

Задача 16

Подготовительные задания

- 1 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.
 - а) Докажите, что $AC \perp CD$.
 - б) Найдите углы трапеции.
- 2 Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.
 - а) Докажите, что $CD = AB$.
 - б) Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.
- 3 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P , отличной от O , и не проходят через точку O . Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.
 - а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN .
 - б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC = BD$, а $MN = 10$.
- 4 Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB .
 - а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.
 - б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1 : 4.
- 5 В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH .
 - а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH .
 - б) Найдите CL , если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.
- 6 В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD , P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC .
 - а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB .
 - б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q . Найдите отношение $PM : BQ$, если известно, что $AB : AC = 1 : 3$.

- 7 На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D . При этом $\angle ABC = \angle ACD$.
- Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.
 - Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.
- 8 Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.
- Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.
 - Найдите угол ABC , если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC .
- 9 Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A . Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M .
- Докажите, что M — середина AB .
 - Луч OM пересекает большую окружность в точке P . Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды AP , если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.
- 10 Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D , отличной от A .
- Докажите, что точка D лежит на прямой BC .
 - Найдите угол BAC , если известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, а точка D лежит на стороне BC , причём $DB : DC = 1 : 3$.

Задача 16. Подготовительные задания

1. $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$. 2. 48. 3. 50. 4. 20. 5. $3\sqrt{5}$. 6. 1:1. 7. 9:16.
8. 90° . 9. $3\sqrt{13}$. 10. 90° .