Глава IV. *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

11. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ДФНП)

Опорный конспект № 11

11.1. Понятие ФНП. Элементы топологии в $\mathbf{R}^n$

O: $\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n):x_i\in\mathbf{R}, i=\overline{1,n}\}$ $y=f(x_1,x_2,...,x_n),(x_1,x_2,...,x_n)\in D\subset\mathbf{R}^n, y\in Y\subset\mathbf{R}\Leftrightarrow D \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}$ $Y:\forall(x_1,...,x_n)\in D\exists! y\in Y\subset\mathbf{R}$ • $z=f(x,y),(x,y)\in D\subset\mathbf{R}^2$-функция двух переменных; $f(x,y)=c, c=const$-линии уровня

O: $U_\delta(M_0)=\{M\in R^n:|MM_0|<\delta\}$ δ-окрестность т.$M_0(x_0,y_0)$. D-открытая область $\Leftrightarrow$ $\forall M\in D\exists\delta>0:U_\delta(M)\subset D$ •

11.2. Предел и непрерывность ФНП

O: $A=\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon):\ M\in U_\delta(M_0)\ \Rightarrow|f(x,y)-A|<\varepsilon$ •

O: $z=f(x,y)$ непрерывна в т.$M_0(x_0,y_0)\Leftrightarrow$

1. $f(x,y)$ определена в $U_\delta(M_0)$; 2. $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ •

11.3. Частные приращения и частные производные

На примере $z=f(x,y)$.

O: $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$, $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$ - частные приращения по x и y •

O: $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ - частные производные по x и y •

11.4. Полное приращение и полный дифференциал, применение в приближенных вычислениях.

O: $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$-полное приращение ф.2п •

O: $z=f(x,y)$ дифф. в т.$M(x,y)$ $\Leftrightarrow\Delta Z=A\Delta x+B\Delta y+\omega(\Delta x,\Delta y),\omega=O(\Delta\rho)$ при $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0, dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,(dx=\Delta x, dy=\Delta y)$-полный дифференциал •

$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$-применение дифференциала к приближенным вычислениям.

11.5. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \frac{\partial z}{\partial x} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \frac{\partial z}{\partial y} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & & \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} \end{tikzcd}$$

в случае непрерывности $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$d^2=d(dz)$ - дифференциал 2 порядка,

$d^n z=d(d^{n-1}z)=(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy)^n z$.

11.6. Производные сложных функций

1. $z=f(x,y),\ x=x(t),\ y=y(t)$; $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ 2. $z=f(x,y),\ y=y(x)$; $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$;

3. $z=f(x,y),\ x=x(u,v);\quad y=y(u,v)$; $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

11.7. Неявные функции, их дифференцирование

1. $F(x,y)=0$ задает неявно $y=y(x)\ \Rightarrow\ \mathbf{\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}}$.

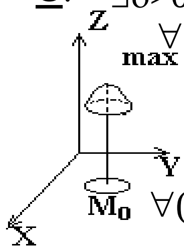
2. $F(x,y,z)=0$ задает неявно $z=z(x,y)\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

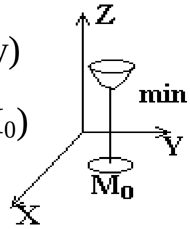
Опорный конспект № 12.

12.1. Экстремумы ФНП

О: $\exists\delta>0: f(M_0)>f(x,y)$ $\forall(x,y)\in U_\delta(M_0)$



$f(M_0)<f(x,y)$ $\forall(x,y)\in U_\delta(M_0)$



Т(необходимые условия экстремума): $\exists$ экстремум $z=f(x,y)$ в т.$M_0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 0 \vee \nexists.$$

$\cancel{Т}$(достаточные условия экстремума):

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

$$D(M_0)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}_{M_0} \begin{cases} >0,\ A_{M_0}<0 \Rightarrow \max \\ >0,\ A_{M_0}>0 \Rightarrow \min \\ <0 \Rightarrow \text{экстремума нет} \\ =0 \Rightarrow \text{треб. доп. иссл-я} \end{cases}$$

12.2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

О: $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, $F(x,y)=0$ задает $L\subset D$, $M_0(x_0,y_0)\in L$-т.усл. max(min) $f(x,y)$ $\Leftrightarrow f(x,y)<f(x_0,y_0)$ $(>f(x_0,y_0))$ $\forall(x,y)\in U_\delta(M_0)\cap L$

Необходимые условия условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda}=F(x,y)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)$, $-\lambda\in\mathbb{R}$ - функция Лагранжа.

Достаточные условия условного экстремума:

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & F'_x(M_0) & F'_y(M_0) \\ F'_x(M_0) & \Phi''_{xx}(M_0,\lambda_0) & \Phi''_{yx}(M_0,\lambda_0) \\ F'_y(M_0) & \Phi''_{yy}(M_0,\lambda_0) & \Phi''_{yy}(M_0,\lambda_0) \end{vmatrix} = \begin{cases} <0, \Rightarrow \\ >0, \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$ т.M_0-т. услов. max

$\Rightarrow$ т.M_0-т. услов min

$M_0(x_0,y_0)$, λ_0-любое из решений (1)

12.3. **Элементы дифференциальной геометрии**

12.3.1. **Уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой в $\mathbb{R}^3$**

т.$M(x,y,z)\in L \Leftrightarrow \overline{OM}=\bar r = x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k$; x=x(t), y=y(t), z=z(t) - параметрические уравнения линии L.

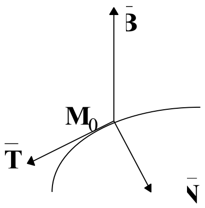
$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$ - уравнения касательной к L в т.$M_0(x_0,y_0,z_0)$,

$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$-уравнение нормальной плоскости.

12.3.2. **Дифференциальные характеристики кривой в $\mathbb{R}^3$**

O: L: $\bar r=\bar r(t), t\in(\alpha,\beta)$ -гладкая кривая$\Rightarrow \bar r'(t)$-непрерывна на (α,β) и $\bar r'(t)\neq 0$

$$k=\frac{\left|\bar r'(t)\times \bar r''(t)\right|}{\left|\bar r'(t)\right|^3}$$ -кривизна L в любой ее точке.



L: $\bar r=\bar r(t), t\in(a,b); \bar T\perp\bar B\perp\bar N\perp\bar T: \bar T=\bar r'(t)$-направляющий вектор касательной, $\bar B=\bar r'(t)\times\bar r''(t)$-направляющий вектор бинормали. $\bar N=\bar B\times\bar T$-направляющий вектор главной нормали.

12.3.3. **Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности**

Линии как пересечение двух поверхностей.

F(x,y,z)=0 в т.$M_0(x_0,y_0,z_0)$: $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y-y_0)+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z-z_0)=0$-уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$$ -уравнение нормали,

$L:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$-линия пересечения двух поверхностей,

$$\bar S=\bar N_1\times\bar N_2=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}_{M_0}$$ -направляющий вектор касательной к L.

Решение задач

10.1. Найти и построить области определения заданных функций, являются ли они открытыми, замкнутыми, ограниченными:

1) $z = x - y$; 2) $z = \dfrac{1}{x^2 + 5y^2}$; 3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$; 4) $z = \arcsin\dfrac{x+1}{y}$;

5) $z = \sqrt{1-x} + \ln(y+2)$; 6) $z = \sqrt{(2-x)(y-3)}$.

10.2. Найти и построить линии и поверхности уровней функций: 1) $z = x - y$; 2) $z = x^2 - y^2$; 3) $z = \dfrac{y}{x}$;

4) $z = 1 - x^2 - y^2$; 5) $z = \arcsin\dfrac{y}{x^2}$; 6) $u = x + y + z$; 7) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 8) $u = z^2 - x^2 - y^2$; 9) $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$.

10.3. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{2x - y}{4x + y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{5x + y}{x - 3y}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x - y}{x + y}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{3x}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}} \dfrac{\mathrm{tg}\, xy}{2x}$;

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{1+xy} - 1}{y}$; 7) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} (1 + xy)^{x/y}$.

10.4. Для функции $z = \dfrac{y}{x}$ найти частные и полное приращения в точке $M(x,y)$ $(x \neq 0)$, если аргументы x и y получили приращения Δx и Δy соответственно. Можно ли утверждать, что полное приращение равно сумме частных приращений?

10.5. Найти частные производные и полные дифференциалы первого порядка от следующих функций:

1) $z = x^2 y + xy^2 + x + y + 4$; 2) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; 3) $z = e^{xy} + \sin\dfrac{x}{y}$; 4) $z = \dfrac{xy}{x+y}$;

5) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; 6) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$; 7) $z = x^y$; 8) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 9) $z = \arcsin\sqrt{xyz}$.

10.6. Показать, что данные функции удовлетворяют приведённым дифференциальным уравнениям:

1) $z = \ln\left(e^x - e^y\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$; 2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$;

3) $z = \sqrt{y}\cos\dfrac{y}{x}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}$; 4) $z = \dfrac{y^2}{2x} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$, $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y^3}{x}$.

10.7. Найти производные нижеприведённых функций в точке M_0 по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 N}$, если:

1) $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$, $M_0(3{,}1)$, $N(6{,}5)$; 2) $z = \mathrm{arctg}(xy)$, $M_0(1{,}1)$, $N(-2{,}5)$;

3) $z = \ln(x + y)$, $M_0(1{,}2)$, $N(2{,}3)$; 4) $u = x^2 + y^2 + z^2$, $M_0(1{,}2{,}2)$, $N(0{,}0{,}0)$.

10.8. Доказать справедливость следующих соотношений (u и v - дифференцируемые функции, α и β - постоянные): а) $\mathrm{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha\,\mathrm{grad}\,u + \beta\,\mathrm{grad}\,v$; б) $\mathrm{grad}(u \cdot v) = u \cdot \mathrm{grad}\,v + v \cdot \mathrm{grad}\,u$;

в) $\mathrm{grad}\,u(v) = u'(v)\,\mathrm{grad}\,v$.

10.9. Вычислить приближённо: 1) $\sqrt{3{,}12^2 + 0{,}2^2}$; 2) $2{,}03^{3{,}02}$. 3) $\sqrt[3]{2{,}06^2 + 3{,}88}$; 4) $\ln\left(\sqrt{1{,}06} - \sqrt[4]{0{,}96} - 1\right)$.

10.10. Найти частные производные 2-го порядка от следующих функций: 1) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 y^3$; 2) $z = xy + \dfrac{x}{y}$; 3)

$\ln\left(x^2+y^2\right)$; 4) $z=x^y$; 5) $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 6) $z=xye^{-xy}$; 7) $z=\sin(xy)$; 8) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

9) $z=xy+yz+zx$; 10) $z=x^2y+y^2z+z^2x$; 11) $z=\dfrac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

10.11. Показать, что: 1) функции $z\left(x^2+y^2\right)$ и $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ удовлетворяют **уравнению Лапласа** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

2) функция $z=\cos(x\cdot y)$ - дифференциальному уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x^2y^2z$;

3) функция $u=A\sin(\lambda x)\cdot\cos(a\lambda t)$ - **уравнению колебания струны** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

4) функция $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ - **уравнению теплопроводности** $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

5) функция $u=\dfrac{1}{\sqrt{z^2+y^2+z^2}}$ - удовлетворяет **уравнению Лапласа** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

10.12. $z=x^2y+y^2x$. Найти d^2z в точке $M(1{,}2)$.

10.13. $z=xy-\dfrac{y}{x}$. Найти d^2z в точке $M(1{,}1)$ при $\Delta x=0{,}2$ и $\Delta y=-0{,}3$.

10.14. Найти дифференциалы второго порядка от данных функций: 1) $z=x^3+x^2y^2+y^3$;

2) $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$; 3) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 4) $z=e^{xy}$; 5) $u=xy+yz+zx$; 6) $u=e^{xyz}$.

10.15. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если:1) $z=x^2+y^2+xy$, где $x=e^t$, $y=\cos t$; 2) $z=e^{3x-2y}$, где $x=t^2+1$,

$y=\sin 2t$; 3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, где $x=e^t+e^{-t}$, $y=e^t-e^{-t}$.

10.16.Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если:1) $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$, где $y=x^2+1$; 2) $z=\arcsin(x\cdot y)$, где $y=e^x$.

10.17. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x\ln y$, где $x=\dfrac{u}{v}$, $y=u-v$.

10.18. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$, если $z=x^2y+y^2x$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

10.19. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$, если $z=f(x,y)$, где $x=u+v$, $y=u-v$.

10.20. Найти dz, если $z=f(x,y)$, где $x=u\cdot v$, $y=\dfrac{u}{v}$.

10.21. Найти dz и d^2z, если $z=f(x,y)$, где $x=u^2+v^2$, $y=u\cdot v$.

10.22. Показать, что функция $z=f\left(x^2+y^2\right)$, где $f(u)$ - дифференцируемая функция, удовлетворяет однородному уравнению $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

10.23. Доказать справедливость формулы $d^2z=z''_{xx}dx^2+\ +2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2+z'_xdx^2+z'_ydy^2$, где $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G$ - сложная, дважды дифференцируемая функция.

10.24. Найти экстремум следующих функций:

1) $z=x^3+y^3-3xy$; 2) $z=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; 3) $z=\frac{3}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-5x+2$;

4) $z=3x^2-x^3+3y^2+9x-6y+20$; 5) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$; 6) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

7) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$; 8) $z=1-\sqrt{x^2-4x+y^2+6y+13}$; 9) $z=x^2-y^2$; 10) $z=e^{-(x-2)^2-y^2}$.

10.25. Найти условный экстремум следующих функций: 1) $z=x\cdot y$ при: а) $x+y=6$, б) $x+y=-6$;

2) $z=x^2y$ при $2x+y=1$; 3) $z=x+y$ при $x^2+y^2=2$; 4) $z=8x+y$ при $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}$; 5) $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при:

а) $x+y=6$, б) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$; 6) $z=x^2+y^2-xy-3x$ при $x+y-1=0$; 7) $u=x+y+z$ при $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$;

8) $u=xyz$ при $\begin{cases}x+y+z=5,\\ xy+yz+zx=8.\end{cases}$

10.26. Для выполнения комплекса работ фирма решила организовать бригаду в 10 человек, состоящую из рабочих и подсобников. Какая структура бригады для фирмы оптимальна, если дневная зарплата рабочего составляет 250 руб., подсобника – 200руб., а фирма рассчитывается с бригадой по договору $Q=25xy+2500$, где x и y -число рабочих и подсобников в бригаде.

10.27. На плоскости $y-x=0$ найти точку, сумма расстояний которой от точек $A(1,2,3)$ и $B(3,2,1)$ была наименьшей.

10.28. На эллипсе $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ найти точки, наиболее и наименее удалённые от прямой $x+3y-9=0$.

10.29. Найти производные неявных функций: а) xy+siny+sinx=0. dy/dx=? б) $z=ye^{x/z}$. ∂z/∂x, ∂z/∂y=?

10.30. Для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках:

1) G: $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy,\ M_0(3,4,-7)$. 2) G: $z=\sin x\cos y,\ M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

3) G: $x^2yz+2x^2z-3xy+2=0,\ M_0(1,0,-1)$.

10.31. Составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости для данных линий в указанных точках:

1) $L:\begin{cases}y^2+z^2=25\\ x^2+y^2=10\end{cases},M_0(1,3,4)$ 2) $L:\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=47\\ x^2+2y^2=z\end{cases},M_0(-2,1,6)$.

Ответы:

10.1. 1) $\mathbb{R}_2$; 2) $\mathbb{R}_2 \setminus \{0,0\}$; 3) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 : \begin{cases} x>y, \\ y>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x<0, \\ y<0; \end{cases}\right.$ 4) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 : \begin{cases} x+y+1\ge 0, \\ x-y+1\le 0, \\ y\ne 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y+1\le 0, \\ x-y+1\ge 0, \\ y\ne 0; \end{cases}\right.$ 5) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 : \begin{cases} x\le 1, \\ y>-2; \end{cases}\right.$ 6) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 : \begin{cases} x\ge 2, \\ y\le 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\le 2, \\ y\ge 3; \end{cases}\right.$ 7) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_2 : x^2+y^2>3^2\right.$ - внешняя область круга с центром в точке $O(0,0)$ и радиуса $R=3$; 8) $\mathbb{R}_3$; 9) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_3 : x^2+y^2+z^2\le 2^2\right.$ - шар с центром в точке $O(0,0,0)$ и радиуса $R=2$. **10.2**. 1) Семейство параллельных прямых $x-y=C$, $C\in\mathbb{R}$; 2) семейство равнобочных гипербол $x^2-y^2=C$, $C\in\mathbb{R}$ с центром в начале координат с полуосями $\sqrt{|\tilde{N}|}$; 3) пучок прямых $y=kx$, $x\ne 0$; 4) семейство концентрических окружностей $x^2+y^2=1-C$, $C\le 1$; 5) семейство парабол $y=Cx^2$, $C\in\mathbb{R}$, $x\ne 0$; 6) семейство параллельных плоскостей $x+y+z=C$, $C\in\mathbb{R}$. 7) семейство вложенных друг в друга шаров $x^2+y^2+z^2=C^2$, $C\ge 0$; 8) семейство параболоидов $z=x^2+y^2+C$, $C\in\mathbb{R}$; 9) семейство параболоидов $x^2+y^2=Cz$, $C\in\mathbb{R}$, $z\ne 0$, при $C=0$ параболоид вырождается в точку. **10.3**. 1) 0; 2) не существует; 3) не существует; 4) 0; 5) 2; 6) 1; 7) e^4. **10.4**. $\Delta_x z=-\dfrac{y\Delta x}{x(x+\Delta x)}$; $\Delta_y z=\dfrac{\Delta_y}{x}$; $\Delta z=\dfrac{-y\Delta x+x\Delta y}{x(x+\Delta x)}$; нет. **10.5**. 1) $z'_x=2xy+y^2+1$; $z'_y=x^2+2xy+1$; 2) $z'_x=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}$; $z'_y=-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x}$; 3) $z'_x=y\cdot x^{y-1}$; $z'_y=x^y\ln x$; 4) $z'_x=\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2$; $z'_y=\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^2$;

5) $z'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $z'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$; 6) $z'_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $z'_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; 7) $z'_x=ye^{xy}+\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}$; $z'_y=xe^{xy}-\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}$; 8) $u'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $u'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $u'_z=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

9) $u'_x=\dfrac{1}{2(1-xyz)}\sqrt{\dfrac{yz}{x}}$; $u'_y=\dfrac{1}{2(1-xyz)}\sqrt{\dfrac{xz}{y}}$; $u'_z=\dfrac{1}{2(1-xyz)}\sqrt{\dfrac{xy}{z}}$. **10.7**. 1) 0; 2) $0,1$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; 4) -6.

10.9. 1) $3,12$; 2) $8,471$; 3) $2,01$; 4) $0,04$. **10.10**. 1) $z''_{xx}=12x^2-4y^3$; $z''_{yy}=-12xy^2$; $z''_{xy}=12y^2-12x^2y$;

2) $z''_{xx}=0$; $z''_{xy}=1-\dfrac{1}{y^2}$; $z''_{yy}=\dfrac{2x}{y^3}$; 3) $z''_{xx}=\dfrac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; $z''_{xy}=\dfrac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; $z''_{yy}=\dfrac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

4) $z''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$; $z''_{xy}=x^{y-1}(y\ln x+1)$; $z''_{yy}=x^y\ln^2 x$; 5) $z''_{xx}=-\dfrac{3xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$; $z''_{xy}=\dfrac{3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$;

$z''_{yy}=-\dfrac{3x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$; 6) $z''_{xx}=\dfrac{y^2(xy-2)}{e^{xy}}$; $z''_{xy}=\dfrac{\left(x^2y^2-3xy+1\right)}{e^{xy}}$; $z''_{xx}=\dfrac{x^2(xy-2)}{e^{xy}}$;

7) $z''_{xx}=-y^2\sin(xy)$; $z''_{xy}=\cos(xy)-xy\sin(xy)$; $z''_{yy}=-x^2\sin(xy)$; 8) $z''_{xx}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; $z''_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

$z''_{yy}=-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 9) $u''_{xx}=u''_{yy}=u''_{zz}\equiv 0$ и $u''_{xy}=u''_{yx}=u''_{zx}=1$; 10) $u''_{xx}=2y$; $u''_{xy}=2x$; $u''_{xz}=2z$; $u''_{yy}=2z$;

$u''_{yz}=2y$; $u''_{zz}=2x$; 11) $u''_{xx}=\dfrac{2x^2-y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$; $u''_{xy}=\dfrac{3xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$.

10.12. $4dx^2+12dxdy+2dy^2$. **10.13**. $-0,2$. **10.14**. 1) $\left(6x+2y^2\right)dx^2+8xydxdy+\left(2x^2+6y\right)dy^2$;

2) $\dfrac{2y}{x^3}dx^2-2\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)dxdy+\dfrac{2x}{y^3}dy^2$; 3) $\dfrac{2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(\left(3x^2-y^2\right)dx^2+16xydxdy+\left(3y^2-x^2\right)dy\right)$;

4) $e^{xy}\left(y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2\right)$; 5) $2(dxdy+dydz+dzdx)$; 6) $e^{xyz}\left(\left(yz^2\right)dx^2+(zx)^2dy^2+(xy)^2dz^2+\right.$

$\left.+2(1+xyz)(zdxdy+xdydz+ydxdz)\right)$. **10.15**.1) $2e^{2t}-\sin 2t+e^t(\cos t-\sin t)$; 2) $2e^{3\left(t^2+1\right)-2\sin 2t}(6t-2\cos 2t)$;

3) $\dfrac{2}{e^{2t}+e^{-2t}}$. **10.16**. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^{x^2+1}}$; $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x+2xe^{x^2+1}}{e^x+e^{x^2+1}}$. 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2e^{2x}}}$; $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x(1+x)}{\sqrt{1-x^2e^{2x}}}$. **10.17**.

$z'_u=\dfrac{1}{v}\left(\ln(u-v)+\dfrac{u}{u-v}\right)$; $z'_v=-\dfrac{u}{v}\left(1+\dfrac{\ln(u-v)}{v}\right)$. **10.18**. $z'_u=\dfrac{3r^2}{2}\sin 2\varphi(\sin\varphi+\cos\varphi)$;

$z'_v=r^3(\cos\varphi-\sin\varphi)\left(1+\dfrac{3}{2}\sin 2\varphi\right)$. **10.19**. $z''_{uu}=z''_{xx}+2z''_{xy}+z''_{yy}$; $z''_{uv}=z''_{xx}-z''_{yy}$; $z''_{vv}=z''_{xx}-2z''_{xy}+z''_{yy}$. **10.20**.

$dz=\left(vz'_x+\dfrac{1}{v}z'_y\right)du+\left(uz'_x-\dfrac{u}{v^2}z'y\right)dv$. **10.21**. $dz=\left(2uz'_x+vz'_y\right)du+\left(2vz'_x+uz'_y\right)dv$. Для вычисления d^2z используем формулу 10.13), положив: $dx=2udu+2vdv$, $dy=du\cdot v+udv$, $d^2x=2\left(du^2+dv^2\right)$ и $d^2y=2dudv$.

10.25. 1) а) $z_{\max\ \text{óñë.}}=z(3,3)=9$; б) $z_{\max\ \text{óñë.}}=z(-3,-3)=9$. 2) $z_{\min\ \text{óñë.}}=z(0,1)=0$; $z_{\max\ \text{óñë.}}=z\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. 3) $z_{\max}=z(+1,+1)=2$; $z_{\min}=z(-1,-1)=-2$. 4) $z_{\min}=z(1,2)=10$; $z_{\max}=z(-1,-2)=-10$. 5) а) $z_{\min}=z(3,3)=\dfrac{1}{3}$; б) $z_{\max}=z(2,2)=1$; $z_{\min}=z(-2,-2)=-1$. 6) $z_{\min}=z(1,0)=-2$. 7) $u_{\min}=u(3,3,3)=9$. 8) Две из переменных равны каждая 2, третья равна 1 (минимум, равный 4); две из переменных равны каждая $\dfrac{4}{3}$, третья равна $\dfrac{7}{3}$ (максимум, равный $\dfrac{112}{27}$). **10.29**. 1) $y=x+8$; 2) $y=-0,87x+11,43$; 3) $y=6,54x-18,79$; 4) $y=0,11x+11$.