

Рыбная Слобода 10  
октября 2026



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ · ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

# Случайные величины и вероятности событий

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Формула Бернулли, формулы полной вероятности и Байеса. Решение задач 1–18



# План занятия

## Часть 1. Дискретные случайные величины

- 1 Закон распределения дискретной случайной величины — таблица
- 2 Математическое ожидание, дисперсия и их свойства
- 3 Решение задач 1–10 с таблицами распределения

## Часть 2. Вероятности событий

- 4 Формула Бернулли, условная вероятность
- 5 Формула полной вероятности и формула Байеса
- 6 Решение задач 11–18



# 1

## Дискретные случайные величины

Закон распределения, математическое ожидание, дисперсия. Задачи 1–10

# Закон распределения — в виде таблицы

Дискретная случайная величина  $X$  принимает отдельные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Закон распределения удобно записывать таблицей:

|     |       |       |         |       |
|-----|-------|-------|---------|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

## Условие нормировки

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Проверяем его в каждой задаче.

## Запись «матрицей» — то же самое

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

В решениях переводим её в таблицу.

# Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

**i** Смысл:  $M(X)$  — «центр» распределения, среднее значение величины при большом числе испытаний. На диаграммах в решениях он отмечен пунктиром.

# Свойства математического ожидания

1  $M(C) = C$

Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной

2  $M(CX) = C M(X)$

Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания

3  $M(XY) = M(X) M(Y)$

Для независимых величин (и для любого их числа)

4  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

Для любых величин (и для любого их числа)

5

Математическое ожидание несмещённой оценки совпадает с оцениваемым математическим ожиданием.

**Следствие (пригодится в задаче 10):**

$$M(aX + bY + c) = a M(X) + b M(Y) + c$$

# Дисперсия

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения величины от её математического ожидания.

По определению

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Удобная формула для вычислений

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Второй момент считаем так же, как  $M(X)$ , только значения возводим в квадрат:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

# Свойства дисперсии. Среднее квадратическое отклонение

1  $D(C) = 0$

Дисперсия постоянной  
равна нулю

2  $D(CX) = C^2 D(X)$

Постоянный множитель  
выносится в квадрате

3  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$  Для независимых величин

4  $D_{\text{несмещ}} = \frac{n}{n-1} D$

Несмещённая оценка  
дисперсии

Среднее квадратическое  
(стандартное) отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Следствие (для задачи 10)

для независимых  $X$  и  $Y$ :

$$D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$$

# Схема решения задач

1

## Таблица

Составить таблицу  
распределения и  
проверить

$$\sum p_i = 1$$

2

## Среднее

Найти математическое  
ожидание

$$M(X) = \sum x_i p_i$$

3

## Разброс

Найти второй момент и  
дисперсию

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

4

## Отклонение

Извлечь корень из  
дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Удобно дописывать к таблице строки  $x_i p_i$  и  $x_i^2 p_i$  — тогда суммы видны сразу.

1

## Задача 1. Условие

Вычислите математическое ожидание случайной величины  $X$ , если известно её распределение:

| $X$ | 0   | 1    | 3    | 5   | 7   |
|-----|-----|------|------|-----|-----|
| $P$ | 0,2 | 0,25 | 0,15 | 0,1 | 0,3 |

Найти:  $M(X)$

## 1

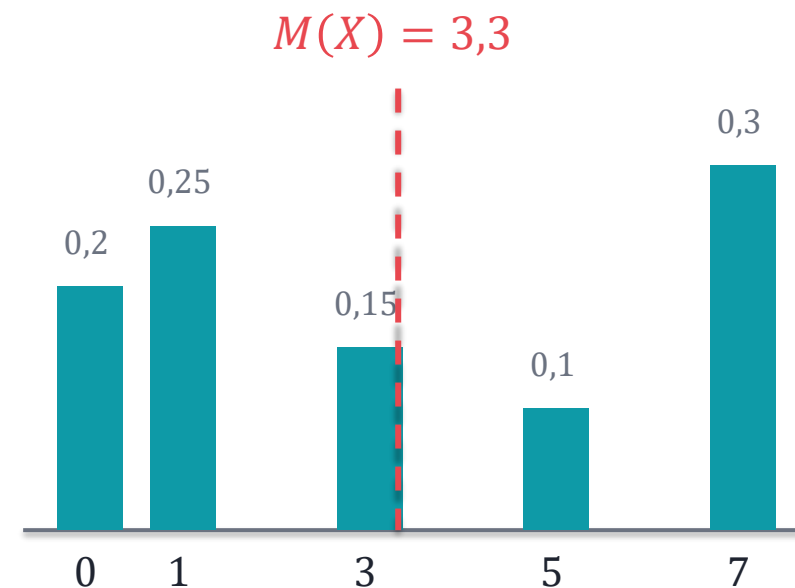
## Задача 1. Решение

|           |     |      |      |     |     |
|-----------|-----|------|------|-----|-----|
| $x_i$     | 0   | 1    | 3    | 5   | 7   |
| $p_i$     | 0,2 | 0,25 | 0,15 | 0,1 | 0,3 |
| $x_i p_i$ | 0   | 0,25 | 0,45 | 0,5 | 2,1 |

Проверка:  $0,2 + 0,25 + 0,15 + 0,1 + 0,3 = 1$

Складываем строку  $x_i p_i$ :

$$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,3 = 0,25 + 0,45 + 0,5 + 2,1 = 3,3$$



Ответ

$$M(X) = 3,3$$

## 2

## Задача 2. Условие

Пластиковые бутылки с питьевой водой продаются поштучно, либо упаковками по 9 или 12 штук. Известно, что в среднем 72 покупателя из 100 эту воду не покупают, 14 покупают одну бутылку, 9 человек — упаковку, в которой 9 бутылок, и 5 человек берут упаковку, в которой 12 бутылок.

**Найдите математическое ожидание случайной величины «количество бутылок в одной покупке».**

**72 из 100**

не покупают: 0 бут.

**14 из 100**

одна бутылка: 1 бут.

**9 из 100**

упаковка: 9 бут.

**5 из 100**

упаковка: 12 бут.

## 2

## Задача 2. Решение

Случайная величина  $X$  — количество бутылок в одной покупке

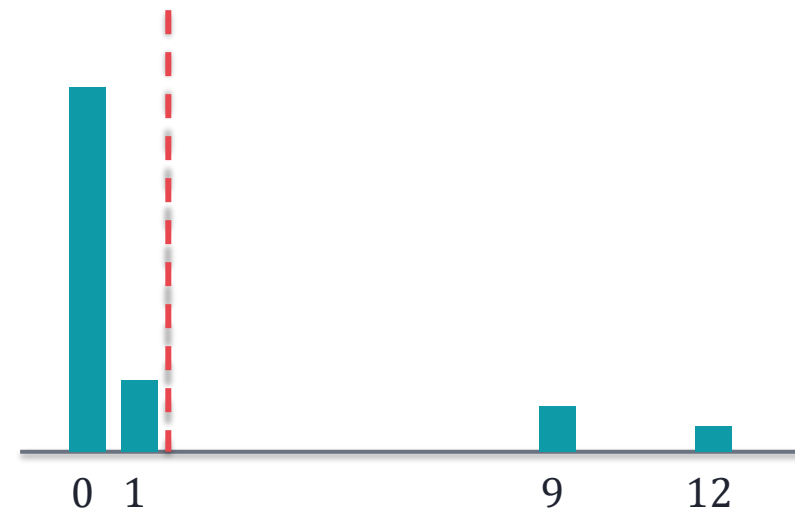
|           |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|
| $x_i$     | 0    | 1    | 9    | 12   |
| $p_i$     | 0,72 | 0,14 | 0,09 | 0,05 |
| $x_i p_i$ | 0    | 0,14 | 0,81 | 0,6  |

Вероятности:  $p_i = \frac{\text{число покупателей}}{100}$

Проверка:  $0,72 + 0,14 + 0,09 + 0,05 = 1$

$$M(X) = 0 \cdot 0,72 + 1 \cdot 0,14 + 9 \cdot 0,09 + 12 \cdot 0,05 = 0,14 + 0,81 + 0,6 = 1,55$$

$$M(X) = 1,55$$



Ответ

$$M(X) = 1,55$$

## 3

## Задача 3. Условие

Страховая компания заключает с клиентами страховые договоры (полисы). При наступлении страхового случая клиент получает выплату 700 тысяч рублей.

Вероятность события «выплата по отдельно взятому договору» равна 0,02.

**Математическое ожидание случайной величины «доход страховой компании от продажи одного полиса» равно 1000 рублей. Найдите стоимость полиса в рублях.**

**700 000 ₽**

выплата при страховом случае

**0,02**

вероятность выплаты

**1 000 ₽**

средний доход с полиса

## 3

## Задача 3. Решение

Пусть  $S$  — стоимость полиса (руб.),  $X$  — доход компании от одного полиса

Доход принимает два значения:

| Событие | выплаты нет       | выплата есть   |
|---------|-------------------|----------------|
| $x_i$   | $S$               | $S - 700\,000$ |
| $p_i$   | $1 - 0,02 = 0,98$ | $0,02$         |

$$\begin{aligned} M(X) &= 0,98S + 0,02(S - 700\,000) = \\ &= S - 0,02 \cdot 700\,000 = S - 14\,000 \end{aligned}$$

По условию  $M(X) = 1000$ :

$$S - 14\,000 = 1000 \Rightarrow S = 15\,000$$

**Смысл**

Средняя выплата по одному полису:

$$0,02 \cdot 700\,000 = 14\,000$$

Цена полиса покрывает её и даёт ещё 1000 Р дохода.

**Ответ**

$$S = 15\,000 \text{ руб.}$$

## 4 Задача 4. Условие

Известно, что случайная величина  $Y$  подчиняется распределению:

| $Y$ | 0   | 2    | 4    | 6    | 8   | 10   |
|-----|-----|------|------|------|-----|------|
| $P$ | 0,2 | 0,15 | 0,05 | 0,25 | 0,1 | 0,25 |

**Найдите вероятность события  $2 < Y \leq 11$ .**

## 4

## Задача 4. Решение

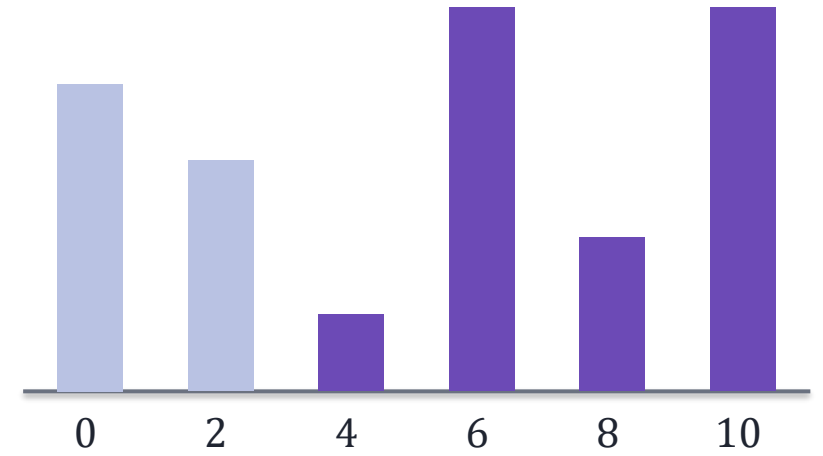
Условию  $2 < Y \leq 11$  удовлетворяют значения 4, 6, 8, 10 (значение 2 не входит — неравенство строгое). Они выделены в таблице:

| $y_i$ | 0   | 2    | 4    | 6    | 8   | 10   |
|-------|-----|------|------|------|-----|------|
| $p_i$ | 0,2 | 0,15 | 0,05 | 0,25 | 0,1 | 0,25 |

Проверка:  $0,2 + 0,15 + 0,05 + 0,25 + 0,1 + 0,25 = 1$

Складываем выделенные вероятности:

$$P(2 < Y \leq 11) = P(Y = 4) + P(Y = 6) + P(Y = 8) + P(Y = 10) = 0,05 + 0,25 + 0,1 + 0,25 = 0,65$$



Ответ

$$P(2 < Y \leq 11) = 0,65$$

5

## Задача 5. Условие

Случайная величина  $Z$  распределена по закону

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию случайной величины  $Z$ .

В виде таблицы:

| $Z$ | 0             | 1             |
|-----|---------------|---------------|
| $P$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

## 5

## Задача 5. Решение

|             |               |               |
|-------------|---------------|---------------|
| $z_i$       | 0             | 1             |
| $p_i$       | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $z_i p_i$   | 0             | $\frac{2}{5}$ |
| $z_i^2 p_i$ | 0             | $\frac{2}{5}$ |

Проверка:  $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$

$$M(Z) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$M(Z^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$D(Z) = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{10}{25} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25} = 0,24$$

**Заметим**

Для величины со значениями 0 и 1 всегда  $Z^2 = Z$ ,  
поэтому  $D(Z) = p(1 - p) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$ .

**Ответ**

$$D(Z) = \frac{6}{25} = 0,24$$

## 6

## Задача 6. Условие

Всего выпущено 10 000 лотерейных билетов. Сумма выигрышей и число выигрышных билетов показаны в таблице.

**Найдите математическое ожидание случайной величины «выигрыш на один билет», который получит один случайный покупатель лотерейного билета. Ответ дайте в рублях.**

| Выигрыш, руб.            | 100 | 1000 | 5000 | 10 000 | 50 000 |
|--------------------------|-----|------|------|--------|--------|
| Число выигрышных билетов | 100 | 50   | 10   | 2      | 1      |

## 6

## Задача 6. Решение

$X$  — выигрыш на один билет (руб.)

Невыигрышных билетов:  $10\,000 - (100 + 50 + 10 + 2 + 1) = 10\,000 - 163 = 9837$ . Вероятность каждого значения  $p_i = \frac{\text{число билетов}}{10\,000}$ :

|           |        |      |       |       |        |        |
|-----------|--------|------|-------|-------|--------|--------|
| $x_i$     | 0      | 100  | 1000  | 5000  | 10 000 | 50 000 |
| $p_i$     | 0,9837 | 0,01 | 0,005 | 0,001 | 0,0002 | 0,0001 |
| $x_i p_i$ | 0      | 1    | 5     | 5     | 2      | 5      |

Проверка:  $0,9837 + 0,01 + 0,005 + 0,001 + 0,0002 + 0,0001 = 1$

$$M(X) = 0 + 1 + 5 + 5 + 2 + 5 = 18$$

Иначе: общий фонд 180 000 руб. делим на 10 000 билетов.

Ответ

$$M(X) = 18 \text{ руб.}$$

## 7

## Задача 7. Условие

Найдите дисперсию случайной величины  $X$ , если известно её распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

В виде таблицы:

| $X$ | 1             | 2             | 3             |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| $P$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

## 7

## Задача 7. Решение

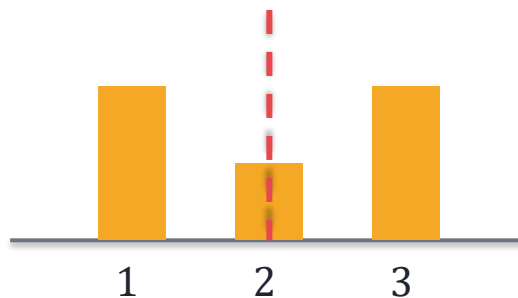
|             |               |               |                |
|-------------|---------------|---------------|----------------|
| $x_i$       | 1             | 2             | 3              |
| $p_i$       | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$  |
| $x_i p_i$   | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{6}{5}$  |
| $x_i^2$     | 1             | 4             | 9              |
| $x_i^2 p_i$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{18}{5}$ |

$$M(X) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$M(X^2) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{18}{5} = \frac{24}{5}$$

$$D(X) = \frac{24}{5} - 2^2 = \frac{24}{5} - \frac{20}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$M(X) = 2$$



Ответ

$$D(X) = 0,8$$

## 8

## Задача 8. Условие

Вычислите стандартное отклонение случайной величины  $Y$ , которая подчиняется распределению

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

В виде таблицы:

| $Y$ | 0   | 4   |
|-----|-----|-----|
| $P$ | 0,8 | 0,2 |

## 8

## Задача 8. Решение

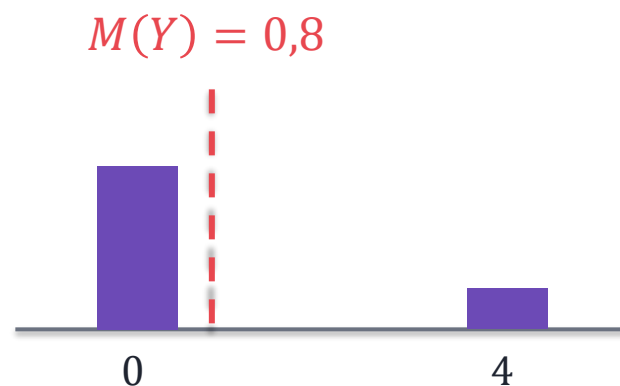
|             |     |     |
|-------------|-----|-----|
| $y_i$       | 0   | 4   |
| $p_i$       | 0,8 | 0,2 |
| $y_i p_i$   | 0   | 0,8 |
| $y_i^2$     | 0   | 16  |
| $y_i^2 p_i$ | 0   | 3,2 |

$$M(Y) = 0 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,2 = 0,8$$

$$M(Y^2) = 0^2 \cdot 0,8 + 4^2 \cdot 0,2 = 3,2$$

$$D(Y) = 3,2 - 0,8^2 = 3,2 - 0,64 = 2,56$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{2,56} = 1,6$$



Ответ

$$\sigma(Y) = 1,6$$

## 9

## Задача 9. Условие

Найдите стандартное отклонение случайной величины, имеющей распределение:

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 1   | 3   | 4   |
| $P$ | 0,2 | 0,7 | 0,1 |

Найти:  $\sigma(X)$

## 9

## Задача 9. Решение

|             |     |     |     |
|-------------|-----|-----|-----|
| $x_i$       | 1   | 3   | 4   |
| $p_i$       | 0,2 | 0,7 | 0,1 |
| $x_i p_i$   | 0,2 | 2,1 | 0,4 |
| $x_i^2$     | 1   | 9   | 16  |
| $x_i^2 p_i$ | 0,2 | 6,3 | 1,6 |

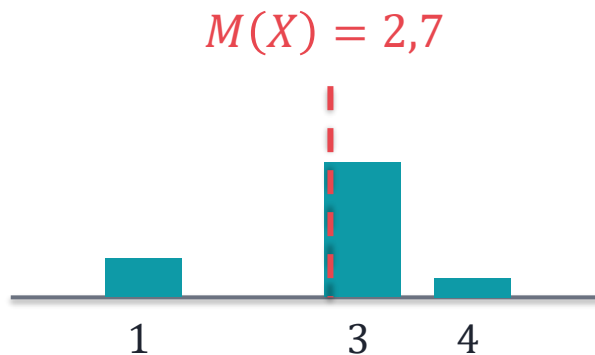
Проверка:  $0,2 + 0,7 + 0,1 = 1$

$$M(X) = 0,2 + 2,1 + 0,4 = 2,7$$

$$M(X^2) = 0,2 + 6,3 + 1,6 = 8,1$$

$$D(X) = 8,1 - 2,7^2 = 8,1 - 7,29 = 0,81$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,81} = 0,9$$



Ответ

$$\sigma(X) = 0,9$$

## 10 Задача 10. Условие

Для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  заданы законы распределения:

| $X$    | 0    | 1    | 2   |
|--------|------|------|-----|
| $P(X)$ | 0,25 | 0,35 | $a$ |

| $Y$    | -1   | 0   | 1   |
|--------|------|-----|-----|
| $P(Y)$ | 0,24 | $a$ | $b$ |

Найдите

$$M(7X - 18Y + 6) = M_1, \quad D(2X - 3Y + 6) = D_2,$$

результат округлите до сотых.

## 10

## Задача 10. Решение

Шаг 1. Находим параметры  $a$  и  $b$  из условия нормировки

Для  $X$ :

$$0,25 + 0,35 + a = 1$$

$$a = 1 - 0,6 = 0,4$$

Для  $Y$  (тот же параметр  $a = 0,4$ ):

$$0,24 + 0,4 + b = 1$$

$$b = 1 - 0,64 = 0,36$$

Законы распределения полностью известны:

| $x_i$ | 0    | 1    | 2   |
|-------|------|------|-----|
| $p_i$ | 0,25 | 0,35 | 0,4 |

| $y_j$ | -1   | 0   | 1    |
|-------|------|-----|------|
| $q_j$ | 0,24 | 0,4 | 0,36 |

10

## Задача 10. Решение

Шаг 2. Числовые характеристики  $X$

| $x_i$       | 0    | 1    | 2   |
|-------------|------|------|-----|
| $p_i$       | 0,25 | 0,35 | 0,4 |
| $x_i p_i$   | 0    | 0,35 | 0,8 |
| $x_i^2 p_i$ | 0    | 0,35 | 1,6 |

$$M(X) = 0 + 0,35 + 0,8 = 1,15$$

$$M(X^2) = 0 + 0,35 + 1,6 = 1,95$$

$$D(X) = 1,95 - 1,15^2 = \\ = 1,95 - 1,3225 = 0,6275$$

$$M(X) = 1,15 \quad D(X) = 0,6275$$

## 10

## Задача 10. Решение

Шаг 3. Числовые характеристики  $Y$ 

|             |       |     |      |
|-------------|-------|-----|------|
| $y_j$       | -1    | 0   | 1    |
| $q_j$       | 0,24  | 0,4 | 0,36 |
| $y_j q_j$   | -0,24 | 0   | 0,36 |
| $y_j^2 q_j$ | 0,24  | 0   | 0,36 |

$$M(Y) = -0,24 + 0 + 0,36 = 0,12$$

$$M(Y^2) = 0,24 + 0 + 0,36 = 0,6$$

$$D(Y) = 0,6 - 0,12^2 =$$

$$= 0,6 - 0,0144 = 0,5856$$

$$M(Y) = 0,12 \quad D(Y) = 0,5856$$

## Задача 10. Решение

Шаг 4. Применяем свойства математического ожидания и дисперсии

**Математическое ожидание суммы — сумма ожиданий, константы выносятся:**

$$\begin{aligned} M_1 &= M(7X - 18Y + 6) = 7M(X) - 18M(Y) + 6 = \\ &= 7 \cdot 1,15 - 18 \cdot 0,12 + 6 = 8,05 - 2,16 + 6 = 11,89 \end{aligned}$$

**$X$  и  $Y$  независимы;  $D(6) = 0$ , множители — в квадрате:**

$$\begin{aligned} D_2 &= D(2X - 3Y + 6) = 2^2 D(X) + (-3)^2 D(Y) = \\ &= 4 \cdot 0,6275 + 9 \cdot 0,5856 = \\ &= 2,51 + 5,2704 = 7,7804 \approx 7,78 \end{aligned}$$

**Ответ**

$$\begin{aligned} M_1 &= 11,89 \\ D_2 &\approx 7,78 \end{aligned}$$

# 2

## Вероятности событий

Формула Бернулли, условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса. Задачи 11–18

# Повторные испытания. Формула Бернулли

Испытания называются независимыми относительно события  $A$ , если вероятность появления  $A$  в каждом из них не зависит от результатов остальных испытаний. Пусть в каждом испытании  $P(A) = p$ .

Вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит ровно  $m$  раз:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} = \frac{n!}{m! (n - m)!} p^m (1 - p)^{n-m}$$

$n$

число испытаний

$m$

сколько раз наступило  $A$

$p$

вероятность  $A$  в одном  
испытании

$C_n^m$

число сочетаний из  $n$  по  $m$

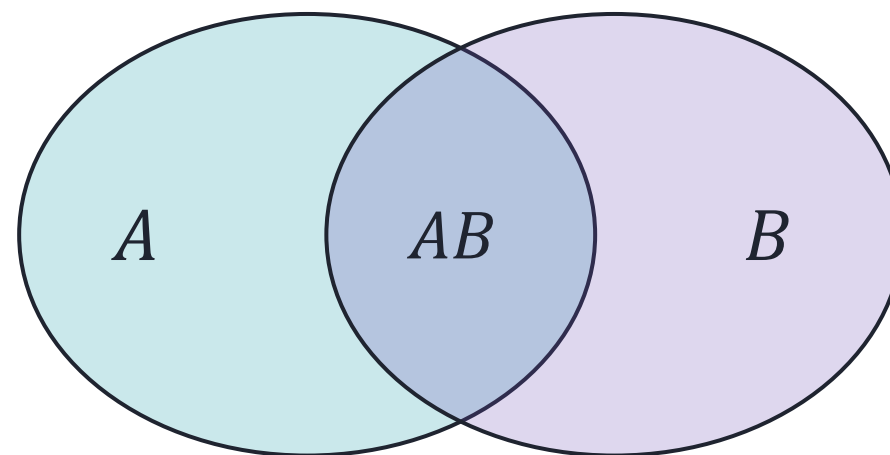
# Условная вероятность

Условной вероятностью  $P(B|A)$  называется вероятность события  $B$ , найденная при условии, что событие  $A$  уже произошло.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

**Если все элементарные исходы равновозможны:**

$$P(B|A) = \frac{N(AB)}{N(A)}$$



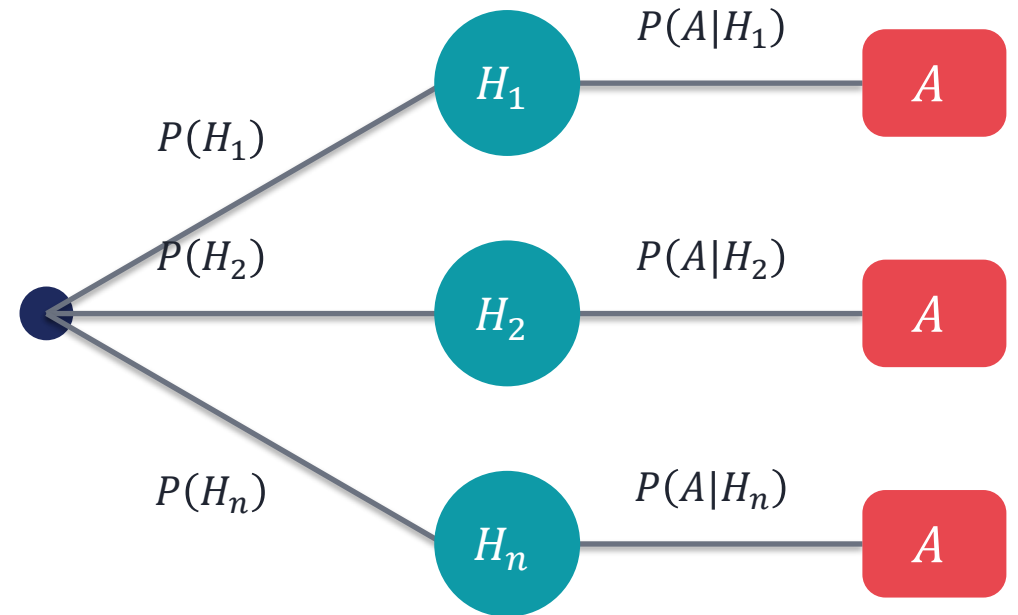
Условие « $A$  произошло» сужает множество исходов до  $A$ . Благоприятные для  $B$  исходы теперь — только общая часть  $AB$ .

# Формула полной вероятности

Пусть событие  $A$  может произойти только вместе с одним из несовместных событий (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу:

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$$

Известны вероятности гипотез  $P(H_i)$  и условные вероятности  $P(A|H_i)$ . Тогда



$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$$

# Формула Байеса

Пусть  $H_1, \dots, H_n$  — полная группа несовместных гипотез с известными  $P(H_i)$ . В результате опыта наступило событие  $A$ , причём известны  $P(A|H_i)$ . Требуется найти вероятности гипотез после опыта, т. е.  $P(H_i|A)$ .

*Теорема. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, делённому на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) P(A|H_k)$$

до опыта

$P(H_i)$



после опыта

$P(H_i|A)$

Удобно вести таблицу гипотез:  $P(H_i)$ ,  $P(A|H_i)$  и их произведения — сумма произведений даёт  $P(A)$ .

## 11 Задача 11. Условие

В магазине куплено 13 одинаковых луковиц гиацинтов. Вероятность того, что каждая отдельная луковица успешно прорастёт, равна 0,8.

**Во сколько раз вероятность события «прорастёт ровно 8 луковиц» больше вероятности события «прорастёт ровно 5 луковиц»?**

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

$n = 13$

независимых испытаний

$p = 0,8$

вероятность прорасти

**8 и 5**

сравниваем числа успехов

## 11 Задача 11. Решение

Схема Бернулли:  $n = 13$ ,  $p = 0,8$ ,  $1 - p = 0,2$

$$P_{13}(8) = C_{13}^8 \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^5$$

$$P_{13}(5) = C_{13}^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^8$$

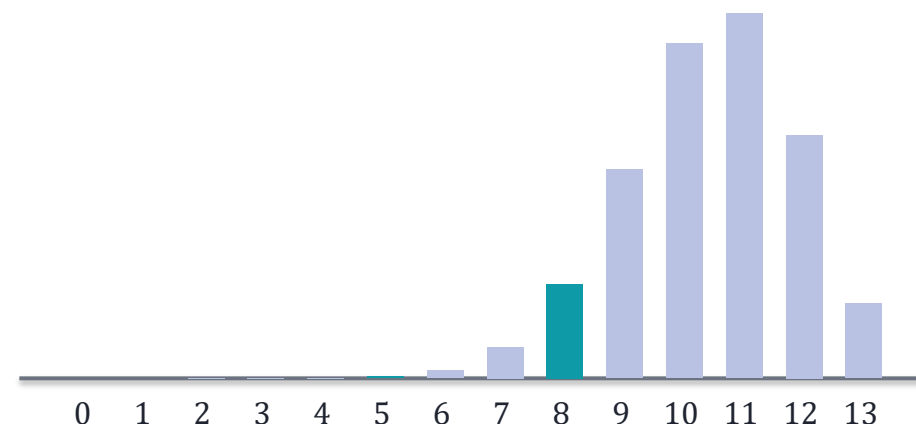
Так как  $C_{13}^8 = C_{13}^5 = 1287$ , коэффициенты сокращаются:

$$\frac{P_{13}(8)}{P_{13}(5)} = \frac{0,8^8 \cdot 0,2^5}{0,8^5 \cdot 0,2^8} = \frac{0,8^3}{0,2^3} = 4^3 = 64$$

Для проверки:

$$P_{13}(8) \approx 0,0691, \quad P_{13}(5) \approx 0,0011$$

Распределение числа проросших луковиц



Ответ

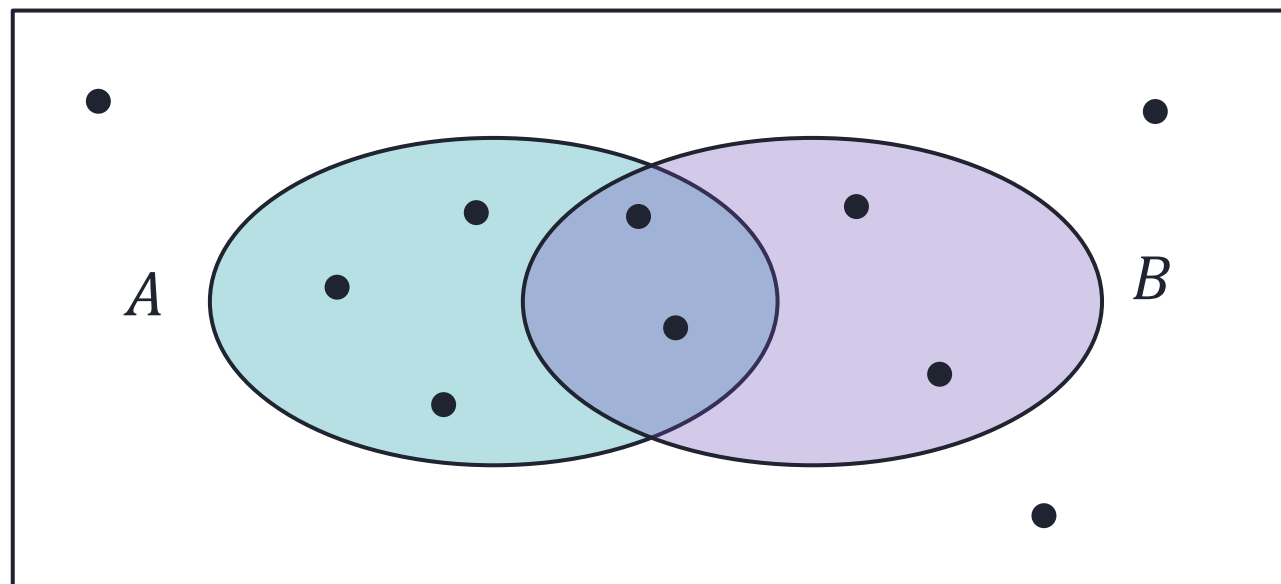
в 64 раза

## 12

## Задача 12. Условие

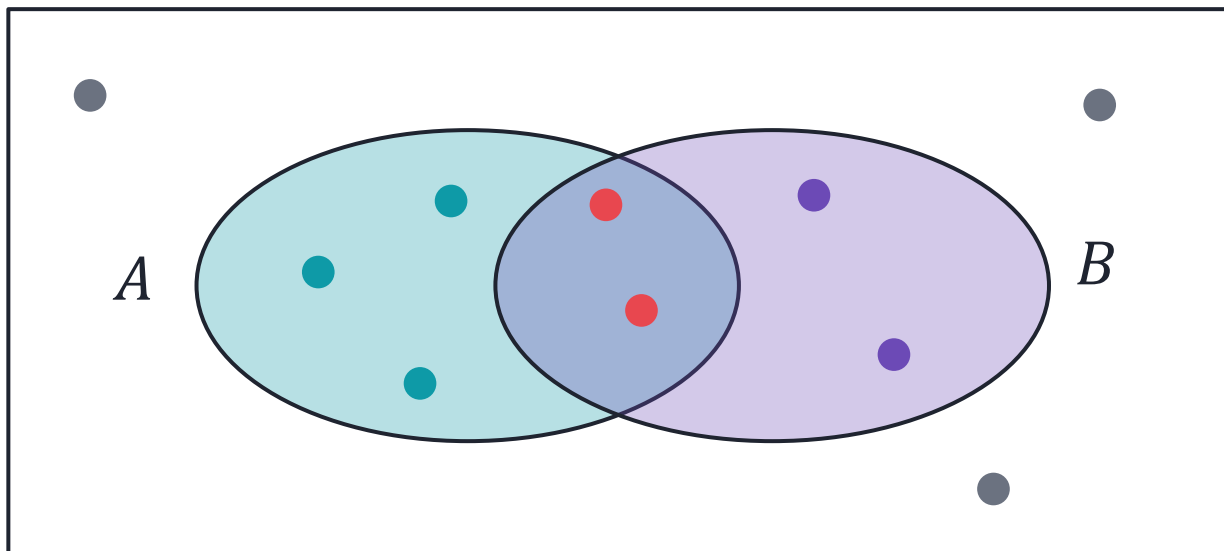
На диаграмме Эйлера показаны события  $A$  и  $B$  в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками.

Найдите  $P(B|A)$  — условную вероятность события  $B$  при условии  $A$ .



## 12

## Задача 12. Решение



● ТОЛЬКО в  $A$ : 3

● в  $A$  и  $B$  ( $AB$ ): 2

● ТОЛЬКО в  $B$ : 2

● вне  $A$  и  $B$ : 3

Всего  $3 + 2 + 2 + 3 = 10$  исходов — совпадает с условием.

Событию  $A$  благоприятствуют 5 исходов, из них событию  $B$  — 2 (общая часть):

$$P(B|A) = \frac{N(AB)}{N(A)} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Через вероятности:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

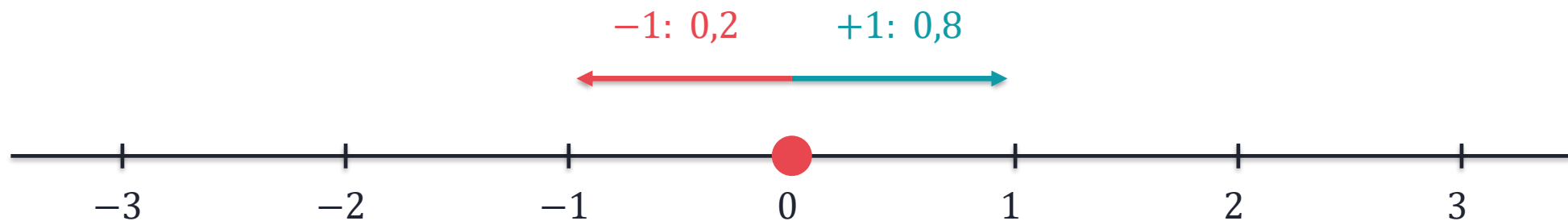
Ответ

$$P(B|A) = 0,4$$

## 13 Задача 13. Условие

Первый член бесконечной последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью  $p = 0,8$  на единицу больше предыдущего и с вероятностью  $1 - p$  на единицу меньше предыдущего.

**Какова вероятность того, что среди членов этой последовательности найдётся число  $-1$ ?**



## 13 Задача 13. Решение

Пусть  $x$  — вероятность когда-нибудь опуститься на 1 ниже текущего числа

Смотрим на первый шаг из 0:

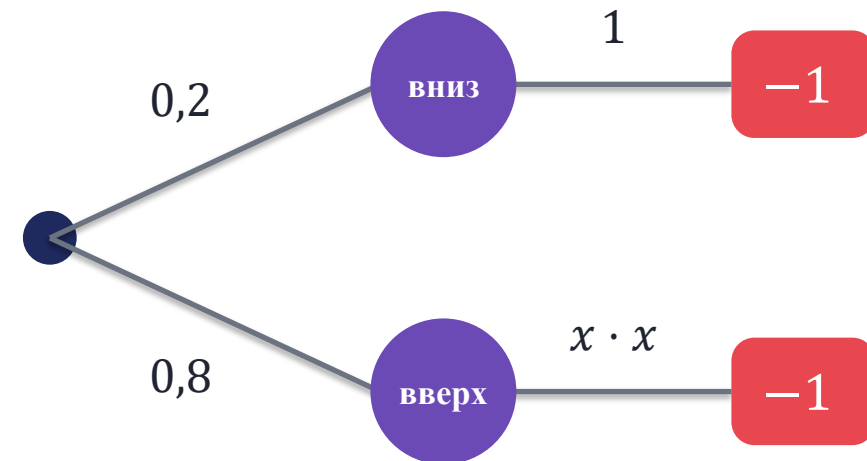
- вниз (вероятность 0,2) — сразу попали в  $-1$ ;
- вверх (0,8) — из 1 нужно спуститься на две ступени: в 0, затем в  $-1$ ; вероятность  $x \cdot x$ .

$$x = 0,2 + 0,8x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

За шаг последовательность в среднем растёт на  $0,8 - 0,2 = 0,6$  и уходит в  $+\infty$ , поэтому  $x < 1$ :

$$x = \frac{1}{4} = 0,25$$



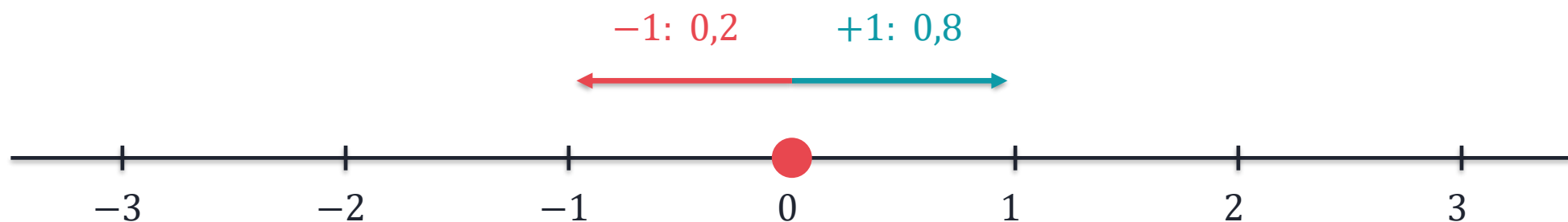
Ответ

0,25

## 14 Задача 14. Условие

Первый член бесконечной последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью  $p = 0,8$  на единицу больше предыдущего и с вероятностью  $1 - p$  на единицу меньше предыдущего.

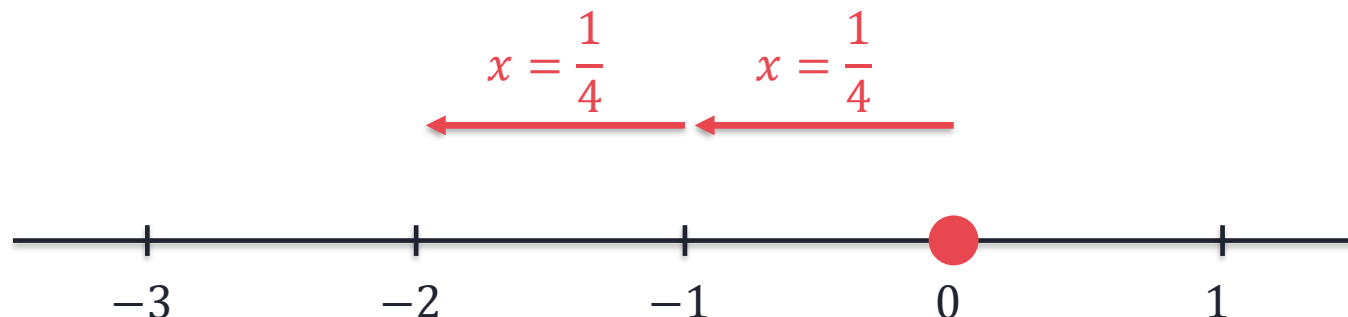
**Какова вероятность того, что среди членов этой последовательности найдётся число  $-2$ ?**



## 14 Задача 14. Решение

Используем результат задачи 13:  $x = \frac{1}{4}$

Чтобы попасть в  $-2$ , последовательность должна сначала попасть в  $-1$  (вероятность  $x$ ), а затем из  $-1$  опуститься ещё на единицу — рассуждение то же, вероятность снова  $x$ . Эти этапы независимы:



Вообще, вероятность когда-нибудь опуститься на  $k$  ниже равна  $x^k$ .

$$P = x \cdot x = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Ответ

0,0625

15

## Задача 15. Условие

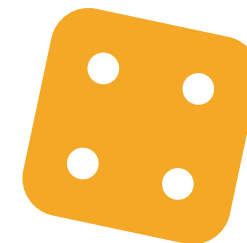
Первый игровой кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза.

**Известно, что в каком-то порядке выпали 2 и 4 очка. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?**

Первый кубик



Второй кубик



## 15

## Задача 15. Решение

Перебор: при двух бросках у каждого кубика  $6 \cdot 6 = 36$  равновозможных исходов

## Первый (обычный) кубик

|   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|---|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 1; 1 | 1; 2 | 1; 3 | 1; 4 | 1; 5 | 1; 6 |
| 2 | 2; 1 | 2; 2 | 2; 3 | 2; 4 | 2; 5 | 2; 6 |
| 3 | 3; 1 | 3; 2 | 3; 3 | 3; 4 | 3; 5 | 3; 6 |
| 4 | 4; 1 | 4; 2 | 4; 3 | 4; 4 | 4; 5 | 4; 6 |
| 5 | 5; 1 | 5; 2 | 5; 3 | 5; 4 | 5; 5 | 5; 6 |
| 6 | 6; 1 | 6; 2 | 6; 3 | 6; 4 | 6; 5 | 6; 6 |

2 исхода из 36

Строка — очки при первом броске, столбец — при втором.

Жёлтым выделены исходы «выпали 2 и 4 в каком-то порядке»: (2; 4) и (4; 2).

Одинаковые числа на гранях второго кубика — разные грани, поэтому и исходы разные.

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ : грань «2» — 2 варианта, грань «4» — 2 варианта, порядок — 2

## Второй кубик

|   | 2    | 2    | 4    | 4    | 6    | 6    |
|---|------|------|------|------|------|------|
| 2 | 2; 2 | 2; 2 | 2; 4 | 2; 4 | 2; 6 | 2; 6 |
| 2 | 2; 2 | 2; 2 | 2; 4 | 2; 4 | 2; 6 | 2; 6 |
| 4 | 4; 2 | 4; 2 | 4; 4 | 4; 4 | 4; 6 | 4; 6 |
| 4 | 4; 2 | 4; 2 | 4; 4 | 4; 4 | 4; 6 | 4; 6 |
| 6 | 6; 2 | 6; 2 | 6; 4 | 6; 4 | 6; 6 | 6; 6 |
| 6 | 6; 2 | 6; 2 | 6; 4 | 6; 4 | 6; 6 | 6; 6 |

8 исходов из 36

15

## Задача 15. Решение

Подсчёт благоприятных исходов

Кубик выбирают случайно, затем бросают его два раза. Все  $2 \cdot 36 = 72$  исхода «кубик + два броска» равновозможны.

Выпали 2 и 4 — значит, произошёл один из  $2 + 8 = 10$  отмеченных исходов. Из них второму кубику соответствуют 8:



1-й кубик

2-й кубик

$$P = \frac{8}{2 + 8} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Проверка по формуле Байеса

$$\begin{aligned} P(H_2|A) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{36}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{36}} \\ &= \frac{8}{2 + 8} = 0,8 \end{aligned}$$

Ответ

0,8

16

## Задача 16. Условие

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что при каждом отдельном выстреле вероятность промаха равна 0,8.

**Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?**

0,8

вероятность промаха



$\geq 0,6$

нужная вероятность поражения

## 16 Задача 16. Решение

Пусть стрелку дали  $n$  патронов

Цель не поражена, только если промахнулись все  $n$  раз (выстрелы независимы): вероятность  $0,8^n$ .  
Поэтому

$$P_n = 1 - 0,8^n \geq 0,6 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,4$$

| $n$         | 1   | 2    | 3     | 4      | 5       |
|-------------|-----|------|-------|--------|---------|
| $0,8^n$     | 0,8 | 0,64 | 0,512 | 0,4096 | 0,32768 |
| $1 - 0,8^n$ | 0,2 | 0,36 | 0,488 | 0,5904 | 0,67232 |

При  $n = 4$  вероятность  $0,5904 < 0,6$  — мало; при  $n = 5$  уже  $0,67232 \geq 0,6$ .

## Ответ

## 5 патронов

## 17

## Задача 17. Условие

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 15 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 65 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45 % яиц.

**Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.**

15 %

высшая категория в 1-м хозяйстве

65 %

высшая категория во 2-м хозяйстве

45 %

высшая категория всего

## 17 Задача 17. Решение

$H_1$  — яйцо из 1-го хозяйства,  $H_2$  — из 2-го;  $A$  — яйцо высшей категории

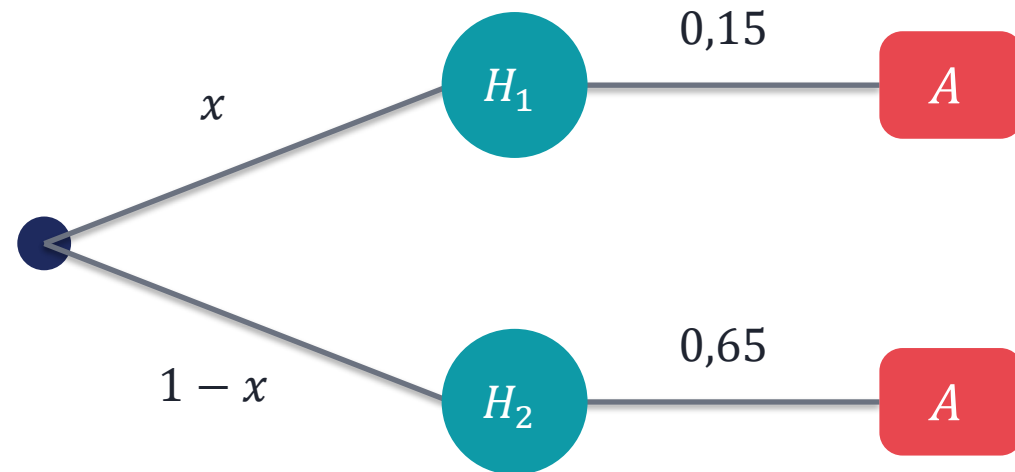
Пусть  $P(H_1) = x$ , тогда  $P(H_2) = 1 - x$ . По формуле полной вероятности:

$$P(A) = 0,15x + 0,65(1 - x) = 0,45$$

$$0,65 - 0,5x = 0,45$$

$$0,5x = 0,2 \Rightarrow x = 0,4$$

Искомая вероятность — это и есть  $P(H_1) = x$ .



Ответ

$$P(H_1) = 0,4$$

**18**

## Задача 18. Условие

При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 99 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 89 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 15 % пациентов, направленных на тестирование.

**Пациент получил положительный тест. Какова вероятность того, что он действительно имеет это заболевание?**

**99 %**

«+» у больного

**89 %**

«-» у здорового

**15 %**

всех тестов положительны

## 18 Задача 18. Решение

$H_1$  — болен,  $H_2$  — здоров;  $A$  — тест положительный

1) Полная вероятность: найдём  $p = P(H_1)$

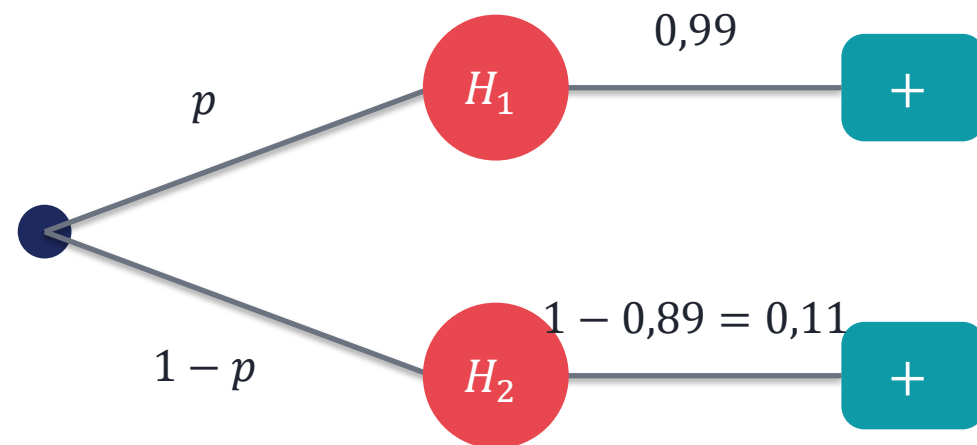
$$0,99p + 0,11(1 - p) = 0,15$$

$$0,88p = 0,04 \Rightarrow p = \frac{1}{22}$$

(здесь  $P(A) = 0,15$  — доля положительных тестов)

2) Формула Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{0,99 \cdot \frac{1}{22}}{0,15} = \frac{0,045}{0,15} = 0,3$$



Ответ

$$P(H_1|A) = 0,3$$

# ОТВЕТЫ

1

$$M(X) = 3,3$$

2

$$M(X) = 1,55$$

3

15 000 руб.

4

0,65

5

$$D(Z) = 0,24$$

6

18 руб.

7

$$D(X) = 0,8$$

8

$$\sigma(Y) = 1,6$$

9

$$\sigma(X) = 0,9$$

10

$$M_1 = 11,89$$
$$D_2 \approx 7,78$$

11

в 64 раза

12

0,4

13

0,25

14

0,0625

15

0,8

16

5 патронов

17

0,4

18

0,3