РЯДЫ

1. Числовые знакопостоянные ряды $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ (сходится, расходится)

1.1 Необходимое условие сходимости $\lim_{n\to\infty} u_n = l$

$$\begin{cases} l = 0 \Rightarrow \textit{продолжить исследование,} \\ l \neq 0 \Rightarrow \textit{ряд расходится} \end{cases}$$

1.2 Признак Даламбера (применяется при наличии факториала или показательной функции)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow, \textit{ряд сходится,} \\ l > 1 \Rightarrow \textit{ряд расходится,} \\ l = 1 \Rightarrow \textit{использовать другой метод исследования.} \end{cases}$$

1.3 Признак сравнения (сравнить с обобщенно - гармоническим рядом)

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\begin{cases} p > 1 \Rightarrow, \textit{ряд сходится,} \\ p \leq 1 \Rightarrow \textit{ряд расходится.} \end{cases}$$

1.4 Интегральный признак (чаще всего при наличии ln(n))

$$\int_{n_0}^{\infty} u(x)dx;$$

Интеграл сходится, тогда и ряд сходится.
Интеграл расходится, тогда и ряд расходится.

1.4 Радикальный признак Коши $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L; \begin{cases} L > 1 - \textit{расходиться,} \\ L < 1 - \textit{сходиться,} \\ L = 1 - \textit{ответанет.} \end{cases}$

2. Числовые знакочередующиеся ряды $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n u_n$ (условно сходится, сходится абсолютно, расходится)

2.1. Исследовать на абсолютную сходимость

$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ - сходится, тогда $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n u_n$ - сходится абсолютно;

$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ - расходится, тогда перейти к пункту 2.

2.2. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \\ u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge .. u_n \ge \end{cases} \Rightarrow \textit{ряд сходится условно}$

Иначе расходится.

3. Степенные ряды $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n (x-a)^n$

3.1. Найти интервал сходимости степенного ряда, для этого найти предел и решить полученное неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x-a)^{n+1}}{u_n(x-a)^n}\right|<1$$

3.2. Исследовать на концах интервала сходимости.

4. Ряды Тейлора и Макларена

4.1. $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$- ряд Тейлора;

4.2. $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$-ряд Макларена;

4.3. Разложение в ряд Макларена основных элементарных функций

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots, x\in(-1,1)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots, x\in(-1,1)$$

$$arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots, x\in(-1,1)$$

4.4. приближенные вычисления с помощью рядов (значение функции, определенный интеграл, ОДУ). Основная идея – разложение в ряд и почленное рассмотрение.