

ВЫПОЛНЕНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ “ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА”

1. СОДЕРЖАНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Типовой расчет состоит из теоретических вопросов и задач по теме “Линейная и векторная алгебра”. Ответы на теоретические вопросы должны быть даны в письменной форме.

Теоретические вопросы.

1. Дать определение минора и алгебраического дополнения элемента a_{ij} определителя.
2. Записать разложение определителя III порядка по 2 строке, по 3 столбцу.
3. В каких случаях можно утверждать, что определитель равен нулю, не вычисляя его?
4. Когда можно найти решение системы линейных уравнений по формулам Крамера? Записать эти формулы.
5. Какие линейные операции над векторами проводятся и как? Как проводятся линейные операции над векторами, заданными в координатах?
6. Как определяется проекция вектора на ось, каковы свойства проекций?
7. Каковы определения и свойства скалярного, векторного, смешанного произведения, запись через координаты перемножаемых векторов?
8. Дать определение матрицы и действий над матрицами.
9. Дать определение обратной матрицы и правило нахождения обратной матрицы.
10. Что называется линейным пространством и его базисом. Определение собственного вектора и собственного значения.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

В задачах используются следующие обозначения: n - номер студента по списку, $\alpha\beta\gamma\delta$ - номер группы, $m = \left[\frac{n + \delta}{2} \right] + 1, \ell = \left[\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{5} \right]$.

1. Вычислить определитель 3-го порядка двумя способами

$$\begin{vmatrix} (-1)^n \cdot m & m - 4 \cdot \ell & 2 \\ m - 2 \cdot \ell & m - 3 \cdot \ell & 5 \\ (-1)^n \cdot 2 & -3 & m - 10 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & m-5 & 0 & (-1)^n \\ (-1)^n \cdot 3 & m-7 & (-1)^n & 2 \\ 2 & 3 & -l & 4 \\ m-2 \cdot l & -2 & l-1 & (-1)^n \cdot 3 \end{vmatrix}$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} (-1)^n(m+1)x - (m+3)y = (-1)^n \cdot 2 \\ (-1)^{n+1}(l+3)x + (l+1)y = (-1)^{n+1} \cdot 2(l+m+3) \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (m - (-1)^n \cdot 5)x_1 + 5x_2 + x_3 = 2m \\ (-1)^n \cdot mx_1 + 4x_2 - (-1)^n x_3 = (-1)^n \cdot 4 \\ (m - 3l)x_1 + (-1)^n \cdot 3lx_2 - 2x_3 = -m \end{cases}$$

а) по формулам Крамера;

б) методом Гаусса;

в) представив систему в виде матричного уравнения.

5. Дано $|\vec{a}|=m+1$, $|\vec{b}|=l+1$.

Найти: а) скалярное произведение векторов

$$\vec{c}=(m-5)\vec{a}+(-1)^n\vec{b}; \vec{d}=(l+(-1)^n+2)\vec{a}+\vec{b}, \text{ если } (\vec{a}, \vec{b})=\pi/3.$$

$$\text{б) модуль векторного произведения } |\vec{c} \times \vec{d}|, \text{ если } (\vec{a}, \vec{b})=\pi/2.$$

6. Дано: $\vec{a}=(m-4)\vec{i}+((-1)^n-l)\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=(-1)^nl\vec{i}+(-1)^n\vec{j}+(m-3)\vec{k}$

Найти: а) скалярное и векторное произведение векторов

$$\vec{c}=(-1)^n(l+1)\vec{a}+(m-l)\vec{b} \text{ и } \vec{d}=\vec{b}+(-1)^n(m+1)\vec{a};$$

б) длину и направляющие косинусы вектора \vec{c} ;

в) смешанное произведение $\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \vec{e}$, где $\vec{e}=3\vec{j}+2\vec{k}$.

7. Дано: $A((-1)^nm, -l, 0)$; $B((-1)^n2, 3, m-4)$, $C(m-2l, 1, 3)$.

Найти: а) $\cos \angle ABC$, б) $\text{Pr}_{\vec{AC}} \vec{AB}$, в) $S_{\triangle ABC}$,

г) объем пирамиды с основанием $\triangle ABC$ и вершиной $D(0, (-1)^n, 2)$.

8. Сила $\vec{F}=(-1)^nm\vec{i}-l\vec{j}+3\vec{k}$ приложена в точке $A(m-1, 0, (-1)^n)$.

Найти: а) работу E силы \vec{F} на пути \vec{AB} , если $B(-3, (-1)^n, m-5)$;

б) величину момента $|\vec{M}|$ силы \vec{F} относительно точки $O(0,0,0)$.

9. Выполнить проверку решенных задач: № 5, 8 по формуле:

$$(\vec{c} \cdot \vec{d})^2 + (\vec{c} \times \vec{d})^2 - \vec{c}^2 \vec{d}^2 = 0, \text{ положив в № 8 } \vec{c}=\vec{F}, \vec{d}=\vec{AB},$$

в №6, 7 - по формуле: $(\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \vec{e})^2 + (\vec{d}(\vec{c} \cdot \vec{e}) - \vec{c}(\vec{d} \cdot \vec{e}))^2 - (\vec{c} \times \vec{d})^2 \vec{e}^2 = 0$, положив в

№ 7 $\vec{c}=\vec{AB}$, $\vec{d}=\vec{AC}$, $\vec{e}=\vec{AD}$.

10. Показать, что векторы $\vec{a}\{2; (-1)^n m; -l; 1\}$, $\vec{b}\{(-1)^n; 3; -2; 1\}$,

$\vec{c}\{(-1)^{n-1} m - 2l; m((-1)^{n-1} l - 3); l^2 + 2m; -(m+l)\}$ линейно зависимы и найти эту

зависимость.