башню из четырёх колец?
9. Задумано число от 1 до 100. За какое наименьшее число вопросов, на которые отвечают «да» или «нет», можно наверняка его угадать?
10. Лист бумаги разрезали на 3 части, затем некоторые из частей — снова на 3 части, и так несколько раз. Могло ли получиться 100 частей?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 10$. Каждую минуту стирают два числа и записывают их сумму. Через сколько минут на доске останется одно число и какое?
12. По кругу стоят 10 человек с номерами от 1 до 10. Начиная с первого, считают «раз, два», и каждый второй выходит из круга (первым выходит второй). Кто останется последним?
13. За какое наименьшее число ходов шахматный конь может попасть с поля $a1$ на поле $h8$?
14. На доске число 1. За ход можно умножить число на 2 или прибавить к нему 1. За какое наименьшее число ходов можно получить 100?
15. Ночью четыре человека должны перейти мост. Мост выдерживает не больше двух человек, а идти можно только с фонарём, который один. Первый переходит мост за 1 минуту, второй — за 2, третий — за 5, четвёртый — за 10 минут; двое идут со скоростью более медленного. Как им перейти мост за 17 минут?

- 16.** Трое миссионеров и трое людоедов должны переправиться через реку на лодке, вмещающей двоих. Ни на одном берегу (и в лодке у берега) людоедов не должно быть больше, чем миссионеров, если миссионеры там есть. Как им переправиться?
- 17.** В ряд из семи клеток стоят три белые фишки слева, пустая клетка посередине и три чёрные фишки справа. Фишку можно передвинуть на соседнюю пустую клетку или перепрыгнуть через одну фишку на пустую клетку. Белые фишки ходят только вправо, чёрные — только влево. Как поменять белые и чёрные фишки местами?
- 18.** Набор состоит из 100 гирь. Самая лёгкая весит 3 г, а каждая следующая — на 1 г меньше, чем удвоенная масса предыдущей. Найдите массу самой тяжёлой гири.
- 19.** На каждой клетке доски 6×6 сидят муравьи, причём в соседних по стороне клетках количество муравьёв отличается на 1. В одной клетке 4 муравья, в другой — 14. Заполните всю доску числами муравьёв.
- 20.** Кузнечик прыгает по числовой прямой: сначала на 5 вправо, затем на 3 влево, затем снова на 5 вправо и т. д. Сможет ли он из 0 попасть в точку 100? А в точку 1?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

- 21.** На столе 6 монет орлом вверх. За ход можно перевернуть любые 5 монет. Можно ли за несколько ходов положить все монеты решкой вверх?
- 22.** Докажите, что для переноса Ханойской башни из n колец нельзя обойтись меньшим числом ходов, чем 1,3,7,15, ... (каждое следующее число вдвое больше предыдущего плюс 1).
- 23.** Ряд букв А Б В Г Д нужно превратить в ряд Д Г В Б А, меняя местами только соседние буквы. За какое наименьшее число обменов это можно сделать?
- 24.** Робот на клетчатой плоскости выполнил программу из 25 команд «на клетку вверх», «вниз», «влево», «вправо». Мог ли он вернуться в исходную клетку?
- 25.** На столе 10 монет орлом вверх. За ход можно перевернуть любые три монеты. За какое наименьшее число ходов можно положить все монеты решкой вверх?
- 26.** Мальчик поднимается по лестнице, шагая через одну ступеньку или по одной. Сколькими способами он может подняться на 10-ю ступеньку?
- 27.** На доске число 1. За ход можно умножить число на 2 или прибавить 1. За какое наименьшее число ходов можно получить 2025?
- 28.** В стопке лежат карточки с номерами 1, 2, ..., 16 (сверху — 1). Повторяется операция: верхнюю карточку перекладывают под низ стопки, а следующую убирают. Какая карточка останется последней?
- 29.** Три кучки камней: 10, 15 и 20 камней. За ход разрешается взять по одному камню из двух кучек и положить их в третью. Можно ли собрать все камни в одну кучку?
- 30.** В вершинах шестиугольника, занумерованных по кругу числами от 1 до 6, стоят пять фишек (в вершинах 1–5), вершина 6 пустая. За ход можно передвинуть фишку в соседнюю пустую вершину. Можно ли добиться, чтобы фишки, стоявшие в вершинах 1 и 2, поменялись местами, а остальные фишки оказались на прежних местах?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 26. Инварианты

Цели занятия

- познакомить с понятием инварианта — величины, которая не меняется при разрешённых операциях;
- научить находить инварианты: чётность, остатки, суммы, произведения, раскраски;
- научить доказывать невозможность получения нужного состояния с помощью инварианта.

Планируемые результаты: учащиеся умеют находить инвариант и доказывать невозможность.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Что такое инвариант; Какие бывают инварианты; Как найти инвариант	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Что такое инвариант

Во многих задачах с некоторым объектом (набором чисел, кучками камней, таблицей) разрешено выполнять определённые операции и спрашивается, можно ли получить из начального состояния нужное. Если удастся найти величину, которая **не меняется** при любой разрешённой операции, — **инвариант**, — и её значения в начальном и нужном состояниях разные, то нужное состояние получить нельзя.

Пример. На столе 7 стаканов вверх дном. Разрешается переворачивать одновременно любые два стакана. Количество стаканов, стоящих вверх дном, меняется на -2 , 0 или $+2$, поэтому его чётность не меняется. Вначале оно нечётно (7), а если все стаканы стоят правильно, оно равно 0 — чётное число. Значит, поставить все стаканы правильно нельзя.

Какие бывают инварианты

- **Чётность** количества или суммы.
- **Остаток** от деления на 3 , 4 , 9 и т. д. (например, сумма цифр при перестановке цифр не меняется).
- **Сумма или произведение**, которые не меняются или меняются предсказуемо. Например, если числа a и b заменяют на $a + b + a \cdot b$, то произведение чисел вида $(x + 1)$ не меняется, так как $(a + 1) \cdot (b + 1) = a + b + a \cdot b + 1$.
- **Комбинация величин**: «число камней плюс число кучек», «сумма чисел минус их количество».
- **Раскраска**: раскрасим клетки (вершины) в два цвета так, чтобы каждая операция затрагивала поровну клеток каждого цвета; тогда разность сумм по цветам не меняется.

Как найти инвариант

Посмотрите, как меняются при операции разные величины: количество предметов, сумма, чётность, остаток. Попробуйте раскрасить объект. Сравните начальное и конечное состояния: чем они отличаются? Иногда помогает **полуинвариант** — величина, которая при каждой операции только увеличивается (или только уменьшается); он доказывает, что процесс обязательно закончится.

Основные идеи и подходы к решению

- **Инвариант** — то, что не меняется. Разные значения в начале и в конце — значит, нельзя.
- **Начните с чётности**, затем пробуйте остатки от деления на 3 , 4 , 9 .
- **Смотрите на комбинации**: «камни + кучки», «сумма — количество».
- **Раскрашивайте**: операция затрагивает поровну клеток двух цветов — разность сохраняется.
- **Произведения**: замена a , b на $a + b + a \cdot b$ сохраняет произведение чисел $(x + 1)$.

- **Инвариант доказывает невозможность;** для ответа «можно» нужен пример.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

На столе стоят 7 стаканов, все вверх дном. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Решение. Количество стаканов, стоящих вверх дном, при каждом ходе меняется на 2 (если оба переворачиваемых стакана стояли одинаково) или не меняется (если по-разному). Значит, его чётность сохраняется. Вначале оно равно 7 — нечётно, а в нужном состоянии равно 0 — чётно.

Ответ: нельзя.

Опорная задача 2

На доске записаны все натуральные числа от 3 до 223, которые при делении на 4 дают остаток 3. Каждую минуту Боря стирает два числа и записывает их сумму, уменьшенную на 2. В конце концов остаётся одно число. Какое?

Решение. Рассмотрим величину «сумма чисел минус удвоенное количество чисел». При операции сумма уменьшается на 2, а количество чисел — на 1, поэтому величина не меняется: $(S - 2) - 2 \cdot (n - 1) = S - 2 \cdot n$. Числа на доске: 3, 7, ..., 223 — их $(223 - 3) : 4 + 1 = 56$, сумма $(3 + 223) \cdot 56 : 2 = 6328$. Значение величины $6328 - 112 = 6216$. В конце осталось одно число x : $x - 2 = 6216$, $x = 6218$.

Ответ: 6218.

Опорная задача 3

На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать число $a + b + a \cdot b$. Какое число останется на доске в конце?

Решение. Заметим, что $a + b + a \cdot b + 1 = (a + 1) \cdot (b + 1)$. Поэтому произведение чисел «каждое число плюс 1» не меняется: стёрли множители $(a + 1)$ и $(b + 1)$, добавили множитель $(a + b + a \cdot b + 1)$ — тот же самый. Вначале это произведение равно $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 21$. В конце осталось одно число x , и $x + 1 = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 21$.

Ответ: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 21 - 1$ (то есть произведение всех чисел от 1 до 21, уменьшенное на 1).

Опорная задача 4

Есть кучка из 1001 камня. За ход можно выбрать кучку, в которой больше одного камня, выбросить из неё один камень и разделить оставшиеся камни на две кучки. Можно ли через несколько ходов получить только кучки по 3 камня?

Решение. Рассмотрим сумму «количество камней плюс количество кучек». За ход камней становится на 1 меньше, а кучек — на 1 больше, поэтому сумма не меняется и всегда равна $1001 + 1 = 1002$. Если в конце k кучек по 3 камня, то сумма равна $3 \cdot k + k = 4 \cdot k$. Но 1002 на 4 не делится.

Ответ: нельзя.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. За ход можно прибавить по 1 к любым двум числам. Можно ли добиться, чтобы все числа стали равными?
2. На столе 10 монет орлом вверх. За ход можно перевернуть любые две монеты. Можно ли добиться, чтобы решкой вверх лежала ровно одна монета?
3. В клетках таблицы 3×3 записаны нули. За ход можно прибавить по 1 к числам в двух соседних по стороне клетках. Можно ли получить таблицу из одних единиц?
4. Кузнечик прыгает по прямой на 2 или на 4 клетки в любую сторону. Может ли он из клетки 0 попасть в клетку 7?
5. Шоколадку 6×8 нужно разломать на 48 долек. За один раз можно разломать один кусок на два. Сколько понадобится разломов?
6. В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает, ничьих нет) участвуют 64 спортсмена. Сколько матчей будет сыграно до определения победителя?
7. Петя разорвал газету на 4 куска, затем один из кусков — ещё на 4, и так далее. Может ли у него получиться 2025 кусков?
8. Можно ли, переставляя цифры числа 1234567, получить число, делящееся на 9?
9. В ряд стоят 2025 фишек. За ход можно убрать две соседние фишки. Можно ли убрать все фишки?
10. В трёх кучках 1, 2 и 3 камня. За ход можно добавить по одному камню в любые две кучки. Можно ли сделать все кучки равными?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. На столе 9 стаканов вверх дном. За ход можно перевернуть любые 4 стакана. Можно ли поставить все стаканы правильно?
12. Кучку из 100 камней делят на кучки: за ход любую кучку делят на две, и каждый раз записывают произведение чисел камней в получившихся кучках. Когда все кучки стали по одному камню, сложили все записанные числа. Что получилось?
13. По кругу записаны числа 1, 2, 3, ..., 10. За ход можно прибавить по 1 к любым двум соседним числам. Можно ли сделать все числа равными?
14. На доске написаны числа 1, 2, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать $a + b - 1$. Какое число останется на доске в конце?
15. В вершинах шестиугольника по кругу записаны числа 1, 0, 1, 0, 0, 0. За ход можно прибавить по 1 к двум соседним числам. Можно ли сделать все числа равными?
16. К числу 2025 разрешается прибавлять 9 или переставлять в нём цифры (не ставя нуль на первое место). Можно ли получить число 2030?
17. Конь сделал 15 ходов. Мог ли он вернуться на исходное поле?

18. Разрешается перекрашивать на шахматной доске все клетки одной горизонтали или одной вертикали (белые — в чёрные и наоборот). Можно ли получить доску, на которой ровно одна чёрная клетка?

19. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход можно стереть две цифры и, если они одинаковые, написать двойку, а если разные — единицу. Какая цифра останется после 19 ходов?

20. На доске написаны три единицы. За ход можно стереть любое из чисел и записать вместо него сумму двух других. Можно ли получить тройку чисел 2, 2, 2?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. На доске записаны числа $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать $a + b + a \cdot b$. Какое число останется в конце?

22. У дракона 100 голов. Рыцарь одним ударом может срубить 15, 17, 20 или 5 голов, и при этом у дракона вырастает соответственно 24, 2, 14 или 17 новых голов. Если после удара голов не осталось, новые не вырастают. Сможет ли рыцарь победить дракона?

23. На острове живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, оба принимают третий цвет. Могут ли все хамелеоны стать одного цвета?

24. На доске записаны числа $1, 2, \dots, 100$. За ход разрешается стереть два числа и записать остаток от деления их суммы на 13. После нескольких ходов осталось одно число. Какое?

25. В таблице 3×3 в угловых клетках стоят единицы, в остальных — нули. За ход можно прибавить по 1 ко всем числам какого-нибудь квадрата 2×2 . Можно ли добиться, чтобы все числа стали равными?

26. На доске написаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32. За ход можно стереть любые два числа и записать их разность. Может ли последним остаться число 0?

27. Можно ли обойти все клетки доски 7×7 , переходя каждый раз на соседнюю по стороне клетку и побывав в каждой клетке ровно один раз, если начать в угловой клетке, а закончить в клетке, соседней с этим углом?

28. В таблице 3×3 в одной угловой клетке записано 1, в остальных — нули. За ход можно прибавить по 1 к числам в двух соседних по стороне клетках. Можно ли добиться, чтобы все числа делились на 3?

29. Три кузнечика сидят на прямой в точках 0, 1 и 3. За ход один из кузнечиков прыгает через другого и приземляется в точке, симметричной исходной относительно того, через кого прыгнул. Могут ли кузнечики оказаться в точках 0, 2, 4?

30. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 10$. За ход можно выбрать два числа a и b ($b > 1$) и заменить их на $a + 1$ и $b - 1$. Можно ли получить десять одинаковых чисел? А девять пятёрок и одну десятку?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 27. Игры и стратегии

Цели занятия

- познакомить с понятиями выигрышной стратегии, выигрышной и проигрышной позиции;
- научить распознавать игры-шутки и применять симметричную стратегию;
- научить анализировать игры с конца и находить выигрышные позиции.

Планируемые результаты: учащиеся умеют находить выигрышную стратегию и обосновывать её.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Выигрышная стратегия; Игры-шутки; Симметричная стратегия; Дополнение до числа; Анализ с конца	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Выигрышная стратегия

Рассматриваются игры двух игроков, которые ходят по очереди, всё знают о позиции и не полагаются на случай. **Выигрышная стратегия** — это правило, которое указывает игроку, как ходить в любой ситуации, чтобы выиграть **при любой игре соперника**. Решить игру — значит выяснить, у кого из игроков есть выигрышная стратегия, и описать её. Описание стратегии должно учитывать все возможные ходы соперника.

Игры-шутки

В некоторых играх результат не зависит от того, как играют. Например, шоколадку 6×8 ломают по очереди, каждый раз один кусок на два; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Каждый разлом увеличивает число кусков на 1, всего будет 47 разломов — значит, последний (47-й) ход сделает первый игрок, и он выигрывает при любой игре.

Симметричная стратегия

Если позиция симметрична, то второй игрок может отвечать на каждый ход симметричным ходом: тогда у него всегда будет ход, и проиграет первый. Если позиция имеет центр симметрии, то первый игрок может сначала занять центр, а затем повторять ходы соперника симметрично. Пример: двое кладут одинаковые монеты на круглый стол, не накладывая их друг на друга; кто не может положить монету, проиграл. Первый кладёт монету в центр, а затем кладёт монету симметрично монете соперника относительно центра — место всегда свободно.

Дополнение до числа

В игре «из кучки берут от 1 до 3 камней, взявший последний камень выигрывает» выгодно оставлять сопернику число камней, кратное 4: что бы он ни взял (k камней), мы берём $4 - k$, и снова остаётся кратное 4. Последний камень достанется нам.

Анализ с конца

Позиция называется **выигрышной**, если игрок, который из неё ходит, может выиграть, и **проигрышной** — если нет. Из проигрышной позиции любой ход ведёт в выигрышную, а из выигрышной есть ход в проигрышную. Начиная с конечных позиций, можно отмечать позиции как выигрышные и проигрышные — и найти закономерность.

Основные идеи и подходы к решению

- **Стратегия должна работать при любой игре соперника.**
- **Игра-шутка:** число ходов не зависит от игры — смотрим на его чётность.
- **Симметрия:** второй повторяет ходы зеркально; первый может занять центр и затем повторять.
- **Дополнение:** если можно брать от 1 до k , оставляем сопернику кратное $k + 1$.
- **Анализ с конца:** отмечаем выигрышные и проигрышные позиции.
- **Проверяйте, что ответный ход всегда возможен.**

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

В кучке 15 камней. Двое по очереди берут из неё 1, 2 или 3 камня. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выигрывает первый. Первым ходом он берёт 3 камня, оставляя 12 — число, кратное 4. Если второй возьмёт k камней ($k = 1, 2, 3$), первый берёт $4 - k$, и снова остаётся число, кратное 4: 8, затем 4, затем 0. Последний камень возьмёт первый.

Ответ: первый.

Опорная задача 2

Двое по очереди ломают шоколадку 6×8 : за ход можно разломать любой кусок по линии на два куса. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Решение. Каждый ход увеличивает число кусков на 1. Игра закончится, когда все куски станут дольками, то есть когда кусков будет 48. Значит, всего будет сделано 47 ходов при любой игре. Нечётные ходы делает первый игрок, поэтому последний, 47-й ход сделает он.

Ответ: первый (как бы ни играли).

Опорная задача 3

Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол так, чтобы монеты не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может положить монету. Кто выиграет?

Решение. Выигрывает первый. Первым ходом он кладёт монету так, чтобы её центр совпал с центром стола. Затем на каждый ход второго он отвечает, кладя монету симметрично монете второго относительно центра стола. Если второй смог положить монету, то и симметричное место свободно: позиция после каждого хода первого симметрична, а симметричная монета не может перекрываться с монетой второго, иначе обе перекрывались бы с центральной. Значит, первый всегда может сделать ход, и проиграет второй.

Ответ: первый.

Опорная задача 4

Ладья стоит на поле $a1$. Двое по очереди передвигают её вправо или вверх на любое число клеток. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле $h8$. Кто выиграет?

Решение. Выигрывает второй. Поля диагонали $a1-h8$ — «хорошие»: на них ладья находится на одинаковом расстоянии от правого и верхнего края. Первый своим ходом уводит ладью с диагонали (сдвигает только по одному направлению). Второй каждый раз возвращает её на диагональ, сдвигая по другому направлению на столько же клеток. Первый никогда не сможет поставить ладью на $h8$ (это поле на диагонали), а второй в конце поставит.

Ответ: второй.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. В кучке 20 спичек. Двое по очереди берут 1 или 2 спички. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Кто выиграет?
2. В кучке 10 спичек. Двое по очереди берут 1 или 2 спички. Проигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Кто выиграет?
3. В строке записано 10 минусов. Двое по очереди исправляют один минус на плюс. Выигрывает тот, кто сделает последнее исправление. Кто выиграет?
4. Двое по очереди называют натуральные числа от 1 до 9, прибавляя их к сумме (вначале сумма равна 0). Выигрывает тот, после чьего хода сумма станет равна 100. Кто выиграет?
5. В кучке 2025 камней. За ход можно взять 1, 2 или 3 камня. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет и как ему играть?
6. Двое по очереди называют числа от 1 до 10, прибавляя их к общей сумме. Выигрывает тот, кто первым сделает сумму равной 50. Кто выиграет?
7. В коробке 25 конфет. За ход можно взять 1 или 2 конфеты. Выигрывает взявший последнюю конфету. Кто выиграет?
8. В кучке 7 камней. Двое по очереди берут 1 или 2 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?
9. Аня и Ваня выписывают восьмизначное число, по очереди ставя цифры, начиная со старшего разряда. Начинает Аня. Может ли Ваня добиться того, чтобы число делилось на 9?
10. Есть две кучки по 5 камней. За ход можно взять любое число камней из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Король стоит на поле $a1$. За ход его можно передвинуть на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на поле $h8$. Кто выиграет?
12. Есть две кучки камней: 7 и 10. За ход можно взять любое число камней из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет?
13. Есть три кучки: 1, 2 и 3 камня. За ход можно взять любое число камней из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет?
14. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?
15. Двое по очереди ставят королей на доску 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?
16. На доске написано число 60. За ход можно вычесть из числа на доске любой его делитель, меньший самого числа, и записать результат. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

17. Полоска состоит из 20 клеток. Двое по очереди закрашивают одну клетку или две соседние незакрашенные клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

18. В кучке 30 камней. За ход можно взять от 1 до 5 камней. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет?

19. Двое по очереди ставят коней на шахматную доску так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

20. От полоски из 21 клетки двое по очереди отламывают с края 1, 2 или 3 клетки. Проигрывает тот, кто отломит последнюю клетку. Кто выиграет?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. У ромашки 12 лепестков. Двое по очереди отрывают либо один лепесток, либо два соседних. Выигрывает тот, кто оторвёт последний лепесток. Кто выиграет?

22. Двое по очереди закрашивают на доске 10×10 квадраты 2×2 по линиям сетки (закрашенные квадраты не должны иметь общих клеток). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

23. Аня и Ваня по очереди выписывают цифры семизначного числа, начиная со старшего разряда; начинает Аня. Аня хочет, чтобы число делилось на 9. Сможет ли она этого добиться?

24. В кучке 50 камней. За ход можно взять 1, 2 или 4 камня. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет?

25. Есть две кучки по 10 камней. За ход можно взять один камень из любой кучки или по одному камню из обеих кучек. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет?

26. Двое по очереди передвигают короля по доске 8×8 , начиная с какого-то поля; нельзя ставить короля на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

27. В выпуклом 2025-угольнике двое по очереди проводят диагонали, не пересекающиеся внутри многоугольника с уже проведёнными. Проигрывает тот, кто не может провести диагональ. Кто выиграет?

28. Двое по очереди закрашивают клетки доски 5×5 по одной; нельзя закрашивать клетку, соседнюю по стороне с уже закрашенной. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

29. На доске написано число 2025. За ход можно вычесть из числа на доске одну из его ненулевых цифр. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет?

30. Двое по очереди ставят знаки «+» или «−» перед числами 1, 2, 3, ..., 20 (каждый ход — перед одним из чисел, ещё не имеющим знака). Когда все знаки поставлены, вычисляют сумму. Первый выигрывает, если сумма нечётна, второй — если чётна. Кто выиграет?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 28. Перебор вариантов. Дерево вариантов

Цели занятия

- научить вести полный систематический перебор вариантов без пропусков и повторений;
- познакомить с деревом вариантов и таблицей вариантов;
- научить сокращать перебор, разбивая его на случаи.

Планируемые результаты: учащиеся умеют вести полный перебор вариантов.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Систематический перебор; Дерево вариантов; Разбиение на случаи; Таблица вариантов; Типичные ошибки	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Систематический перебор

Во многих задачах нужно найти **все** варианты или посчитать их количество. Главное — перебирать **по порядку**, по заранее выбранному правилу, тогда ни один вариант не будет пропущен и ни один не будет посчитан дважды. Удобный порядок — «словарный»: сначала все варианты, начинающиеся с наименьшего элемента, затем со следующего и т. д.

Пример. Трёхзначные числа из цифр 1, 2, 3 без повторения: 123, 132, 213, 231, 312, 321 — шесть чисел.

Дерево вариантов

Перебор удобно изображать в виде **дерева**: из «корня» выходят ветки — варианты первого выбора, из каждой ветки — варианты второго выбора и т. д. Каждый путь от корня до конца ветви — один вариант. Если на каждом уровне из каждой ветки выходит одинаковое число веток, количество вариантов равно произведению чисел веток на каждом уровне.

Разбиение на случаи

Если вариантов много, их делят на группы по какому-нибудь признаку (например, по числу использованных пятирублёвых монет или по первой цифре) и считают в каждой группе отдельно, а затем складывают.

Пример. Сколькими способами можно уплатить 10 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей? Разобьём по числу пятирублёвых монет: две пятирублёвые — 1 способ; одна — нужно ещё 5 рублей двушками и рублями: 0, 1 или 2 двушки — 3 способа; ни одной — 10 рублей двушками (от 0 до 5 штук) и рублями — 6 способов. Всего $1 + 3 + 6 = 10$.

Таблица вариантов

Если вариант задаётся двумя выборами (например, первая и вторая цифра), удобно составить таблицу: строки — первый выбор, столбцы — второй. Подходящие клетки отмечаем.

Типичные ошибки

- Пропуск вариантов из-за хаотичного перебора.
- Повторный счёт одинаковых вариантов (например, когда порядок не важен: $1 + 2 + 7$ и $2 + 1 + 7$ — один и тот же способ).
- Забытые ограничения: первая цифра не может быть нулём, стороны треугольника должны удовлетворять неравенству треугольника.

Основные идеи и подходы к решению

- **Перебирайте по порядку** (по возрастанию, «как в словаре»).
- **Дерево вариантов** наглядно показывает все случаи.
- **Разбивайте на случаи** по удобному признаку, потом складывайте.

- Если порядок не важен, перечисляйте варианты в порядке возрастания элементов: $a \leq b \leq c$.
- Не забывайте ограничения: нуль на первом месте, неравенство треугольника, «хотя бы один».
- Проверяйте ответ другим способом или на маленьком примере.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

У Дениса есть монеты по 10, 2 и 1 рублю (каждого вида больше 20). Сколькими способами он может без сдачи заплатить за пирожок 16 рублей?

Решение. Разобьём способы по числу десятирублёвых монет. Если десятирублёвая монета одна, остаётся заплатить 6 рублей монетами по 2 и 1 рублю: двушек может быть 0, 1, 2 или 3 (остальное — рублями), это 4 способа. Если десятирублёвых монет нет, нужно 16 рублей двушками и рублями: двушек от 0 до 8 — 9 способов. Всего $4 + 9 = 13$.

Ответ: 13.

Опорная задача 2

Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 5?

Решение. Первая цифра a — от 1 до 5, а две остальные цифры b и c дают в сумме $5 - a$. Если $a = 1$, то $b + c = 4$: $b = 0, 1, 2, 3, 4$ — 5 вариантов. Если $a = 2$, то $b + c = 3$ — 4 варианта; $a = 3$ — 3 варианта; $a = 4$ — 2; $a = 5$ — 1 (число 500). Всего $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Ответ: 15.

Опорная задача 3

Сколькими способами можно разложить 7 одинаковых конфет по трём разным коробкам так, чтобы в каждой коробке была хотя бы одна конфета?

Решение. Пусть в первой коробке a конфет, во второй b , в третьей c , $a + b + c = 7$, все числа не меньше 1. Переберём a : при $a = 1$ получаем $b + c = 6$, b от 1 до 5 — 5 способов; при $a = 2$ — $b + c = 5$, 4 способа; $a = 3$ — 3 способа; $a = 4$ — 2; $a = 5$ — 1. Всего $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Ответ: 15.

Опорная задача 4

В квадрате 4×4 в некоторых клетках поставили по звёздочке так, что во всех строках разное число звёздочек и во всех столбцах разное число звёздочек. Сколько звёздочек могло быть поставлено?

Решение. В строке от 0 до 4 звёздочек, а строки четыре и числа в них разные — значит, это четыре числа из пяти 0, 1, 2, 3, 4, и одно число m пропущено. Всего звёздочек $10 - m$. Если m равно 1, 2 или 3, то среди строк есть строка с 4 звёздочками и строка без звёздочек. Тогда в каждом столбце хотя бы одна звёздочка (из полной строки) и не больше трёх (из-

за пустой строки), то есть числа звёздочек в столбцах — из чисел 1, 2, 3, а различных столбцов четыре. Противоречие. Значит, $m = 0$ (всего 10 звёздочек) или $m = 4$ (всего 6 звёздочек). Примеры: «лесенка» — в i -й строке звёздочки в первых i клетках (по строкам 1, 2, 3, 4, по столбцам 4, 3, 2, 1) — 10 звёздочек; в i -й строке звёздочки в первых $i - 1$ клетках — 6 звёздочек.

Ответ: 6 или 10.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, если цифры могут повторяться? А если не могут?
2. Сколькими способами можно уплатить 10 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей?
3. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из четырёх учеников?
4. Сколькими способами можно рассадить трёх человек на три стула?
5. У Ани 3 юбки и 2 кофты. Сколько разных комплектов «юбка + кофта» она может составить?
6. Выпишите все трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 3.
7. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц?
8. Бросают две игральные кости и складывают выпавшие очки. Сколько различных сумм может получиться?
9. Сколькими способами можно разменять 20 рублей монетами по 5 и 10 рублей?
10. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых все цифры чётные?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Сколькими способами можно заплатить 25 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей?
12. Сколько существует четырёхзначных чисел, записанных только цифрами 1 и 2, в которых нет двух единиц подряд?
13. Сколько существует треугольников с целыми длинами сторон и периметром 12?
14. Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы трёх натуральных слагаемых, если порядок слагаемых не важен?
15. Сколько существует трёхзначных чисел, произведение цифр которых равно 12?
16. Таня хочет потратить ровно 10 рублей на конфеты по 1, 2 и 3 рубля, купив хотя бы одну конфету каждого вида. Сколькими способами она может это сделать?
17. Нужно составить расписание из трёх уроков: математика, русский язык и физкультура, причём физкультура не может быть первым уроком. Сколько существует вариантов расписания?

- 18.** Сколько существует путей из левого нижнего угла прямоугольника 2×3 клетки в правый верхний угол по линиям сетки, если двигаться можно только вправо и вверх?
- 19.** Сколько существует прямоугольников с целыми сторонами, у которых периметр 40, а площадь больше 80? (Прямоугольники, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми.)
- 20.** Сколькими способами можно поставить на доску 3×3 две одинаковые ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

- 21.** Сколько целых чисел от 378 до 2433 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?
- 22.** Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 имеют сумму цифр, равную 10?
- 23.** Сколько существует четырёхзначных чисел, все цифры которых нечётны, а сумма цифр равна 10?
- 24.** Сколько существует трёхзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей хотя бы на 2?
- 25.** Подставка под горячее — квадрат из 9 квадратиков: 4 зелёных, 3 красных и 2 жёлтых. Квадратики одного цвета не должны иметь общей стороны. Сколько разных подставок можно сделать, если подставки, совпадающие при повороте, считаются одинаковыми?
- 26.** Сколько существует десятизначных чисел, записанных цифрами 1 и 2, в которых нет двух двоек подряд?
- 27.** Сколькими способами можно разрезать полосу 2×6 клеток на доминошки 1×2 ?
- 28.** Сколькими способами можно выбрать из чисел $1, 2, \dots, 10$ три числа, сумма которых равна 15 (порядок не важен)?
- 29.** Сколько существует чисел от 1 до 100, в записи которых встречается хотя бы одна цифра 7?
- 30.** Сколькими способами можно расставить в ряд 2 одинаковые белые и 3 одинаковые чёрные фишки так, чтобы никакие две белые не стояли рядом?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 29. Правило суммы и правило произведения

Цели занятия

- познакомить с правилами суммы и произведения — основными правилами комбинаторики;
- научить подсчитывать количество чисел, слов, флагов, маршрутов, расстановок;
- показать приём подсчёта «от противного»: всё минус неподходящее.

Планируемые результаты: учащиеся умеют применять правила суммы и произведения.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Правило суммы; Правило произведения; Перестановки; Подсчёт «от противного»; Когда порядок не важен	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Правило суммы

Если объект A можно выбрать m способами, а объект B — n способами, причём выбор A и выбор B не пересекаются, то выбрать « A или B » можно $m + n$ способами. Пример: в классе 10 мальчиков и 12 девочек; выбрать одного дежурного можно $10 + 12 = 22$ способами.

Правило произведения

Если первый выбор можно сделать m способами, а после каждого из них второй выбор — n способами, то сделать оба выбора можно $m \cdot n$ способами. Это правило распространяется на любое число выборов. Пример: выбрать пару «мальчик и девочка» можно $10 \cdot 12 = 120$ способами.

Пример. Сколько существует трёхзначных чисел с различными цифрами? Первую цифру можно выбрать 9 способами (не 0), вторую — 9 способами (любая, кроме первой, в том числе 0), третью — 8 способами. Всего $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Перестановки

Число способов расставить n различных предметов в ряд равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$; это число обозначают $n!$ («эн факториал»). Например, 5 человек можно рассадить на 5 стульев $5! = 120$ способами.

Подсчёт «от противного»

Иногда проще посчитать неподходящие варианты и вычесть их из общего числа. Сколько пятизначных чисел содержат хотя бы одну чётную цифру? Всего пятизначных чисел 90000, а тех, у которых все цифры нечётны, — $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$. Ответ: $90000 - 3125 = 86875$.

Когда порядок не важен

Если из 4 человек выбирают двух дежурных, то по правилу произведения получается $4 \cdot 3 = 12$ упорядоченных пар, но каждая пара посчитана дважды («Аня и Боря» и «Боря и Аня»). Поэтому способов $12 : 2 = 6$. Аналогично тройку из n предметов без учёта порядка можно выбрать $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) : 6$ способами (каждая тройка посчитана $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ раз).

Основные идеи и подходы к решению

- «Или» — складываем, «и» (последовательно) — умножаем.
- Начинайте выбор с самого ограниченного места (например, первой цифры, которая не может быть нулём).
- Перестановки n предметов: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
- Всё минус неподходящее — удобно для условий «хотя бы один».
- Если порядок не важен, делим на число перестановок внутри выбранной группы.

- Число делителей $p^a \cdot q^b \cdot \dots$ равно $(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot \dots$

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

В некотором языке 3 гласные и 5 согласных букв. Слог состоит из одной гласной и одной согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

Решение. Слог «гласная + согласная» можно составить $3 \cdot 5 = 15$ способами, слог «согласная + гласная» — тоже 15 способами; всего слогов $15 + 15 = 30$ (правило суммы). Слово — это первый слог (30 вариантов) и второй слог (30 вариантов): $30 \cdot 30 = 900$ слов (правило произведения).

Ответ: 900.

Опорная задача 2

Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых различны?

Решение. Первую цифру можно выбрать 9 способами (любая, кроме нуля). Вторую — 9 способами (любая из десяти, кроме уже использованной). Третью — 8 способами. По правилу произведения $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Ответ: 648.

Опорная задача 3

Золушка выпустила коллекцию из 7 моделей туфель. Каждый гость презентации написал в анкете, какие модели ему понравились (можно было указать несколько моделей или ни одной). Никакие два гостя не указали одинаковых наборов. Какое наибольшее число гостей могло быть?

Решение. Для каждой из 7 моделей гость решает: «понравилась» или «нет» — 2 варианта. По правилу произведения различных анкет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$. Наборы у гостей различны, поэтому гостей не больше 128, и 128 гостей возможны (каждый заполнил свой вариант анкеты).

Ответ: 128.

Опорная задача 4

Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Решение. Посчитаем «от противного». Пятизначных чисел всего $99999 - 9999 = 90000$. Чисел, у которых все цифры нечётны (1, 3, 5, 7, 9), — $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$ (нуль среди нечётных цифр не встречается, поэтому ограничение на первую цифру выполнено автоматически). Значит, чисел с хотя бы одной чётной цифрой $90000 - 3125 = 86875$.

Ответ: 86875.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Из города А в город Б ведут 4 дороги, а из города Б в город В — 3 дороги. Сколькими способами можно проехать из А в В через Б?
2. В столовой 5 первых блюд, 4 вторых и 3 компота. Сколькими способами можно составить обед из первого, второго и компота?
3. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифры различны?
4. Сколькими способами можно рассадить 5 человек на 5 стульев?
5. Флаг состоит из трёх горизонтальных полос разного цвета. Сколько разных флагов можно сделать, если есть ткань 4 цветов?
6. Сколько существует трёхзначных номеров автобусных билетов от 000 до 999?
7. Сколько существует чётных трёхзначных чисел?
8. В классе 10 мальчиков и 12 девочек. Сколькими способами можно выбрать одного дежурного? А пару дежурных «мальчик и девочка»?
9. Сколькими способами из 25 учеников можно выбрать старосту и его заместителя?
10. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если цифры могут повторяться?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Сколько «слов» из четырёх букв можно составить из букв А, Б, В, если буквы могут повторяться?
12. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых различны?
13. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 5?
14. Сколько натуральных делителей у числа 360?
15. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, делятся на 4 и не содержат в записи ни одной из цифр 6, 7, 8, 9, 0?
16. Отрезок длины 30 разбит точками на 30 отрезков длины 1. Отмечены эти точки и концы отрезка. Сколько можно выбрать отрезков с концами в отмеченных точках, длина которых — нечётное число?
17. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?
18. Сколькими способами можно выбрать из букв слова ПАРКЕТ одну гласную и одну согласную?
19. Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых чётна?
20. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых нечётны и различны?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Будем обозначать $\overline{abc}$ трёхзначное число с цифрами a, b, c . Сколько существует трёхзначных чисел, для которых разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72?
22. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковые цифры?
23. У Маши 7 разных кукол, она рассаживает их по 6 разным домикам так, чтобы в каждом домике была хотя бы одна кукла. Сколькими способами она может это сделать? (Важно, какая кукла в каком домике; как сидят куклы внутри домика, неважно.)
24. Есть 7 красных, 6 белых и 8 жёлтых шаров, все пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара так, чтобы они не все были одного цвета и не все были разных цветов?
25. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?
26. Сколько существует семизначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?
27. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не содержат в записи цифры 1?
28. Сколько различных «слов» (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слова КОРОВА?
29. Сколькими способами 4 мальчика и 4 девочки могут встать в ряд так, чтобы мальчики и девочки чередовались?
30. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт (4 масти по 9 карт) две карты разных мастей?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 30. Круги Эйлера. Графы. Подсчёт двумя способами

Цели занятия

- научить решать задачи на пересечение и объединение множеств с помощью кругов Эйлера;
- познакомить с понятием графа, степенью вершины, леммой о рукопожатиях;
- научить применять подсчёт одной величины двумя способами.

Планируемые результаты: учащиеся умеют решать задачи с помощью кругов Эйлера и графов.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Круги Эйлера; Графы; Подсчёт двумя способами; Число рёбер в полном графе	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Круги Эйлера

Множества удобно изображать кругами: общая часть двух кругов — объекты, обладающие обоими свойствами. Для двух множеств

$$|A \text{ или } B| = |A| + |B| - |A \text{ и } B|,$$

так как при сложении $|A| + |B|$ общая часть посчитана дважды. Для трёх множеств

$$|A \text{ или } B \text{ или } C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|,$$

где $|AB|$ — число объектов, входящих в A и B , $|ABC|$ — во все три.

Пример: из 28 учеников у 17 есть кошка, у 10 — собака, у 5 нет ни кошки, ни собаки. Хотя бы одно животное есть у $28 - 5 = 23$ учеников, значит, и кошка, и собака — у $17 + 10 - 23 = 4$ учеников.

Графы

Граф — это набор точек (вершин), некоторые из которых соединены линиями (рёбрами). Вершины могут обозначать людей, города, команды, а рёбра — знакомства, дороги, сыгранные матчи. **Степень вершины** — количество выходящих из неё рёбер.

Лемма о рукопожатиях. Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер (каждое ребро имеет два конца). Следствие: число вершин нечётной степени всегда чётно. Например, не бывает компании из 7 человек, в которой у каждого ровно 3 знакомых: сумма степеней была бы $7 \cdot 3 = 21$ — нечётна.

Подсчёт двумя способами

Если одну и ту же величину посчитать двумя разными способами, результаты равны — это даёт уравнение. Примеры: число рёбер графа; число сыгранных партий; число отправленных и полученных сообщений (каждое сообщение кто-то отправил и кто-то получил). Если каждый мальчик дружит с 3 девочками, а каждая девочка — с 2 мальчиками, то число пар «мальчик — девочка» равно и $3 \cdot (\text{мальчики})$, и $2 \cdot (\text{девочки})$.

Число рёбер в полном графе

Если каждая из n вершин соединена со всеми остальными, то из каждой выходит $n - 1$ ребро, а рёбер всего $n \cdot (n - 1) : 2$. Так считают рукопожатия «каждый с каждым» и партии в турнире «в один круг».

Основные идеи и подходы к решению

- **Рисуйте круги Эйлера** и заполняйте части, начиная с общей части.
- $|A \text{ или } B| = |A| + |B| - |A \text{ и } B|$.
- **Сумма степеней = удвоенное число рёбер**; нечётных вершин чётное количество.
- **Каждый с каждым:** $n \cdot (n - 1) : 2$ пар.
- **Считайте одно и то же двумя способами** — получите уравнение.
- **Взаимно-однозначное соответствие:** если объекты разбиваются на пары, их поровну.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

В классе 28 учеников. У 17 есть дома кошка, у 10 — собака, у 5 учеников нет ни кошки, ни собаки. У скольких учеников есть и кошка, и собака?

Решение. Хотя бы одно животное есть у $28 - 5 = 23$ учеников. Сложив $17 + 10 = 27$, мы посчитаем дважды тех, у кого есть и кошка, и собака. Значит, таких $27 - 23 = 4$.

Ответ: у 4 учеников.

Опорная задача 2

На доске записаны все числа от 1 до 300. Вера раскрашивает в оранжевый цвет те числа, у которых есть общий делитель с числом 99, больший 1. Сколько чисел станут оранжевыми?

Решение. $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, поэтому оранжевыми будут числа, делящиеся на 3 или на 11. Делятся на 3: $300 : 3 = 100$ чисел; на 11: 27 чисел ($11 \cdot 27 = 297$); и на 3, и на 11, то есть на 33: 9 чисел ($33 \cdot 9 = 297$). Всего $100 + 27 - 9 = 118$.

Ответ: 118.

Опорная задача 3

В классе 25 учеников. Может ли оказаться, что у каждого из них в классе ровно 7 друзей? (Дружба взаимна.)

Решение. Изобразим учеников вершинами графа, а дружбу — рёбрами. Тогда степень каждой вершины равна 7, сумма степеней $25 \cdot 7 = 175$. Но сумма степеней равна удвоенному числу рёбер, то есть чётна. Противоречие.

Ответ: не может.

Опорная задача 4

В двух отделах разрабатывают приложения под *Android* и под *iOS*. Однажды все сотрудники обменялись сообщениями: каждый разработчик из отдела *Android* отправил 7 и получил 15 сообщений, а каждый из отдела *iOS* отправил 15 и получил 9 сообщений. В каком отделе больше сотрудников?

Решение. Пусть в отделах a и b сотрудников. Число отправленных сообщений равно числу полученных (каждое сообщение кто-то отправил и кто-то получил): $7 \cdot a + 15 \cdot b = 15 \cdot a + 9 \cdot b$. Отсюда $6 \cdot b = 8 \cdot a$, $b = \frac{4 \cdot a}{3} > a$.

Ответ: в отделе *iOS*.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. В классе 30 учеников. 20 любят математику, 15 — физику, 8 — оба предмета. Сколько учеников не любят ни математику, ни физику?

2. Пятеро друзей при встрече обменялись рукопожатиями, каждый с каждым. Сколько было рукопожатий?

3. В шахматном турнире 6 участников, каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий сыграно?
4. Может ли в компании из 7 человек каждый быть знаком ровно с тремя другими?
5. В классе 25 учеников, каждый занимается плаванием или футболом (или обоими видами спорта). Плаванием занимаются 15, футболом — 12. Сколько учеников занимаются обоими видами?
6. Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 2 или на 3?
7. Существует ли граф с пятью вершинами, степени которых 1, 2, 2, 3, 3?
8. В деревне 9 домиков. Можно ли проложить между ними дорожки так, чтобы каждый домик был соединён дорожками ровно с пятью другими?
9. В классе 30 учеников: 18 изучают английский язык, 14 — немецкий, 6 — оба языка. Сколько учеников не изучают ни одного из этих языков?
10. Сколько диагоналей у шестиугольника?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Сколько чисел от 1200 до 2020 делятся на 3, но не делятся на 5?
12. В классе 35 учеников. 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 не посещают ни одного. Сколько учеников посещают оба кружка?
13. Из 40 учеников 25 любят мороженое, 20 — пирожные, 15 — конфеты; 10 любят мороженое и пирожные, 8 — мороженое и конфеты, 6 — пирожные и конфеты, 4 — всё три. Сколько учеников не любят ничего из этого?
14. В лагере 30 детей, каждый занимается хотя бы одним видом спорта: футболом — 17, плаванием — 13, теннисом — 11; футболом и плаванием — 6, футболом и теннисом — 5, плаванием и теннисом — 4. Сколько детей занимаются всеми тремя видами?
15. В стране 15 городов, и из каждого выходит ровно 3 дороги (каждая соединяет два города). Может ли так быть?
16. Каждый мальчик класса дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка — ровно с двумя мальчиками. Девочек в классе 12. Сколько мальчиков?
17. В шахматном турнире «в один круг» каждый участник сыграл 7 партий. Сколько было участников и сколько партий сыграно?
18. Из 100 туристов 10 не знают ни немецкого, ни французского языка, 75 знают немецкий, 83 — французский. Сколько туристов знают оба языка?
19. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют в классе по 3 друга, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?
20. Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Докажите, что в любой компании число людей, знакомых с нечётным числом других участников компании, чётно.

- 22.** Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
- 23.** В стране из каждого города выходит ровно 100 дорог, и из любого города можно доехать до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что по-прежнему из любого города можно доехать до любого.
- 24.** Можно ли нарисовать квадрат вместе с двумя его диагоналями, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя ни одну линию дважды?
- 25.** Назовём число стройным, если все его цифры различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных?
- 26.** Сколько чисел от 1 до 100 делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 7?
- 27.** В классе 20 учеников. Каждый мальчик дружит ровно с 4 девочками, а каждая девочка — ровно с 6 мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?
- 28.** На вечере каждый мальчик потанцевал ровно с тремя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. Докажите, что мальчиков и девочек было поровну.
- 29.** Может ли в стране, где из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
- 30.** Сколько чисел от 1 до 1000 делятся ровно на одно из чисел 2 и 3?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 31. Принцип Дирихле

Цели занятия

- познакомить с принципом Дирихле и его обобщённой формой;
- научить выделять в задаче «клетки» и «кроликов»;
- научить решать задачи на «наверняка», рассматривая самый неудачный случай;
- применять принцип Дирихле к остаткам, к геометрическим задачам и к доказательству существования.

Планируемые результаты: учащиеся умеют выделять «клетки» и «кроликов», применять принцип Дирихле.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Принцип Дирихле; Обобщённый принцип Дирихле; Задачи на «наверняка»; Остатки как клетки; Геометрические клетки; Как оформлять решение	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Принцип Дирихле

Если 10 кроликов сидят в 9 клетках, то хотя бы в одной клетке сидят не меньше двух кроликов. Действительно, если бы в каждой клетке сидело не больше одного кролика, то кроликов было бы не больше 9.

Принцип Дирихле. Если кроликов больше, чем клеток, то найдётся клетка, в которой сидят не меньше двух кроликов.

«Кроликами» и «клетками» могут быть что угодно: ученики и месяцы рождения, числа и их остатки, точки и части фигуры. Главное в решении — **понять, что считать клетками**, и сравнить количества.

Обобщённый принцип Дирихле

Если в n клетках сидят больше чем $n \cdot k$ кроликов, то найдётся клетка, в которой не меньше $k + 1$ кролика. Например, если 25 учеников распределены по 12 месяцам рождения, то $25 > 12 \cdot 2$, и найдутся трое, родившиеся в одном месяце.

Принцип можно сформулировать и через среднее: **хотя бы одно число не меньше среднего арифметического, и хотя бы одно — не больше.**

Задачи на «наверняка»

Вопрос «сколько предметов нужно взять, чтобы наверняка...» решается так: представляем **самый неудачный случай** — берём как можно больше предметов, не получив нужного. Ответ на 1 больше. Пример: в мешке шары трёх цветов, по 10 каждого. Чтобы наверняка вынуть 2 шара одного цвета, достаточно 4 шаров: в худшем случае первые три окажутся разных цветов, а четвёртый совпадёт по цвету с одним из них. Трёх шаров может не хватить.

Остатки как клетки

При делении на n возможны ровно n остатков: $0, 1, \dots, n - 1$. Поэтому **среди любых $n + 1$ целых чисел найдутся два с одинаковыми остатками** при делении на n , а их разность делится на n .

Геометрические клетки

Если фигуру разрезать на несколько частей, а точек в ней отмечено больше, чем частей, то в какую-то часть попадут хотя бы две точки.

Как оформлять решение

- 1) Указать, что является «кроликами» и что «клетками».
- 2) Подсчитать их количество.
- 3) Сослаться на принцип Дирихле.
- 4) Если спрашивают «можно ли» или «обязательно ли», привести пример, показывающий, что меньшего количества не хватает.

Основные идеи и подходы к решению

- **Определите «клетки» и «кроликов»:** кроликов должно быть больше, чем клеток.

- **Больше чем $n \cdot k$ кроликов в n клетках** — в какой-то клетке не меньше $k + 1$.
- **«Наверняка»** — представьте худший случай и прибавьте единицу.
- **Остатки — естественные клетки:** среди $n + 1$ чисел есть два с равными остатками при делении на n .
- **Разбивайте фигуру на части** — части станут клетками.
- **Объединяйте числа в пары** (например, a и $a + 1$ или остатки r и $n - r$) — пары станут клетками.
- **Среднее:** хотя бы одно слагаемое не меньше среднего.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

В школе учатся 370 человек. Докажите, что хотя бы двое из них празднуют день рождения в один и тот же день.

Решение. Кролики — ученики (их 370), клетки — дни года (их не больше 366, с учётом 29 февраля). Так как $370 > 366$, по принципу Дирихле в какой-то день родились хотя бы двое учеников.

Опорная задача 2

Докажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Решение. При делении на 5 возможны пять остатков: 0, 1, 2, 3, 4 — это клетки. Чисел (кроликов) шесть, поэтому у каких-то двух чисел остатки одинаковы. Разность таких чисел делится на 5: например, $37 - 12 = 25$ (оба числа дают остаток 2).

Опорная задача 3

В мешке 10 красных, 8 синих и 5 зелёных шаров. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть не глядя, чтобы среди них наверняка оказались: а) три шара одного цвета; б) шары всех трёх цветов?

Решение. а) Самый неудачный случай: вынуто по два шара каждого цвета — 6 шаров, а трёх одного цвета нет. Значит, 6 шаров может не хватить. Если же вынуть 7 шаров, то, так как $7 > 3 \cdot 2$, по обобщённому принципу Дирихле найдутся три шара одного цвета.

б) В самом неудачном случае сначала вынимаются все красные и все синие шары: $10 + 8 = 18$ шаров, зелёного среди них нет. Следующий, 19-й шар обязательно зелёный. Если вынуть 19 шаров, то шаров каждого цвета будет хотя бы по одному: без какого-то цвета можно вынуть не больше 18 шаров.

Ответ: а) 7; б) 19.

Опорная задача 4

В классе 30 учеников. В диктанте Вова сделал 13 ошибок, а каждый из остальных — меньше. Докажите, что хотя бы три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

Решение. Кролики — 29 учеников, кроме Вовы. Клетки — возможные количества ошибок: 0, 1, 2, ..., 12, всего 13 клеток. Если бы в каждой клетке было не больше двух учеников, то учеников было бы не больше $13 \cdot 2 = 26$. Но $29 > 26$, значит, какое-то количество ошибок сделали не меньше трёх учеников.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. В классе 13 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в одном и том же месяце.
2. В ящике лежат 10 чёрных и 10 белых носков одного размера. Какое наименьшее количество носков нужно достать не глядя, чтобы среди них наверняка нашлась пара носков одного цвета?
3. В лесу растёт миллион ёлок. На каждой ёлке не больше 600 000 иголок. Докажите, что найдутся две ёлки с одинаковым количеством иголок.
4. В классе 25 учеников. Докажите, что найдутся три ученика, родившиеся в одном и том же месяце.
5. В коробке 10 красных и 10 синих карандашей. Сколько карандашей нужно взять не глядя, чтобы среди них наверняка оказался: а) хотя бы один красный; б) хотя бы один карандаш каждого цвета?
6. Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.
7. В трёх клетках сидят 7 кроликов. Докажите, что в какой-то клетке сидят не меньше трёх кроликов.
8. В мешке лежат шары четырёх цветов, по 10 шаров каждого цвета. Сколько шаров нужно вынуть не глядя, чтобы среди них наверняка нашлись два шара одного цвета?
9. Можно ли разложить 44 ореха в 9 кучек так, чтобы в каждой кучке был хотя бы один орех и во всех кучках было разное количество орехов?
10. В школе 400 учеников. Докажите, что найдутся два ученика, у которых день рождения в один и тот же день.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. В ящике 10 красных, 8 синих и 3 жёлтых карандаша. Сколько карандашей нужно вынуть не глядя, чтобы среди них наверняка было: а) не меньше четырёх карандашей одного цвета; б) хотя бы по одному карандашу каждого цвета?
12. В шахматном турнире 8 участников, каждый должен сыграть с каждым по одной партии. Докажите, что в любой момент турнира найдутся два участника, сыгравших к этому моменту одинаковое количество партий.
13. Из чисел 1, 2, 3, ..., 20 выбрали 11 чисел. Докажите, что среди выбранных найдутся два числа, отличающиеся на 1.

14. В классе 35 учеников. Обязательно ли найдутся 4 ученика, родившиеся в одном и том же месяце?
15. В квадрате со стороной 3 м отмечено 10 точек. Докажите, что внутри него можно указать квадрат со стороной 1 м, в котором (или на границе которого) лежат хотя бы две отмеченные точки.
16. Числа 1, 2, 3, ..., 10 расставлены по кругу в произвольном порядке. Докажите, что найдутся три стоящих подряд числа, сумма которых не меньше 17.
17. Докажите, что из любых 7 натуральных чисел можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10.
18. На складе 50 ящиков с яблоками трёх сортов, в каждом ящике яблоки одного сорта. Докажите, что найдутся 17 ящиков с яблоками одного сорта.
19. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа 0, 1 и 2 (каждое — сколько угодно раз). Докажите, что среди восьми сумм — по трём строкам, трём столбцам и двум диагоналям — найдутся две одинаковые.
20. В мешке 100 шаров: 30 красных, 25 зелёных, 25 синих, 10 белых и 10 чёрных. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть не глядя, чтобы среди них наверняка оказались 15 шаров одного цвета?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Каждую точку плоскости покрасили в один из двух цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1 м.
22. Докажите, что среди любых 12 различных двузначных чисел найдутся два, разность которых записывается двумя одинаковыми цифрами.
23. В квадрате со стороной 1 м отмечена 51 точка. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.
24. Каждую клетку прямоугольника 3×7 (3 строки и 7 столбцов) покрасили в белый или чёрный цвет. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, на пересечении которых все четыре клетки одного цвета.
25. Какое наименьшее количество чисел нужно выбрать из чисел 1, 2, ..., 100, чтобы среди выбранных наверняка нашлись два числа, одно из которых делится на другое?
26. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел 1, 2, ..., 50 так, чтобы сумма никаких двух выбранных чисел не делилась на 7?
27. В строку выписаны 10 натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать одно или несколько чисел, стоящих подряд, сумма которых делится на 10.
28. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
29. Числа 1, 2, ..., 10 выписали в строку в произвольном порядке и к каждому числу прибавили номер места, на котором оно стоит. Докажите, что какие-то две из полученных десяти сумм оканчиваются одинаковой цифрой.

30. Дано 10 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два непустых набора, не имеющих общих чисел, с одинаковыми суммами.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 32. Наглядная геометрия на плоскости

Цели занятия

- научить систематически подсчитывать фигуры на рисунке, не пропуская и не повторяя их;
- научить решать задачи на точки и отрезки на прямой;
- познакомить с задачами на ломаные, задачами со спичками и делением плоскости прямыми;
- развивать геометрическое воображение и аккуратность рассуждений.

Планируемые результаты: учащиеся умеют систематически подсчитывать фигуры, решать задачи на отрезки.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

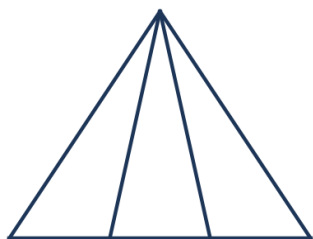
Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Как считать фигуры на рисунке; Точки и отрезки на прямой; Ломаные; Задачи со спичками; Деление плоскости прямыми	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Как считать фигуры на рисунке

Главная опасность — пропустить фигуру или посчитать её дважды. Поэтому фигуры считают **по системе**: - **по размеру**: сначала самые маленькие, затем составленные из двух, из трёх и так далее; - **по общему элементу**: например, все треугольники с вершиной в данной точке или с основанием на данной прямой; - **по паре линий**: прямоугольник на клетчатой доске задаётся парой горизонтальных и парой вертикальных линий.

Пример. Из вершины треугольника к противоположной стороне проведены два отрезка, и сторона разбилась на 3 части. Каждый треугольник на рисунке имеет общую верхнюю вершину и основание — отрезок на нижней стороне. На нижней стороне 4 точки, они дают $4 \cdot 3 : 2 = 6$ отрезков, значит, треугольников 6.



Точки и отрезки на прямой

Если на прямой отмечено n точек, то отрезков с концами в этих точках $n \cdot (n - 1) : 2$ (каждая точка соединяется с $n - 1$ другими, и каждый отрезок посчитан дважды). Соседние точки делят прямую на части: между n точками $n - 1$ промежутков.

Если точки A, B, C лежат на прямой и B между A и C , то $AB + BC = AC$. Когда порядок точек не указан, нужно **рассмотреть все случаи расположения**: например, при $AB = 5$, $BC = 3$ длина AC равна 8 или 2.

Ломаные

Ломаная состоит из отрезков-звеньев, соединённых концами. У незамкнутой ломаной из n звеньев $n + 1$ вершина, у замкнутой — n вершин. Длина ломаной — сумма длин звеньев; отрезок, соединяющий концы ломаной, не длиннее её.

Задачи со спичками

В таких задачах фигуры составлены из одинаковых спичек; спичку нельзя ломать и класть на другую. Полезно считать, сколько спичек принадлежит одному квадрату, двум квадратам, и какие спички — «общие». В квадрате 3×3 из единичных клеток 24 спички: 4 горизонтальных ряда по 3 и 4 вертикальных ряда по 3.

Деление плоскости прямыми

Прямые, среди которых нет параллельных и никакие три не проходят через одну точку, называют прямыми **общего положения**. У n таких прямых $n \cdot (n - 1) : 2$ точек пересечения. Новая, n -я прямая пересекает прежние в $n - 1$ точке, делится ими на n кусков, и каждый кусок разрезает одну часть на две. Поэтому число частей: 1 прямая — 2

части, 2 прямые — 4, 3 прямые — 7, 4 прямые — 11, вообще n прямых дают $1 + (1 + 2 + \dots + n)$ частей.

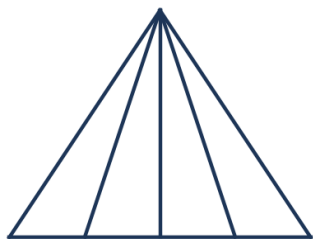
Основные идеи и подходы к решению

- **Считайте по системе:** по размеру, по вершине, по основанию, по паре линий.
- n точек дают $n \cdot (n - 1) : 2$ отрезков.
- Порядок точек не задан — разбирайте все случаи.
- Незамкнутая ломаная из n звеньев имеет $n + 1$ вершину.
- Спички: следите за общими сторонами соседних квадратов.
- Каждый новый кусок прямой добавляет одну часть плоскости.
- Не бойтесь выходить за пределы рисунка (задача о девяти точках).

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Сколько треугольников изображено на рисунке? (Из верхней вершины к основанию проведены три отрезка.)



Решение. Все треугольники имеют общую верхнюю вершину, а основание каждого треугольника — отрезок нижней стороны с концами в отмеченных на ней точках. На нижней стороне 5 точек (два конца и три точки деления). Отрезков с концами в этих точках $5 \cdot 4 : 2 = 10$: можно и перечислить — 4 отрезка из одной части, 3 из двух частей, 2 из трёх и 1 из четырёх, $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Ответ: 10.

Опорная задача 2

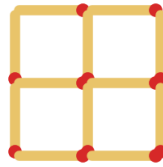
На прямой отмечены точки A, B, C, D (именно в таком порядке), $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см. Сколько всего отрезков с концами в этих точках? Найдите сумму их длин.

Решение. Отрезков $4 \cdot 3 : 2 = 6$: AB, AC, AD, BC, BD, CD . Их длины: 2, 5, 9, 3, 7, 4 см, сумма 30 см. Можно считать иначе: промежуток AB входит в 3 отрезка (AB, AC, AD), BC — в 4 отрезка (AC, AD, BC, BD), CD — в 3. Сумма $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 30$ (см).

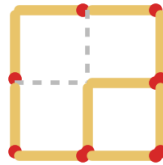
Ответ: 6 отрезков, сумма длин 30 см.

Опорная задача 3

Из 12 спичек составлен квадрат 2×2 . Уберите 2 спички так, чтобы осталось ровно 2 квадрата (и не осталось «лишних» спичек).



Решение. Если убрать две внешние спички, разрушится большой квадрат и ещё хотя бы один маленький. Будем убирать внутренние. Уберём две внутренние спички, сходящиеся в центре под прямым углом: верхнюю половину вертикальной средней линии и левую половину горизонтальной. Останутся большой квадрат и правый нижний маленький квадрат, а все оставшиеся спички принадлежат им.



Ответ: см. рисунок (убранные спички показаны пунктиром).

Опорная задача 4

На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 4 прямые?

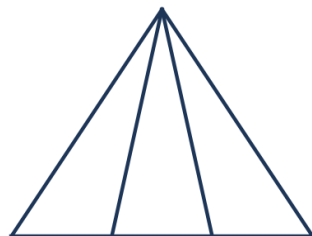
Решение. Одна прямая делит плоскость на 2 части. Вторая прямая пересекает первую не больше чем в одной точке, делится ею не больше чем на 2 куска и добавляет не больше 2 частей — всего не больше 4. Третья пересекает две прежние не больше чем в 2 точках, делится на не больше 3 кусков и добавляет не больше 3 частей — не больше 7. Четвёртая добавляет не больше 4 частей — всего не больше 11. Ровно 11 частей получится, если прямые общего положения: никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку.

Ответ: 11.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. На прямой отмечено 5 точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?
2. Сколько треугольников изображено на рисунке?



3. Сколько квадратов изображено на рисунке (квадрат 2×2 из клеток)?



4. Сколько прямоугольников изображено на полоске из четырёх клеток? (Квадраты тоже считаются прямоугольниками.)



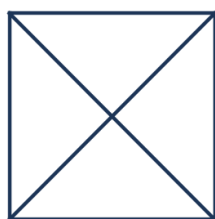
5. На прямой отмечены точки A , B и C , причём $AB = 5$ см, $BC = 3$ см. Чему может быть равна длина отрезка AC ?

6. Из спичек составлен квадрат 3×3 из девяти клеток. Сколько спичек понадобилось?

7. Сколько точек пересечения могут иметь три различные прямые? Укажите все возможности.

8. Сколько диагоналей у пятиугольника? Сколько существует треугольников, вершины которых — вершины пятиугольника?

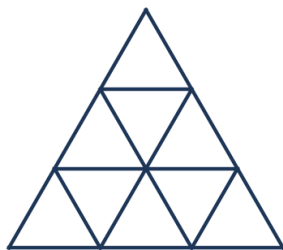
9. Сколько треугольников изображено на рисунке (квадрат с двумя диагоналями)?



10. Из вершины угла AOB внутри него проведены два луча. Сколько всего углов изображено на рисунке?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

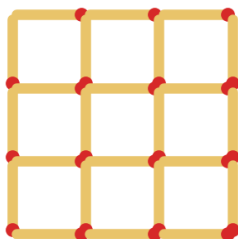
11. Сколько треугольников изображено на рисунке?



12. Сколько квадратов можно найти на клетчатой доске: а) 3×3 ; б) 4×4 ?

13. Сколько прямоугольников (включая квадраты) на клетчатой доске 2×3 ?

14. Из 24 спичек составлен квадрат 3×3 . Уберите 4 спички так, чтобы осталось ровно 5 квадратов и не осталось лишних спичек.

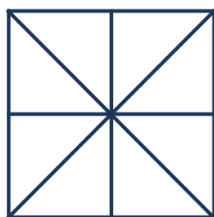


15. На прямой отмечено 10 точек так, что расстояние между любыми соседними точками равно 1 см. Сколько среди отрезков с концами в этих точках отрезков длиной 3 см? Чему равна сумма длин всех отрезков с концами в этих точках?

16. На сколько частей делят плоскость 4 прямые, если ровно две из них параллельны, а никакие три не проходят через одну точку?

17. Точки A, B, C, D лежат на прямой в указанном порядке, $AC = 7$ см, $BD = 9$ см, $AD = 12$ см. Найдите длину отрезка BC .

18. Сколько треугольников изображено на рисунке (квадрат с диагоналями и средними линиями)?



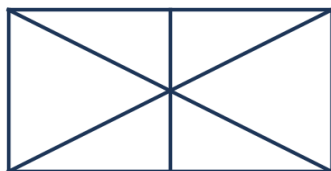
19. Проведите ломаную из четырёх звеньев, проходящую через все 9 точек, не отрывая карандаша от бумаги.



20. Сколько точек пересечения у пяти прямых общего положения? На сколько частей они делят плоскость?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Сколько треугольников изображено на рисунке (прямоугольник с диагоналями и отрезком, соединяющим середины двух противоположных сторон)?



22. Сколько всего квадратов на шахматной доске 8×8 (квадраты из клеток любого размера)?

23. Сколько прямоугольников (включая квадраты) на клетчатой доске 3×4 ?

24. Из 24 спичек составлен квадрат 3×3 . Уберите 8 спичек так, чтобы осталось ровно 2 квадрата и не осталось лишних спичек.

25. На прямой отметили несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними отмеченными точками отметили ещё по точке. Так сделали три раза, и всего стало 65 точек. Сколько точек было отмечено сначала?

26. На прямой отмечено несколько точек, среди них точки A и B . Рассматриваются все отрезки с концами в отмеченных точках. Точка A лежит внутри 50 из этих отрезков, а точка B — внутри 56 отрезков (концы отрезка не считаются его внутренними точками). Сколько точек отмечено?

27. На сколько частей делят плоскость 10 прямых общего положения?

28. Сколько треугольников изображено на рисунке (пятиугольник со всеми диагоналями)?



29. На рисунке 16 точек расположены в виде квадрата 4×4 . Сколько существует квадратов с вершинами в этих точках? (Стороны квадрата не обязательно идут по линиям сетки.)



30. Сколько точек пересечения может быть у четырёх различных прямых? Найдите все возможные варианты.

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 33. Прямоугольники и квадраты. Площадь и периметр

Цели занятия

- повторить понятия периметра и площади, единицы площади;
- научить находить площади и периметры фигур на клетчатой бумаге, в том числе достраиванием и разбиением;
- научить решать задачи о разрезании прямоугольника на прямоугольники;
- познакомить с оценками периметра фигур из клеток.

Планируемые результаты: учащиеся умеют вычислять периметры и площади фигур.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Периметр и площадь прямоугольника; Периметр и площадь — разные величины; Фигуры на клетчатой бумаге; Периметр «ступенчатых» фигур; Разрезание прямоугольника	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Периметр и площадь прямоугольника

Периметр — сумма длин всех сторон фигуры. У прямоугольника со сторонами a и b : $P = 2 \cdot (a + b)$; у квадрата со стороной a : $P = 4 \cdot a$.

Площадь показывает, сколько единичных квадратов помещается в фигуре. Площадь прямоугольника $S = a \cdot b$, квадрата $S = a \cdot a$.

Единицы площади: 1 см^2 — площадь квадрата со стороной 1 см. Так как в 1 м 100 см, то $1 \text{ м}^2 = 100 \cdot 100 = 10\,000 \text{ см}^2$. Для участков земли используют ар (сотку): $1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$ (квадрат $10 \times 10 \text{ м}$), и гектар: $1 \text{ га} = 10\,000 \text{ м}^2$ (квадрат $100 \times 100 \text{ м}$).

Периметр и площадь — разные величины

Фигуры с одинаковой площадью могут иметь разные периметры, и наоборот. Например, прямоугольники 1×12 , 2×6 , 3×4 имеют площадь 12, а периметры 26, 16 и 14. **Из прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат** (или прямоугольник, стороны которого ближе всего друг к другу).

Если увеличить стороны прямоугольника в 2 раза, периметр увеличится в 2 раза, а площадь — в 4 раза.

Фигуры на клетчатой бумаге

Площадь фигуры из клеток — число клеток. Для других фигур помогают два приёма: - **разбиение** — разрезать фигуру на прямоугольники и прямоугольные треугольники; - **достраивание** — достроить фигуру до прямоугольника и вычесть лишнее.

Прямоугольный треугольник — половина прямоугольника, поэтому его площадь равна половине произведения катетов. Например, площадь треугольника с катетами 4 и 6 клеток равна $4 \cdot 6 : 2 = 12$ клеткам.

Периметр «ступенчатых» фигур

Если граница фигуры из клеток идёт «лесенкой» (вправо и вверх, затем вправо и вниз и так далее), её периметр равен периметру описанного прямоугольника: горизонтальные отрезки границы можно «сдвинуть» на стороны прямоугольника, вертикальные — тоже. Если же у фигуры есть «вырез», периметр больше на удвоенную глубину выреза.

Периметр фигуры из n клеток равен $4 \cdot n$ минус удвоенное число общих сторон соседних клеток.

Разрезание прямоугольника

Если прямоугольник разрезан на части прямыми разрезами, то **сумма периметров частей равна периметру прямоугольника плюс удвоенная длина разрезов** (каждый разрез становится стороной двух частей). Сумма площадей частей равна площади прямоугольника.

Если прямоугольник разрезан двумя разрезами на 4 прямоугольника, то произведения площадей противоположных частей равны, а суммы их периметров равны.

Основные идеи и подходы к решению

- $P = 2 \cdot (a + b)$, $S = a \cdot b$; не путайте периметр и площадь.
- Площадь сложной фигуры — разбиением или достраиванием до прямоугольника.
- Прямоугольный треугольник — половина прямоугольника.
- Лесенка не меняет периметр описанного прямоугольника.
- Разрез добавляет к сумме периметров свою удвоенную длину.
- Обозначьте неизвестную сторону буквой и выразите через неё остальные.
- При данном периметре наибольшая площадь — у квадрата.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

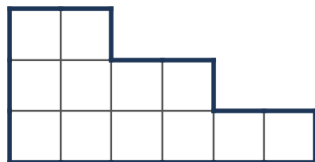
Стороны прямоугольника 8 см и 4 см. Найдите площадь квадрата, периметр которого равен периметру этого прямоугольника. У какой фигуры площадь больше?

Решение. Периметр прямоугольника $2 \cdot (8 + 4) = 24$ см. Сторона квадрата $24 : 4 = 6$ см, его площадь $6 \cdot 6 = 36$ см². Площадь прямоугольника $8 \cdot 4 = 32$ см² — меньше.

Ответ: 36 см²; у квадрата.

Опорная задача 2

Найдите периметр и площадь фигуры, изображённой на рисунке (сторона клетки 1 см).



Решение. Площадь: $2 + 4 + 6 = 12$ см². Граница фигуры идёт «лесенкой»: горизонтальные верхние отрезки вместе составляют 6 см, как верхняя сторона описанного прямоугольника 6×3 , вертикальные правые отрезки — 3 см. Поэтому периметр равен периметру прямоугольника 6×3 : $2 \cdot (6 + 3) = 18$ см.

Ответ: $P = 18$ см, $S = 12$ см².

Опорная задача 3

Прямоугольник разрезан двумя разрезами на 4 прямоугольника. Площади трёх из них указаны на рисунке. Найдите площадь четвёртого. (Рисунок не в масштабе.)

6	9
12	?

Решение. Верхние прямоугольники имеют одинаковую высоту, поэтому их площади относятся как ширины: правый в $9:6 = 1,5$ раза шире левого. Нижние прямоугольники имеют те же ширины и одинаковую высоту, значит, правый нижний тоже в 1,5 раза больше левого нижнего: $12 \cdot 1,5 = 18$. Другой способ: если ширины a и b , а высоты c и d , то $(a \cdot c) \cdot (b \cdot d) = (b \cdot c) \cdot (a \cdot d)$ — произведения площадей противоположных частей равны: $6 \cdot x = 9 \cdot 12$, $x = 18$.

Ответ: 18.

Опорная задача 4

Квадрат разрезали на два прямоугольника. Сумма их периметров равна 30 см. Найдите сторону квадрата.

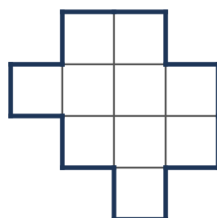
Решение. Пусть сторона квадрата a . Сумма периметров частей равна периметру квадрата $4 \cdot a$ плюс удвоенная длина разреза $2 \cdot a$, то есть $6 \cdot a = 30$, $a = 5$ см.

Ответ: 5 см.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Найдите периметр и площадь прямоугольника со сторонами 7 см и 4 см.
2. Периметр квадрата равен 36 см. Найдите его площадь.
3. Площадь прямоугольника 48 см^2 , одна из его сторон 6 см. Найдите периметр прямоугольника.
4. Найдите площадь и периметр фигуры (сторона клетки 1 см).

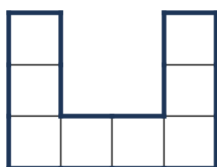
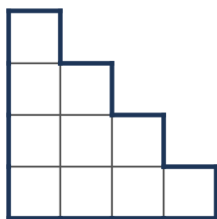


5. Сколько квадратных сантиметров в одном квадратном метре? Сколько квадратных метров в одном гектаре?
6. Квадрат со стороной 4 см разрезали на два равных прямоугольника. Найдите периметр каждого из них.
7. Периметр прямоугольника 20 см, длины его сторон — целые числа сантиметров. Какой может быть площадь прямоугольника? Укажите все варианты.
8. Из угла прямоугольника 6×4 см вырезали квадрат 2×2 см. Как изменились периметр и площадь фигуры?
9. Огород имеет форму прямоугольника 25×40 м. Сколько это аров (соток)?
10. Ширина прямоугольника 3 см, а длина в 4 раза больше. Найдите периметр и площадь прямоугольника.

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Каждую сторону прямоугольника увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличились его периметр и площадь?

12. Найдите периметры фигур (сторона клетки 1 см).



13. Прямоугольник разрезан на 4 прямоугольника, площади трёх из них указаны на рисунке. Найдите площадь четвёртого. (Рисунок не в масштабе.)

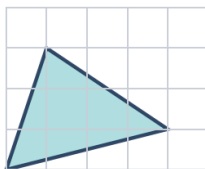
10	15
?	21

14. Квадрат разрезали на 3 равных прямоугольника. Периметр каждого прямоугольника 24 см. Найдите площадь квадрата.

15. Из 12 одинаковых квадратиков со стороной 1 см сложили прямоугольник. Каким может быть его периметр?

16. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6 клеток. Найдите его площадь в клетках.

17. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге (площадь клетки 1 см²).



18. Прямоугольник 6×4 см разрезали двумя разрезами, параллельными короткой стороне, и одним разрезом, параллельным длинной стороне, на 6 прямоугольников. Найдите сумму периметров всех частей.

19. Периметр прямоугольника 30 см, а длина на 3 см больше ширины. Найдите площадь прямоугольника.

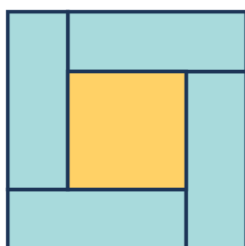
20. Прямоугольный участок площадью 36 м² нужно огородить забором. Стороны участка — целые числа метров. Какая наименьшая длина забора понадобится?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Прямоугольник разрезан двумя разрезами на 4 прямоугольника. Периметры трёх из них указаны на рисунке. Найдите периметр четвёртого. (Рисунок не в масштабе.)

10	12
14	?

22. Квадрат сложен из четырёх одинаковых прямоугольников и маленького квадрата в центре, как на рисунке. Периметр каждого прямоугольника 20 см. Найдите площадь большого квадрата.



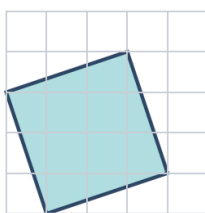
23. Прямоугольник с периметром 24 см разрезали на два прямоугольника с периметрами 16 см и 20 см. Найдите стороны исходного прямоугольника.

24. Какой наибольший периметр может иметь фигура, составленная из 5 клеток 1×1 (соседние клетки примыкают друг к другу сторонами, фигура связная)?

25. Какой наименьший периметр может иметь фигура, составленная из 12 клеток 1×1 ?

26. Можно ли разрезать квадрат на три прямоугольника с одинаковыми периметрами так, чтобы не все прямоугольники были одинаковыми?

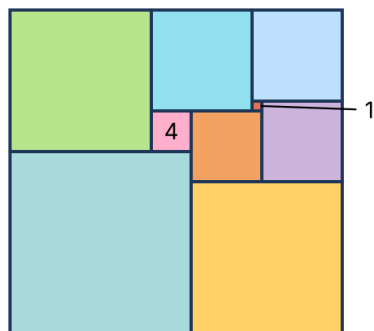
27. Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге (площадь клетки 1 см^2).



28. Разрежьте прямоугольник 9×4 клетки по линиям сетки на две части, из которых можно сложить квадрат.

29. Прямоугольник разрезали на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров?

30. Прямоугольник разрезан на 9 квадратов, как на рисунке. Сторона самого маленького квадрата равна 1, а сторона квадрата, отмеченного числом 4, равна 4. Найдите стороны и периметр прямоугольника.



Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 34. Разрезания, замощения, раскраски

Цели занятия

- научить разрезать клетчатые фигуры на равные части, используя подсчёт клеток и симметрию;
- научить составлять фигуры из данных частей и строить замощения;
- познакомить с методом раскрасок для доказательства невозможности замощения;
- развивать умение приводить пример и доказывать, что примера нет.

Планируемые результаты: учащиеся умеют разрезать фигуры, применять раскраски.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Равные фигуры; Замощения; Шахматная раскраска; Другие раскраски; Пример и оценка	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

Теоретический материал

Равные фигуры

Две фигуры **равны**, если их можно совместить наложением (фигуру разрешается поворачивать и переворачивать). При разрезании фигуры на k равных частей: 1) подсчитайте клетки — в каждой части $n:k$ клеток; 2) начните с «трудных» мест: углов, выступов, клеток со звёздочками; 3) используйте **симметрию**: часто части получаются друг из друга поворотом вокруг центра фигуры или отражением.

Замощения

Замостить (покрыть) фигуру плитками — значит разрезать её на части, равные плиткам. Первая проверка — **площадь**: число клеток фигуры должно делиться на число клеток плитки. Например, доску 5×5 нельзя покрыть доминошками: 25 клеток — нечётное число. Если площадь подходит, ищем пример, начиная с угловой клетки: её можно накрыть лишь немногими способами.

Шахматная раскраска

Доминошка на шахматной доске всегда накрывает **одну чёрную и одну белую** клетку. Поэтому фигуру, в которой чёрных и белых клеток не поровну, нельзя покрыть доминошками.

Знаменитый пример: из доски 8×8 вырезали две противоположные угловые клетки $a1$ и $h8$. Они одного цвета (чёрные), значит, осталось 30 чёрных и 32 белых клетки, а 31 доминошка накрывала бы 31 чёрную и 31 белую клетку. Покрыть нельзя, хотя по площади всё сходится.

Другие раскраски

Если плитка больше доминошки, подбирают раскраску «под плитку»: - **полоски** (строки или столбцы через одну) — для полосок 1×4 , уголков, Т-фигурок; - **диагонали в 3 цвета** — полоска 1×3 всегда накрывает по одной клетке каждого из трёх цветов; - **диагонали в 4 цвета** — для полосок 1×4 .

Схема доказательства: 1) раскрасить фигуру; 2) понять, сколько клеток каждого цвета накрывает каждая плитка; 3) сравнить с количеством клеток каждого цвета в фигуре — получить противоречие (часто по чётности).

Пример и оценка

Если спрашивают «можно ли», то для ответа «да» достаточно **привести пример** (нарисовать разрезание), а для ответа «нет» нужно **доказать**: подсчётом площади, раскраской или разбором случаев.

Основные идеи и подходы к решению

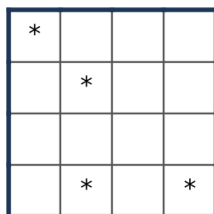
- **Подсчитайте клетки**: сколько клеток в каждой части.
- **Начинайте с углов и звёздочек** — там меньше всего вариантов.
- **Ищите симметрию**: части часто переходят друг в друга при повороте.

- **Шахматная раскраска:** доминошка = 1 чёрная + 1 белая клетка.
- **Подбирайте раскраску под плитку:** полосы, диагонали в 3 или 4 цвета.
- **Чётность:** сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.
- «Можно» — пример; «нельзя» — доказательство.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Разрежьте квадрат 4×4 по линиям сетки на 4 равные части так, чтобы в каждой части была ровно одна звёздочка.



Решение. В каждой части $16 : 4 = 4$ клетки. Две звёздочки в левом верхнем углу мешают разрезать квадрат на квадратики 2×2 ; звёздочки в нижней строке и в левом столбце мешают разрезать его на полосы. Попробуем «уголки» из 4 клеток (буква Г). Угловую клетку со звёздочкой накроем уголком вдоль верхней стороны, звёздочку во второй строке — уголком, «обнимающим» первый, и так же снизу:



Ответ: см. рисунок (возможен и другой ответ).

Опорная задача 2

Из шахматной доски 8×8 вырезали две противоположные угловые клетки. Можно ли оставшуюся часть разрезать на доминошки 1×2 ?

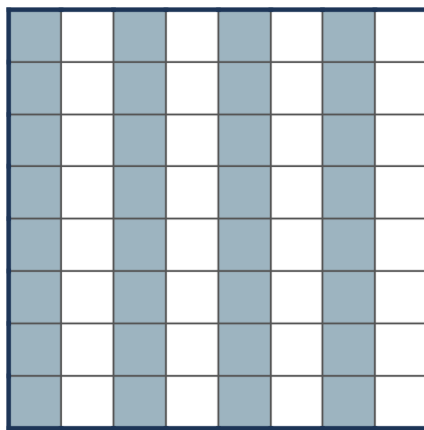
Решение. Противоположные угловые клетки шахматной доски одного цвета (например, $a1$ и $h8$ — чёрные). После их удаления осталось 30 чёрных и 32 белых клетки. Каждая доминошка накрывает одну чёрную и одну белую клетку, поэтому 31 доминошка накрывала бы 31 чёрную клетку, а их только 30. Противоречие.

Ответ: нельзя.

Опорная задача 3

Можно ли доску 8×8 разрезать на 15 полосок 1×4 и один уголок из четырёх клеток (буква Г)?

Решение. Раскрасим столбцы доски через один: 4 столбца чёрные, 4 белые, чёрных клеток 32.



Горизонтальная полоска 1×4 накрывает 2 чёрные клетки, вертикальная — 4 или 0: в любом случае чётное число. Уголок состоит из трёх клеток, стоящих в ряд, и одной клетки рядом с краем этого ряда; он накрывает 1 или 3 чёрные клетки — нечётное число. Тогда всего накрыто нечётное число чёрных клеток, а их 32. Противоречие.

Ответ: нельзя.

Опорная задача 4

Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на полоски 1×3 ?

Решение. По площади всё подходит: $63 = 21 \cdot 3$. Раскрасим доску по диагоналям в три цвета:

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

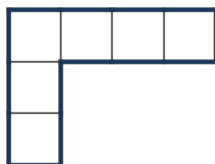
Любая полоска 1×3 (горизонтальная или вертикальная) накрывает по одной клетке цветов 1, 2 и 3. Значит, 21 полоска накрывает по 21 клетке каждого цвета. Подсчитаем клетки: цвета 1 — 21, цвета 2 — 22, цвета 3 — 21. Повернув доску, можно считать, что вырезана левая верхняя угловая клетка, — она имеет цвет 1, после её удаления клеток цвета 1 стало 20, а цвета 2 по-прежнему 22. Противоречие.

Ответ: нельзя.

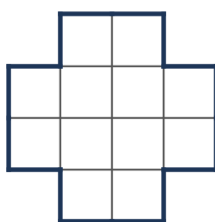
Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Разрежьте фигуру по линиям сетки на две равные части.



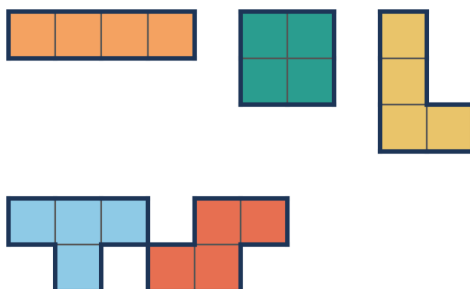
2. Разрежьте квадрат 4×4 по линиям сетки на две равные части тремя разными способами.
3. Какие из прямоугольников 4×5 , 5×5 , 3×7 , 6×6 можно разрезать на доминошки 1×2 ?
4. Разрежьте прямоугольник 3×4 на 4 уголка из трёх клеток.
5. Разрежьте квадрат 4×4 на 4 равные фигурки в форме буквы Т (из четырёх клеток).
6. Можно ли сложить квадрат из 7 доминошек? А из 8 доминошек?
7. Разрежьте фигуру на 4 равные части.



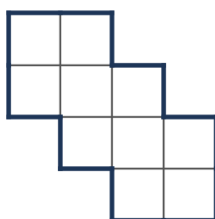
8. Можно ли доску 7×7 без одной угловой клетки разрезать на доминошки?
9. Из квадрата 4×4 вырезали две противоположные угловые клетки. Можно ли оставшуюся часть разрезать на доминошки?
10. Можно ли квадрат 6×6 разрезать на уголки из трёх клеток?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

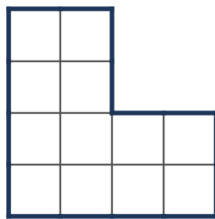
11. Из четырёх одинаковых фигурок какой формы можно сложить квадрат 4×4 : полоска из 4 клеток, квадрат 2×2 , буква Г, буква Т, «зигзаг»?



12. Из шахматной доски вырезали клетки $b1$ и $g8$. Можно ли оставшуюся часть разрезать на доминошки?
13. Разрежьте фигуру на две равные части.



14. Разрежьте фигуру на 4 равные части (каждая часть должна иметь ту же форму, что и вся фигура, но меньшего размера).

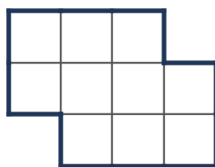


15. Из доски 5×5 вырезали одну клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на доминошки, если вырезана: а) клетка, соседняя с угловой; б) центральная клетка?

16. Можно ли квадрат 3×3 разрезать на уголки из трёх клеток?

17. Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте оставшуюся часть на полосы 1×3 .

18. Разрежьте фигуру на две равные части.



19. Из квадрата 4×4 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на полосы 1×3 ?

20. Сколькими способами можно разрезать прямоугольник 2×4 на доминошки?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Можно ли квадрат 6×6 разрезать на фигурки в форме буквы Т из четырёх клеток?

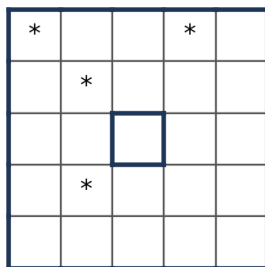
22. Можно ли квадрат 6×6 разрезать на уголки из четырёх клеток (буква Г)?

23. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на полосы 1×4 ?

24. Из доски 8×8 вырезали одну (любую) клетку. Докажите, что оставшуюся часть можно разрезать на уголки из трёх клеток.

25. Сколькими способами можно разрезать прямоугольник 2×10 на доминошки?

26. Разрежьте фигуру по линиям сетки на 4 равные части так, чтобы в каждой части была ровно одна звёздочка.



27. Квадрат 6×6 разрезан на доминошки. Докажите, что найдётся прямая, идущая по линии сетки, которая не разрезает ни одной доминошки.

28. Доска 8×8 разрезана на доминошки. Докажите, что вертикальных доминошек чётное число.

29. Из шахматной доски вырезали одну белую и одну чёрную клетку (любые). Докажите, что оставшуюся часть можно разрезать на доминошки.

30. Доску 8×8 разрезали на 21 полосу 1×3 и одну клетку. Какой могла быть эта клетка?

Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 35. Наглядная геометрия в пространстве

Цели занятия

- повторить свойства куба и прямоугольного параллелепипеда, формулы объёма и площади поверхности;
- научить работать с развёртками куба и определять противоположные грани;
- научить решать задачи о кубиках, составленных из кубиков, и об окрашенном кубе;
- познакомить с задачами об игральном кубике и о видах фигуры спереди, сверху и сбоку.

Планируемые результаты: учащиеся умеют представлять пространственные фигуры, работать с развёртками.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент. Разминка	5 мин	Устное решение задач № 1–3	Отвечают устно, объясняют ответ
2. Теоретическая часть	15 мин	Куб и прямоугольный параллелепипед; Развёртки куба; Кубики из кубиков и окрашенный куб; Игральный кубик; Виды фигуры	Участвуют в беседе, записывают главные факты и приёмы
3. Разбор опорных задач	20 мин	Опорные задачи 1–4	Решают вместе с учителем, записывают образцы решений
4. Решение задач уровней А и Б	30 мин	Задачи № 4–20	Решают самостоятельно или в парах, рассказывают решения у доски
5. Олимпиадные задачи уровня В	15 мин	Задачи № 21–25 (по выбору учителя)	Обсуждают идеи в группах, оформляют решение
6. Итоги занятия. Домашнее задание	5 мин	Главные идеи занятия; домашнее задание: № 26–30 и нерешённые задачи	Формулируют, чему научились

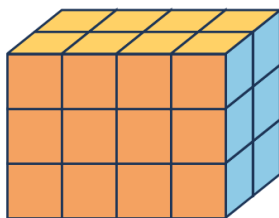
Теоретический материал

Куб и прямоугольный параллелепипед

У прямоугольного параллелепипеда (и у куба) **8 вершин, 12 рёбер и 6 граней**. Рёбра делятся на три группы по 4 равных ребра — длина a , ширина b и высота c . - Объём: $V = a \cdot b \cdot c$; для куба $V = a \cdot a \cdot a$. - Площадь поверхности: $S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$; для куба $S = 6 \cdot a \cdot a$. - Сумма длин всех рёбер: $4 \cdot (a + b + c)$; для куба $12 \cdot a$.

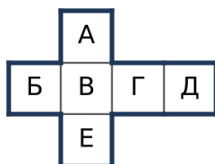
Единицы объёма: 1 см^3 — объём кубика с ребром 1 см; $1 \text{ дм}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \text{ см}^3 = 1 \text{ литр}$; $1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3$.

Если ребро куба увеличить в 2 раза, площадь поверхности увеличится в 4 раза, а объём — в 8 раз.



Развёртки куба

Развёртка — фигура из 6 квадратов, из которой можно сложить куб. Существует 11 различных развёрток. Полезные правила: - в развёртке не может быть четырёх квадратов, образующих квадрат 2×2 , и пяти квадратов в ряд; - **противоположные грани** — это квадраты, стоящие в одном ряду через один квадрат, или квадраты на концах «зигзага» из четырёх квадратов.



В этой развёртке противоположны грани А и Е, Б и Г, В и Д.

Кубики из кубиков и окрашенный куб

Куб $n \times n \times n$ состоит из $n \cdot n \cdot n$ кубиков. Если его окрасить снаружи и распилить на кубики, то: - три окрашенные грани у 8 угловых кубиков; - две — у кубиков на рёбрах, кроме угловых: $12 \cdot (n - 2)$; - одну — у кубиков в середине граней: $6 \cdot (n - 2) \cdot (n - 2)$; - ни одной — у внутренних кубиков: $(n - 2) \cdot (n - 2) \cdot (n - 2)$.

Например, для куба $3 \times 3 \times 3$: 8, 12, 6 и 1 кубик — всего 27.

Игральный кубик

На гранях игрального кубика от 1 до 6 точек, сумма точек на противоположных гранях равна 7 (1 и 6, 2 и 5, 3 и 4). Сумма точек на всех гранях равна 21. Грани 1, 2 и 3 попарно соседние и сходятся в одной вершине.

Виды фигуры

Фигуру из кубиков можно рассматривать спереди, сверху и сбоку. Вид сверху удобно задавать таблицей: в каждой клетке — сколько кубиков в этом столбике. Тогда **вид спереди** показывает наибольшую высоту в каждом столбце таблицы, а **вид сбоку** — наибольшую высоту в каждой строке.

Основные идеи и подходы к решению

- $V = a \cdot b \cdot c$, $S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$, **рёбра**: $4 \cdot (a + b + c)$.
- **Противоположные грани развёртки** — через один квадрат в ряду или на концах зигзага.
- **Окрашенный куб**: углы, рёбра, грани, внутренность — считайте каждую группу отдельно.
- **Игральный кубик**: противоположные грани в сумме дают 7.
- **Вид сверху с числами** помогает считать кубики и строить другие виды.
- **Подсчёт двумя способами**: каждая грань куба содержит 4 вершины, каждая вершина принадлежит 3 граням.
- **Плоские идеи работают и в пространстве**: чётность, раскраски, принцип Дирихле.

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Найдите объём, площадь поверхности и сумму длин всех рёбер прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 2 см, 3 см и 4 см.

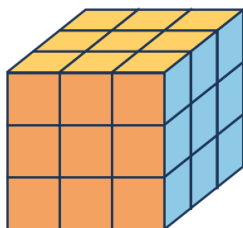
Решение. $V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ см}^3$. Грани — три пары прямоугольников 2×3 , 3×4 и 2×4 : $S = 2 \cdot (6 + 12 + 8) = 52 \text{ см}^2$. Сумма длин рёбер $4 \cdot (2 + 3 + 4) = 36 \text{ см}$.

Ответ: 24 см^3 , 52 см^2 , 36 см .

Опорная задача 2

Деревянный куб окрасили снаружи и распилили на 27 одинаковых кубиков. Сколько кубиков окрашено с трёх сторон? С двух? С одной? Сколько кубиков не окрашено?

Решение. Это куб $3 \times 3 \times 3$.

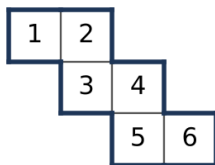


С трёх сторон окрашены угловые кубики — их 8 (по числу вершин). С двух сторон — средние кубики рёбер, по одному на каждом из 12 рёбер: 12. С одной — центральные кубики граней: 6. Не окрашен один центральный кубик. Проверка: $8 + 12 + 6 + 1 = 27$.

Ответ: 8, 12, 6 и 1.

Опорная задача 3

На рисунке — развёртка куба. Какие числа окажутся на противоположных гранях?



Решение. Квадраты 1, 2, 3, 4 образуют «зигзаг»: при складывании квадраты 2 и 3 станут соседними гранями, а 1 и 4 окажутся по разные стороны — противоположными. Так же противоположны 2 и 5 (зигзаг 2, 3, 4, 5) и 3 и 6 (зигзаг 3, 4, 5, 6). Проверить ответ можно, вырезав развёртку из бумаги.

Ответ: 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6.

Опорная задача 4

Три игровых кубика поставили столбиком на стол. На верхней грани верхнего кубика 2 очка. Найдите сумму очков на всех гранях, которые не видны (соприкасаются друг с другом или со столом).

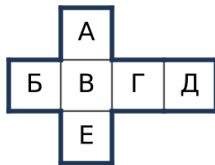
Решение. Невидимы: нижняя грань верхнего кубика, верхняя и нижняя грани среднего, верхняя и нижняя грани нижнего. Нижняя грань верхнего кубика противоположна верхней: $7 - 2 = 5$. У среднего и нижнего кубиков невидимы пары противоположных граней — по 7 очков. Всего $5 + 7 + 7 = 19$.

Ответ: 19.

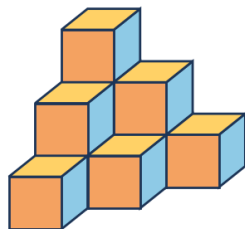
Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Сколько вершин, рёбер и граней у куба? У прямоугольного параллелепипеда?
2. Найдите объём и площадь поверхности куба с ребром 5 см.
3. Сколько кубиков с ребром 1 см помещается в кубе с ребром 4 см? Сколько кубических сантиметров в одном кубическом дециметре?
4. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда $50 \times 30 \times 40$ см. Сколько литров воды в нём помещается?
5. Сумма длин всех рёбер куба 60 см. Найдите объём куба.
6. Какая грань противоположна грани А? Грани Б? Грани В?



7. Сколько очков на всех гранях игрового кубика вместе? Кубик лежит на столе, на верхней грани 5 очков. Найдите сумму очков на четырёх боковых гранях.
8. Сколько кубиков в фигуре? (Все столбики стоят на столе.)



9. Из кубиков с ребром 1 см сложили параллелепипед $2 \times 3 \times 4$ см. Сколько кубиков понадобилось?

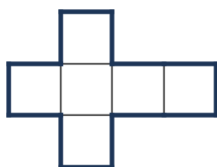
10. Ребро куба увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличились площадь поверхности и объём?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

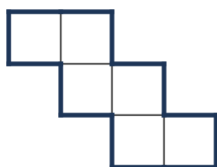
11. Куб окрасили снаружи и распилили на 64 одинаковых кубика. Сколько кубиков окрашено с трёх сторон, с двух, с одной и сколько не окрашено?

12. Какие из фигур являются развёртками куба?

а)



б)



в)



г)



д)

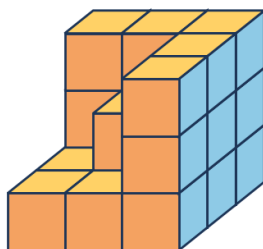


13. Из четырёх кубиков с ребром 1 см сложили брусок $1 \times 1 \times 4$, а затем — брусок $2 \times 2 \times 1$. Найдите площади поверхности обоих брусков.

14. На рисунке — вид сверху на фигуру из кубиков; в каждой клетке указано, сколько кубиков стоит в этом столбике (нижняя строка — передний ряд). Сколько всего кубиков? Нарисуйте вид спереди.

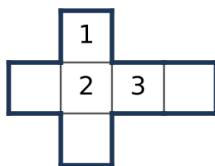
2	1	3
1	2	1
3	1	1

15. Сколько кубиков нужно добавить к фигуре, чтобы получился куб $3 \times 3 \times 3$? (Все столбики стоят на столе, пустот внутри нет.)



16. Деревянный брусок $3 \times 4 \times 5$ см окрасили снаружи и распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько кубиков не окрашено? Сколько окрашено с трёх сторон, с двух сторон, с одной стороны?

17. На развёртке игрального кубика расставлены не все числа. Расставьте остальные (сумма очков на противоположных гранях равна 7).



18. Сколько существует различных прямоугольных параллелепипедов с целыми длинами рёбер (в сантиметрах), объём которых равен 12 см^3 ?

19. Куб с ребром 1 м распилили на кубики с ребром 1 см и выложили их в один ряд вплотную. Какой длины получился ряд?

20. Куб окрасили снаружи и распилили на одинаковые кубики. Кубиков с одной окрашенной гранью оказалось 96. На сколько кубиков распилили куб?

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Фигура склеена из кубиков (кубики могут соприкасаться и только рёбрами). Вид спереди, вид сверху и вид сбоку — квадраты 3×3 . Какое наименьшее и какое наибольшее количество кубиков может быть в фигуре?

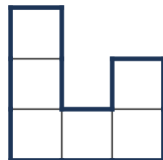
22. Имеется 14 белых и 13 чёрных кубиков. Можно ли сложить из них куб $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы любые два кубика, соприкасающиеся гранями, были разного цвета, а центральный кубик был белым?

23. Из 27 игральных кубиков сложили куб $3 \times 3 \times 3$. Какая наименьшая сумма очков может быть на поверхности большого куба?

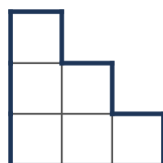
24. Сколькими способами можно покрасить грани куба в белый и чёрный цвета? Раскраски, которые совмещаются поворотом куба, считаются одинаковыми.

25. Фигура сложена из кубиков, вид сверху — квадрат 3×3 . Вид спереди и вид сбоку показаны на рисунках. Какое наименьшее и какое наибольшее количество кубиков может быть в фигуре?

Вид спереди:



Вид сбоку:



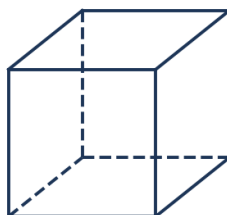
26. Сколько существует различных прямоугольных параллелепипедов с целыми длинами рёбер, у которых сумма длин всех рёбер равна 24 см? У какого из них наибольший объём?

27. На гранях кубика написаны числа от 1 до 6. Для каждой вершины сложили три числа, написанные на гранях, сходящихся в этой вершине. Затем сложили все 8 полученных сумм. Может ли получиться 100?

28. Куб окрасили снаружи и распилили на одинаковые кубики. Может ли оказаться, что окрашенных кубиков столько же, сколько неокрашенных?

29. Муравей хочет обойти все рёбра куба, проходя по каждому ребру ровно один раз. Удастся ли ему это?

30. Можно ли расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3, ..., 8 так, чтобы суммы четырёх чисел на всех гранях были одинаковыми?



Домашнее задание

Задачи № 26–30, а также задачи уровней А–В, не решённые на занятии. Ответы и решения ко всем задачам занятия приведены в разделе «Ответы и решения».

Занятие 36. Итоговое занятие. Математическая олимпиада

Цели занятия

- обобщить методы решения олимпиадных задач, изученные в курсе;
- научить выбирать метод решения по условию задачи;
- закрепить правила оформления решений;
- провести итоговую олимпиаду и разобрать её задачи.

Планируемые результаты: учащиеся умеют выбирать метод решения нестандартной задачи.

Оборудование: доска, раздаточный материал с задачами, презентация к занятию, клетчатая бумага.

Ход занятия

Этап	Время	Содержание	Деятельность учащихся
1. Организационный момент	3 мин	Правила олимпиады, критерии оценивания (7 баллов за задачу)	Знакомятся с правилами
2. Обобщение методов курса	12 мин	Методы курса и признаки, по которым их узнают; оформление решений; опорные задачи 1–4 (кратко)	Называют метод для каждой опорной задачи
3. Итоговая олимпиада	60 мин	Задачи № 21–25 (вариант олимпиады)	Решают задачи самостоятельно, оформляют решения письменно
4. Разбор задач олимпиады	12 мин	Решения задач № 21–25, типичные ошибки	Сравнивают свои решения с образцом
5. Подведение итогов курса	3 мин	Итоги года; задачи № 1–20 и 26–30 — для самостоятельной подготовки	Отмечают, какие методы освоены

Теоретический материал

Методы курса

За год мы познакомились с основными методами решения олимпиадных задач. Полезно помнить, по каким признакам их узнавать: - **чётность** — в задаче есть суммы, чередование, разбиение на пары, обход по кругу; - **делимость и остатки** — последние цифры, признаки делимости, «какой остаток даёт...»; - **перебор и дерево вариантов** — «сколькими способами», «найдите все...»; перебор должен быть полным и без

повторений; - **правило произведения и правило суммы** — подсчёт чисел, слов, маршрутов; - **решение с конца** — известен результат последовательных действий; - **метод таблиц и рассуждение от противного** — логические задачи, рыцари и лжецы; - **принцип Дирихле** — «докажите, что найдутся два...», «сколько нужно взять, чтобы наверняка...»; - **оценка плюс пример** — «наибольшее», «наименьшее»; - **принцип крайнего** — рассмотрите самый большой, самый маленький, самый левый объект; - **инвариант** — процесс с повторяющимися операциями: «может ли получиться...»; - **выигрышные позиции и симметрия** — игры; - **раскраски** — разрезания и замощения, обходы досок; - **графы и подсчёт двумя способами** — знакомства, дороги, турниры.

Как оформлять решение

- 1) Ответ и решение должны быть **понятны читателю**, который не знает, как вы думали.
- 2) Если ответ — пример (разрезание, расстановка, алгоритм), **приведите пример и проверьте**, что он подходит.
- 3) Если нужно доказать, что чего-то нельзя, — **объясните почему** (ссылка на чётность, раскраску, оценку); одних проб недостаточно.
- 4) В задачах на «наибольшее» и «наименьшее» нужны **и оценка, и пример**.
- 5) В переборе покажите, что рассмотрены **все случаи**.
- 6) В конце запишите **ответ**.

Как вести себя на олимпиаде

Прочитайте все задачи и начните с той, которая кажется самой понятной. Если задача не получается, попробуйте маленькие числа, нарисуйте картинку, решите задачу «с конца» или для частного случая — и вернитесь к ней позже. Оставьте время на запись решений: решённая, но не записанная задача не засчитывается.

Итоговая олимпиада

Задачи 21–25 этого занятия можно использовать как вариант итоговой олимпиады (60 минут, каждая задача оценивается из 7 баллов). Задачи 26–30 — для самых сильных участников и для домашнего решения.

Основные идеи и подходы к решению

- **Определите тип задачи** по ключевым словам: «найдутся», «наибольшее», «может ли», «кто выиграет», «сколькими способами».
- **Попробуйте маленькие случаи** — они подскажут закономерность.
- **Ищите то, что не меняется** (инвариант) и что можно посчитать двумя способами.
- **«Да» — пример, «нет» — доказательство.**
- **Наибольшее и наименьшее — оценка плюс пример.**
- **Оформляйте решение полно и проверяйте ответ.**

Опорные задачи с решениями

Опорная задача 1

Решите ребус: $УДАР + УДАР = ДРАКА$ (одинаковые буквы — одинаковые цифры, разные — разные).

Решение. Сумма двух четырёхзначных чисел меньше 20 000, поэтому $Д = 1$. Тогда $2 \cdot У1АР = 1РАКА$, и $У$ не меньше 5. В разряде сотен $2 \cdot 1$ плюс перенос из десятков (0 или 1) дают $А$, значит, $А = 2$ или 3 и переноса в тысячи нет. В разряде единиц $2 \cdot Р$ оканчивается цифрой $А$ — чётной, значит, $А = 2$, и переноса из десятков не было. Тогда $2 \cdot Р$ оканчивается двойкой: $Р = 1$ или $Р = 6$; $Д = 1$, значит, $Р = 6$, и из единиц переносится 1. Десятки: $2 \cdot 2 + 1 = 5 = К$. Тысячи: $2 \cdot У = 16$, $У = 8$. Проверка: $8126 + 8126 = 16252$.

Ответ: $8126 + 8126 = 16252$.

Опорная задача 2

Двое по очереди ставят ладьи на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Каждая новая ладья занимает новую горизонталь и новую вертикаль. Пока свободны хотя бы одна горизонталь и одна вертикаль, ладью можно поставить на их пересечение. Свободных горизонталей и вертикалей после каждого хода становится на одну меньше, поэтому игра всегда длится ровно 8 ходов, как бы ни играли. Восьмой ход делает второй игрок, а первый после этого не может сходить.

Ответ: второй игрок (при любой игре).

Опорная задача 3

Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел 1, 2, ..., 20 так, чтобы ни одно выбранное число не было вдвое больше другого выбранного?

Решение. *Оценка.* Разобьём числа на цепочки, в которых каждое следующее число вдвое больше предыдущего: (1, 2, 4, 8, 16), (3, 6, 12), (5, 10, 20), (7, 14), (9, 18), (11), (13), (15), (17), (19). Из цепочки нельзя брать два соседних числа, поэтому из цепочки длины 5 можно взять не больше 3 чисел, длины 3 — не больше 2, длины 2 и 1 — не больше 1. Всего не больше $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 5 \cdot 1 = 14$.

Пример: 1, 4, 16, 3, 12, 5, 20, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 — 14 чисел, ни одно не вдвое больше другого.

Ответ: 14.

Опорная задача 4

На доске написано число 1. Каждую минуту к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123 456?

Решение. Число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 3. Поэтому если число даёт остаток 1, то после операции получится число с остатком $1 + 1 = 2$, а если остаток 2 — то с остатком $2 + 2 = 4$, то есть 1. Начинаем с 1: остатки будут чередоваться 1, 2, 1, 2, ... и никогда не станут равны 0. А число 123 456 делится на 3 (сумма цифр 21).

Ответ: не может.

Задачи для решения

Уровень А. Разминка (задачи 1–10)

1. Сумма двух чисел равна 77, одно из них в 6 раз больше другого. Найдите эти числа.
2. Сколько существует двузначных чисел, обе цифры которых нечётны?
3. Маша, Оля и Таня носят фамилии Белова, Чернова и Рыжова. Белова — не Маша. Чернова — не Оля и не Маша. Какая фамилия у каждой девочки?
4. На какую цифру оканчивается произведение двадцати двоек $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$?
5. Сейчас понедельник, 12 часов дня. Какой день недели и который час будет через 100 часов?
6. Докажите, что среди любых 9 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 8.
7. Как с помощью бидонов на 3 литра и на 5 литров набрать из реки ровно 4 литра воды?
8. Среди 9 монет одна фальшивая — она легче остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?
9. Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 20?
10. Можно ли разменять 25 рублей с помощью десяти монет достоинством 1, 3 и 5 рублей?

Уровень Б. Основные задачи (задачи 11–20)

11. Из двух посёлков, расстояние между которыми 60 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста со скоростями 12 км/ч и 18 км/ч. Одновременно с первым велосипедистом вылетела муха со скоростью 30 км/ч. Она летает между велосипедистами, пока они не встретятся. Какое расстояние пролетит муха?
12. Первая труба наполняет бассейн за 3 часа, вторая — за 6 часов. За сколько часов наполнят бассейн обе трубы вместе?
13. Отцу 40 лет, а сыну 10 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?
14. Задумали число, умножили его на 3, прибавили 7, результат разделили на 2 и получили 14. Какое число задумали?
15. На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Встретились трое островитян А, Б и В. А сказал: «Мы все лжецы». Б сказал: «Среди нас ровно один рыцарь». Кто есть кто?
16. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых все цифры различны?
17. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 10. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их разность (из большего вычитается меньшее). Так делают, пока не останется одно число. Может ли оно оказаться равным 0?
18. В кучке 20 камней. Двое игроков по очереди берут из неё 1, 2 или 3 камня. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

19. Сколько всего квадратов (любых размеров) можно найти на клетчатом прямоугольнике 3×4 ?

20. Найдите наименьшее натуральное число, большее 1, которое при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт остаток 1.

Уровень В. Олимпиадные задачи (задачи 21–30)

21. Сумма нескольких различных натуральных чисел равна 50. Какое наибольшее количество слагаемых может быть?

22. Докажите, что из любых пяти целых чисел можно выбрать три, сумма которых делится на 3.

23. Среди трёх монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету и узнать, легче она или тяжелее?

24. Может ли в стране, где из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

25. Найдите наименьшее натуральное число, все цифры которого различны, а сумма цифр равна 30.

26. Куб $3 \times 3 \times 3$ сложен из 27 кубиков. Жучок начинает путь в угловом кубике и переходит каждый раз в соседний (по грани) кубик. Может ли он побывать в каждом кубике ровно по одному разу и закончить путь в центральном кубике?

27. За круглым столом сидят 10 человек — рыцари и лжецы. Каждый из них сказал: «Мой сосед справа — лжец». Сколько рыцарей за столом?

28. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Всего было сыграно 45 партий. Сколько было участников?

29. В клетках таблицы 8×8 записаны числа, причём каждое число равно среднему арифметическому чисел в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа в таблице равны.

30. На доске написано число 60. Двое игроков по очереди вычитают из числа на доске любой его делитель, меньший самого числа, и записывают результат вместо прежнего числа. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (на доске число 1). Кто выиграет при правильной игре?

Домашнее задание

Задачи № 1–20 и 26–30 — для самостоятельной подготовки к олимпиадам. Ответы и решения приведены в разделе «Ответы и решения».