

Задание 12

12. а) Решите уравнение $2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; 4$; б) $\frac{2\pi}{3}$;

12. а) Решите уравнение $\sin x + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, k, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}; -3\pi; -2\pi$

12. а) Решите уравнение $2 \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$

12. а) Решите уравнение $2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$;

Задание 13

14. Основание пирамиды $DABC$ - равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB=BC=13$, $AC=24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20.

а) Докажите, что плоскость, перпендикулярная AC и проходящая через точку D , проходит через точку B .

б) Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC .

Ответ: б) 4

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость, пересекающая ось цилиндра, пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.

а) Докажите, что сумма расстояний от этих хорд до оси цилиндра равна 14.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Ответ: 2

14. Основание пирамиды $DABC$ - равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB=BC=26$, $AC=48$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 40.

а) Докажите, что плоскость, перпендикулярная AC и проходящая через точку D , проходит через точку B .

б) Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC .

Ответ: б) 4

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=2$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ - квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Ответ: б) 15

Задание 14

14. Решите неравенство $\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} - \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} \leq 0$;

Ответ: $(-2; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$;

14. Решите неравенство $\frac{4x^4 - 4x^3 + x^2}{-2x^2 + 5x - 2} + \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{x - 2} \geq 0$;

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup [1; 2)$;

14. Решите неравенство $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 - 5x^2} < 0$

Ответ: $(-\infty; 0), (0; 1), (2; 5)$

14. Решите неравенство $|3x - 1| - |x - 1| < 10$

Ответ: $(-5; 5)$

Задание 15

15. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018, 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны;

Найдите r , если долг полностью выплачен и общие выплаты составили 6,1 млн. рублей.

Ответ: 10

15. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 8,4 млн. рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018, 2019 годов долг остается равным 8,4 млн. рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны;

Найдите r , если долг полностью выплачен и общие выплаты составили 12,2 млн. рублей.

Ответ: 10

15. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1000000 рублей на $(n+1)$ месяцев. Условия его возврата таковы - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца,

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга,
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен

Найдите p , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей

Ответ: 3

15. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 5 часов работы станка А и 9 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 8 часов работы станка А и 4 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 208 часов в месяц, а станок Б - не более 144 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа - 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Ответ: 6 (I) и 22 (II); 354000

Задание 16

16. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую - в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую - в точке C .

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ - параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP:PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

Ответ: б) 2

16. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны AB в точке T , а стороны AD в точке P . Отрезки CT и CP пересекают окружность в точках M и N соответственно. Сторона квадрата равна $\frac{1}{3}$.

а) Докажите, что прямая TP параллельна прямой MN .

б) Найдите MP .

Ответ: б) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Задание 17

17. Найдите все значения параметра «а», при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня $\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$.

Ответ: $(-\infty; -6), (-6; -3), (-3; 0), (0; 3), (3; 6), (6; +\infty)$

17. При каких значениях параметра «а» уравнение $(x^2 - 3 + \sqrt{2x+a})^2 = (x^2 - 3)^2 + 2x + a$ имеет единственный корень на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: $[-4; -2\sqrt{3}], (0; +\infty)$

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня $|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$

Ответ: $(-\infty; -5), (-5; -1], (0; +\infty)$

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет хотя-бы два различных корня

$$|a - 2|x^4 - 2ax^2 + |a - 12| = 0$$

Ответ: $[\frac{12}{7}; 3], [4; +\infty)$

Задание 18

18. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3. а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни. быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Ответ: а) да, б) да, в) 48

18. В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.

- а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?
- б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?
- в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

Ответ: а) нет, б) нет, в) 39