

## Расчётное задание по теме: «Функции нескольких переменных»

### Теоретические вопросы

1. Определение функции нескольких переменных. Примеры.
2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
3. Линия и поверхность уровня. Их экономический смысл.
4. Определение частных производных первого и второго порядков.
5. Дифференциалы первого и второго порядков и их приложение к приближённым вычислениям.
6. Градиент и производная по направлению.
7. Понятие экстремума функции. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
8. Условный экстремум. Функция Лагранжа.

### Основные задания

**Задание №1.** 1. Показать, что дифференцируемая функция  $z = \varphi(x, y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных  $F\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ . 2. Найти дифференциалы второго порядка от функции  $z = \varphi(x, y)$ . Функции  $\varphi(x, y)$  и  $F\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$  заданы ниже в таблице ФНП1:

**Таблица ФНП1.**

| № | $F\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$                      | $\varphi(x, y)$            | №  | $F\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ | $\varphi(x, y)$             |
|---|---|----------------------------|----|--|-----------------------------|
| 1 | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 2$                                 | $\ln(x^2 + xy + y^2)$      | 14 | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{2}$  | $\sqrt{y} \sin \frac{x}{y}$ |
| 2 | $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{x^2}$ | $\frac{x}{y^2 - x^2}$      | 15 | $xy \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} - yz$        | $x(y^2 - x^2)^2$            |
| 3 | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - xy - z$                            | $xy + y + e^{\frac{x}{y}}$ | 16 | $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2$       | $\frac{y^2}{3x} + xy$       |
| 4 | $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{x^2}$ | $xe^{y^2 - x^2}$           | 17 | $xy \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} - yz$        | $x \ln(y^2 - x^2)$          |
| 5 | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 2$                                 | $\ln(x^2 - xy + y^2)$      | 18 | $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{yz}{x}$ | $\frac{x}{y^2 - x^2}$       |
| 6 | $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}$ | $y \ln(x^2 - y^2)$         | 19 | $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{xz}{y}$ | $y \sin(x^2 - y^2)$         |
| 7 | $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}$ | $y \sqrt{x^2 - y^2}$       | 20 | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - xy - z$       | $xy + y \cos \frac{x}{y}$   |
| 8 | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - xy - z$                            | $xy + \frac{x^2}{y}$       | 21 | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$            | $\frac{x^2}{x + y}$         |
| 9 | $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} - xz$                             | $y \ln(y^2 - x^2)$         | 22 | $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} - z$            | $x \ln(xy)$                 |

|           |   |                        |           |   |                     |
|-----------|---|------------------------|-----------|---|---------------------|
| <b>10</b> | $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$         | $\ln(x^2 + y^2)$       | <b>23</b> | $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$                     | $\frac{xy}{x=y}$    |
| <b>11</b> | $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$         | $\sqrt{x^2 + y^2}$     | <b>24</b> | $\frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y}$ | $yx^2 - y^3$        |
| <b>12</b> | $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} - yz$ | $x(y^2 - x^2)$         | <b>25</b> | $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} - z$                     | $\text{yarctg}(xy)$ |
| <b>13</b> | $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$    | $y \sin \frac{x}{y^2}$ |           |   |                     |

**Задание №2.** Для скалярного поля  $u = f(x, y, z)$  найти и построить: 1) поверхность уровня, проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ; 2) его градиент в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ; 3) вычислить производную по направлению вектора  $\vec{l}$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ; 4) написать уравнение касательной плоскости и нормали к найденной поверхности уровня в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Данные задачи приведены в таблице ФНП2:

**Таблица ФНП2.**

| $n$       | $f(x, y, z)$   | $M_0(x_0, y_0, z_0)$ | $\vec{l}$  |
|-----------|--|----------------------|------------|
| <b>1</b>  | $(x^2 + y^2)/z$  | (1,1,2)              | {2,-1,1}   |
| <b>2</b>  | $(x^2 + y^2)/z^2$  | (1,0,1)              | {0,3,4}    |
| <b>3</b>  | $x^2 + y^2 - 2x - 4y - z + 7$                              | (1,2,1)              | {3,2,6}    |
| <b>4</b>  | $(xy)/z$   | (1,2,2)              | {-4,3,0}   |
| <b>5</b>  | $\exp\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 3\right)$ | (1,2,3)              | {-4,2,4}   |
| <b>6</b>  | $\ln(x^2 + y^2 - z^2)$                                     | (1,1,-1)             | {4,1,-2}   |
| <b>7</b>  | $(x^2 - y^2)/z$  | (1,0,1)              | {1,-1,0}   |
| <b>8</b>  | $\sin(x^2 + y^2 - 4x - z)$                                 | (0,0,0)              | {-1,1,2}   |
| <b>9</b>  | $\ln\left(z - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$                     | (0,1,2)              | {1,-3,0}   |
| <b>10</b> | $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y$                                | (1,2,1)              | {-1,2,2}   |
| <b>11</b> | $(x^2 + y^2 + z^2)/(x+y)$                                  | (1,0,1)              | {-3/2,1,3} |
| <b>12</b> | $\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}/x$                                 | (1,1,0)              | {1,-,0,1}  |
| <b>13</b> | $\ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$                                 | (1,1,1)              | {-6,3,2}   |
| <b>14</b> | $(x^2 - y^2 - z^2)/2x$                                     | (2,1,1)              | {-4,-2,2}  |
| <b>15</b> | $(x^2 + y^2 + z^2)/(x+y+z)$                                | (1,1,0)              | {8,-6,0}   |
| <b>16</b> | $x^2 - y^2 - z^2 - 2x$                                     | (3,1,1)              | {6,-2,3}   |

|           |   |          |            |
|-----------|---|----------|------------|
| <b>17</b> | $\left(z - \sqrt{x^2 - y^2}\right) / x$ | (1,0,1)  | {2,2,-1}   |
| <b>18</b> | $\arcsin \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$        | (-1,0,1) | {0,-3,4}   |
| <b>19</b> | $x^2 + y^2 - x + 2y - 2z$               | (1,2,2)  | {2,-2/3,1} |
| <b>20</b> | $\operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$     | (1,1,1)  | {4,-2,4}   |
| <b>21</b> | $\left(x^2 - y^2\right) / z^2$          | (1,0,1)  | {-3,0,-4}  |
| <b>22</b> | $x^2 - y^2 - 2y + z$                    | (1,1,2)  | {2,-6,-3}  |
| <b>23</b> | $\operatorname{arctg}(z - xy)$          | (2,1,1)  | {1,1,1/2}  |
| <b>24</b> | $z^2 / \left(x^2 + y^2\right)$          | (1,1,2)  | {1,0,-1}   |
| <b>25</b> | $\exp\left(y - x^2 - z^2\right)$        | (1,1,2)  | {4,3,0}    |