# Входная работа

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} [x]\cdot y = 1000, \\ [y]\cdot x = 1996 \end{cases}$

2. Пусть числа a,b,c –целые числа, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите, что $b(a+c) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Сумма четырех натуральных чисел 1995. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

4. Малыш и Карлсон разделили круглый торт двумя перпендикулярными разрезами на 4 части. Карлсон взял себе наименьшую и наибольшую части, а остальные две отдал Малышу. Докажите, что Карлсону досталось не менее половины.

5. Трапеция ***ABCD (AB||CD)*** такова, что что окружность, описанная около ***ABD***, касается прямой ***BC***. Докажите, что окружность, описанная около ***BCD***, касается прямой ***AD***.

6. Учащиеся школы построены прямоугольным каре. После этого в каждой колонне выбран самый высокий, и из них выбран самый низкий – им оказался Петя Иванов. Затем в каждой шеренге выбрали самого низкого, и из них самого высокого – им оказался Ваня петров. Кто выше, Петя или Ваня?

7. Докажите, что любую сумму, более 8 копеек, можно выплатить монетами достоинствами 3 и 5 копеек.

8. Докажите, что число 0,1234567891011213141516… (подряд выписываются натуральные числа) – иррационально.

9. В некотором числе переставили цифры, и оно уменьшилось в три раза. Докажите, что это число делится на 27.

10. На координатную плоскость поставлена клякса площадью больше 1. Докажите, что найдутся две точки кляксы с одинаковыми дробными долями координат.

**Четность**

1. Можно ли конем из одного угла шахматной доски попасть в противоположный угол, пройдя все клетки доски ровно по одному разу
2. Из шахматной доски вырезали две угловые клетки. Можно ли такую доску целиком покрыть доминошками? А если вырезаны клетки b3 и e7?
3. По кругу зацеплены 9 шестеренок: первая со второй, вторая с третьей, ..., девятая с первой. Могут ли они вращаться?
4. Существует ли такое простое число p, что $p^2 = 2^p$ ?
5. По кругу стоят 99 корзин. Можно ли разложить в них несколько арбузов так, чтобы в любых двух соседних корзинах число арбузов отличалось на единицу?
6. В стаде 2021 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на две части (по 1010 коров в каждой) так, что суммарный вес коров первой части равен суммарному весу коров другой части. Известно, что каждая корова весит целое число килограмм. Докажите, что все коровы весят одинаково.
7. Существует ли такое простое число p, что число $p^3 + 3^p$ - тоже простое?
8. У нас есть 101 монетка. Известно, что среди них 51 фальшивых и 50 настоящих. Также известно, что вес фальшивой монетки отличается на 1 грамм от веса настоящей. Мы взяли из кучи одну, произвольно выбранную монету. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах, которые показывают разницу в весе на чашках, определить какую монету мы взяли - настоящую или фальшивую?
9. Записали несколько последовательных натуральных чисел. Каждое закрасили в красный или синий цвет (оба цвета присутствуют). Может сумма НОК чисел, закрашенных красных и НОК закрашенных синим, быть степенью двойки?
10. Записали 10 последовательных натуральных чисел. Каждое закрасили в красный или синий цвет (оба цвета присутствуют). Может сумма НОК чисел, закрашенных красных и НОК закрашенных синим, оканчиваться на 2016?
11. Докажите, что сумма двух чисел, умноженная на их произведение, делится на 2.

## Теория чисел

1. Задумано простое трехзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если последняя цифра равна сумме первых двух?

2. Найдите наименьшее натуральное число «n», такое что «n!» делиться на 990.

3. Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии - натуральные числа. Верно ли, что 99-ый член этой прогрессии – натуральное число?

4. Решите в натуральных числах

$a)\ \ 3^x + 4^y = 5^z;$

$b)\ \ x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \dfrac{10}{7};$

4. Решите в целых числах (хотя бы одно решение)

$a)\ \ a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2016;$

$b)\ \ 2x + 3y + 5z = 11;$

$c)\ \ x + y = x^2 - xy + y^2;$

5. Можно ли расставить по кругу 7 – неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трех подряд расположенных чисел была равна 1, каких-то трех подряд расположенных чисел была равна 2, …, каких-то трех подряд расположенных чисел была равна 7?

6. Найдите все натуральные числа, имеющие ровно 6 натуральных делителей, сумма которых 3500.

7. Числа от 1 до 37 записали в строчку так, что сумма любых всех предшествующих чисел делилось на последующее. На первом месте стоит 37, на втором 1. Какое число может стоять на третьем месте?

## Геометрия

1. Трапеция ***ABCD (AB||CD)*** такова, что что окружность, описанная около ***ABD***, касается прямой ***BC***. Докажите, что окружность, описанная около ***BCD***, касается прямой ***AD***.

2. В выпуклом четырехугольнике ABCD известно, что $\angle CBD = 58^0, \angle ABD = 44^0, \angle ADC = 78^0$. Найдите $\angle CAD$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основание AC. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через точки A и B и пересекает прямую BC в точке M, отличной от B и C. Найдите расстояние от точки O до центра окружности, описанной около треугольника ACM.

4. ABCD – вписанный. AB и CD пересекаются в точке K. Точки B, D, и середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность. Касательные, проведенные к этой окружности в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот ADE является серединой BC.

6. Точка F середина стороны BC квадрата ABCD. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

7. В треугольнике ABC точка $A_1$, $B_1$ и $C_1$ середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, угол BAC равен $60^0$, а угол BCA равен $45^0$.

а) Докажите, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ и H – лежат на одной окружности.

б) Найдите $A_1H$, если $BC = 2\sqrt{3}$.

8. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, а угол ABC равен 72°. Найдите радиус окружности, если AC =6.

9. В параллелограмме ABCD опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M равноудаленную от точек C и D. K – середина AB. Докажите, что MKD – прямой.

10. В треугольнике ABC проведены биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$, K и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые $AA_1$ и $CC_1$.

а) Докажите, что $MK \parallel AC$.

б) Найдите площадь KBM, если AC=10, BC=6, AB=8.

Ответы:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 58 | ***R*** | $90^0$ | | $45^0$ | 1 | 3 | | 2.4 |

## Квадратный трехчлен

1. У квадратного уравнения $x^2+ax+b=0$, коэффициенты $a$ и $b$ увеличили на 1, эту операцию повторили 4 раза. Могло ли оказаться, что все пять уравнений имели целые корни?
2. *У квадратного уравнения $x^2+ax+b=0$, коэффициенты $a$ и $b$ увеличили на 1, эту операцию повторили 9 раз. Могло ли оказаться, что все десять уравнений имели целые корни?*
3. Коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0$, связаны соотношением $2b^2-9ac=0$. Докажите, что один из корней в два раза больше другого.
4. Пусть $x_1, x_2$ - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $S_k=x_1^k+x_2^k\,(k\geq 2)$. Докажите, что при $n\geq 2$, справедлива формула $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$.
5. Уравнение $x^2-6px+q=0$ имеет два различных корня, при этом $p, x_1, x_2, q$ - образуют геометрическую прогрессию. Найдите корни уравнения.
6. Дискриминанты трех приведенных квадратных уравнений равны 1,4,9. Докажите, что можно выбрать по одному корню из каждого уравнения, что бы их сумма была равна сумме оставшихся.
7. На доске были написаны 5 целых чисел – коэффициенты и корни квадратного уравнения. Одно из чисел стёрли, остались 2,3,4 и -5 в каком-то порядке. Восстановите пятое число (докажите, что именно оно).
8. Найдите решение уравнения $x+y=x^2-xy+y^2$ в целых числах.
9. Найдите решение уравнения $2x+3y+5z=11$ в целых числах.
10. Корни $x_1, x_2$ многочлена $f(x)=x^2+(3a+10)x+5b-14$ и его значение при $x=1$ являются простыми числами. Чему равны $a$ и $b$?
11. Корень $x_1$ многочлена $f(x)=x^2+px+q$ и его значение при $x=11$ являются простыми числами. Чему равны $x_1, x_2, p, q$?
12. Корни $x_1, x_2$ многочлена $f(x)=x^2+(2a+9)x+3b+5$ различные целые числа, коэффициенты $(2a+9)$ и $(3a+5)$ простые числа. Чему равны $a$ и $b$?
13. Корни $x_1, x_2$ многочлена $f(x)=x^2+px+q$ различные целые числа, а $p$ и $q$ различные простые числа. Чему равны $x_1, x_2, p, q$?
14. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(a;b)$ таких, что уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а второй меньше 0.
15. Найдите все пары многочленов $x^2+ax+b$ и $x^2+cx+d$, таких что $a,b$ - корни второго многочлена, а $c,d$ - первого.
16. Даны квадратные трехчлены (100 штук- $f_1(x), f_2(x),\dots f_{100}(x)$ ) с одинаковыми коэффициентами при $x^2$ и $x$, но различными свободными членами, при этом все сто дискриминантов положительные. У каждого из квадратных трехчленов $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили $x_i$. Какие значение может принимать сумма $f_2(x_1)+f_3(x_2)+f_4(x_3)+\dots+f_{100}(x_{99})+f_1(x_{100})$ ?
17. Два приведенных квадратных трехчлена ***f(x)*** и ***g(x)*** таковы, что каждый имеет по два корня и выполняются равенства ***f(1)=g(2)*** и ***f(2)=g(1)***. Найдите сумму всех четырех корней этих трехчленов.

18. При каком наименьшем натуральном ***n*** существуют такие целые $a_1, a_2, ..., a_n$, что квадратный трехчлен $x^2 - 2(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 x + (a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4 + 1)$ имеет по крайней мере один целый корень?
19. График квадратичной функции ***y=ax²+c*** пересекает оси координат в вершинах правильного треугольника. Чему равно ***ac***?

**Сборка**

1. Про некоторый набор, состоящий из 17 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трех различных чисел этого набора (имеется ввиду, что используются 5 различных чисел набора взятых произвольно). Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

Ответ: 629

2. Переход по мосту ночью. Группе из четырёх человек, у которых есть один фонарик, нужно ночью пройти по шаткому мостику. Одновременно мостик могут перейти максимум два человека. У тех, кто переходит мостик (один человек или два), должен быть фонарик. Фонарик нужно переносить туда-сюда, перебросить его нельзя. Человек A переходит мост за 5 минут, человек B — за 7 минут, человек C — за 11 минут, а человек D — за 12. Когда два человека переходят вместе, они идут со скоростью наиболее медленного из них. Найдите кратчайшее время, за которое они все перейдут мост.

Ответ: 40

3. Имеется тысяча банкнот по 1 доллару. Требуется разложить эти банкноты по 10 конвертам таким образом, чтобы можно было выдать любую сумму от 1 до 1000 долларов, комбинируя эти конверты (сдача не выдается). Какая максимальная сумма может быть выдана одним конвертом?

Ответ: 489

4. Из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 составлены 9 (необязательно различных) девятизначных натуральных чисел (каждая цифра использована ровно по 1 разу в каждом числе). На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться их сумма?

Ответ: 8

5. Одометр в машине показывает шестизначные числа от 000000 до 999 999 включительно. Если он пройдёт через весь диапазон значений, в скольких числах будет встречаться цифра 1 по меньшей мере один раз? (Например, число 101 111 добавляет пять единиц к общему счёту. Следующее значение одометра 101 112 добавляет ещё четыре.)

Ответ: 468559

6. Одометр в машине показывает шестизначные числа от 000000 до 999 999 включительно. Если он пройдёт через весь диапазон значений, в сколько всего раз встретится цифра 1? (Например, число 101 111 добавляет пять единиц к общему счёту. Следующее значение одометра 101 112 добавляет ещё четыре.)

Ответ: 600000

7. У нас есть 101 монетка. Известно, что среди них 51 фальшивых и 50 настоящих. Также известно, что вес фальшивой монетки отличается на 1 грамм от веса настоящей. Мы взяли из кучи одну, произвольно выбранную монету. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах, которые показывают разницу в весе на чашках, определить какую монету мы взяли - настоящую или фальшивую?

8. Записали несколько последовательных натуральных чисел. Каждое закрасили в красный или синий цвет (оба цвета присутствуют). Может сумма НОК чисел, закрашенных красных и НОК закрашенных синим, быть степенью двойки?

## Олимпиада 9-11

9.1.Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в желтый цвет, а три остальных — в зеленый. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трех желтых палочек, а другой — из трех зеленых?

9.2.Два ненулевых числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение $xy$?

9.3.Рассмотрим такие натуральные числа $a$, $b$ и $c$, что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим $a$ и $b$. Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$?

9.4. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке $A$. Проведем в большей окружности Ω хорду $CD$, касающуюся ω в точке $B$ (хорда $AB$ не является диаметром ω). Точка $M$ — середина отрезка $AB$. Доказать, что окружность, описанная около треугольника $CMD$, проходит через центр $\omega$.

9.5. Петя и Вася играют на доске 100 × 100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (Справа на рисунке показаны возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4 × 4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | П | | В |
| П | | | В |
| | | | В |

9.6. Десятизначные натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $a + b = c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечетными?

9.7. Вася записал в клетки таблицы $9 \times 9$ натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по одному числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдётся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

9.8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$. Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника $ABD$ лежит на биссектрисе угла $BCD$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $ABC$ лежит на биссектрисе угла $ADC$.

9.9. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим* в том случае, когда из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где $a$ и $b$ — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

9.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?

10.1. Первоклассник составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и разбил шесть палочек на две группы по три палочки: в первой группе оказались три самых длинных палочки, а во второй — три самых коротких. Обязательно ли можно составить треугольник из трех палочек первой группы? А из трех палочек второй группы?

10.2. Два ненулевых числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Может ли произведение $xy$ равняться отрицательному числу?

10.3. Пусть $S$ - множество, состоящее из натуральных чисел. Оказалось, что для любого числа a из множества $S$ существуют два числа $b$ и $c$ из множества $S$ такие, что $a = \dfrac{b(3c-5)}{15}$. Доказать, что множество $S$ бесконечно.

10.4. Вписанная окружность касается сторон $AB$, $BC$ и $CA$ неравнобедренного треугольника $ABC$ в точках $C_1$, $A_1$ и $B_1$ соответственно. Пусть $m$ — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне $B_1C_1$. Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает $m$ в точке $K$. Доказать, что описанная окружность треугольника $BCK$ касается $m$.

10.5. Петя и Вася играют на доске 100 × 100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (Справа на рисунке показаны возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4 × 4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | П | | В |
| П | | | В |
| | | | В |

10.6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа $a$ и $b$, а также их сумму $a + b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

10.7. Вася записал в клетки таблицы $9 \times 9$ натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по одному числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдётся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

10.8. Точка $M$ — середина основания $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$. На продолжении отрезков $AC$ и $BC$ за точку $C$ отмечены точки $D$ и $K$ соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников $ABD$ и $MCK$, касаются.

10.9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geq 3$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$, и ряд из $n$ клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких $n$ фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался?

10.10. Витя записал в тетрадь $n$ различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?

11.1. Натуральное число, большее 1000000, дает одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде тысяч?

11.2. Два ненулевых числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Какой знак может иметь произведение $xy$ (укажите все возможности)?

11.3. На оси $Ox$ отметили точки 0,1, 2,..., 100 и нарисовали графики 200 различных квадратичных функций, каждый из которых проходит через две из отмеченных точек и касается прямой $y = -1$. Для каждой пары графиков Олег написал на доске число, равное количеству общих точек этих графиков. После чего он сложил все 19900 чисел, написанных на доске. Мог ли он получить число 39699?

11.4. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу $\Omega$. Докажите, что сферы, симметричные $\Omega$ относительно прямых $SA$, $SB$, $SC$ и плоскости $ABC$, имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой $\ell$ - это сфера такого же радиуса, у которой центр симметричен центру исходной сферы относительно прямой $\ell$.

11.5. В Цветочном городе живет $99^2$ коротышек. Некоторые из коротышек рыцари (они всегда говорят правду), а остальные — лжецы (они всегда лгут). Дома в городе расположены в клетках квадрата $99 \times 99$ (всего $99^2$ домов, расположенных в 99 вертикальных и в 99 горизонтальных улицах). В каждом из домов живет ровно один коротышка. Номер дома обозначается парой чисел $(x; y)$, где $1 \le x \le 99$ — номер вертикальной улицы (номера возрастают слева направо), а $1 \le y \le 99$ — номер горизонтальной улицы (номера возрастают снизу вверх). *Цветочным расстоянием* между двумя домами с номерами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называется число $\rho = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Известно, что на каждой улице — вертикальной или горизонтальной — проживает не менее $k$ рыцарей. Кроме того, все коротышки знают, в каком доме живет рыцарь Знайка. Вы хотите найти его дом, но не знаете, как выглядит Знайка. Вы можете подходить к любому дому и спрашивать живущего в нем коротышку: «Каково цветочное расстояние от вашего дома до дома Знайки?». При каком наименьшем $k$ вы можете гарантированно найти дом Знайки?

11.6. Вася записал в клетки таблицы $9 \times 9$ натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по одному числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдётся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

11.7. Пусть $I$ — центр вписанной окружности остроугольного треугольника $ABC$, $M$ и $N$ — точки касания вписанной окружности сторон $AB$ и $BC$ соответственно. Через точку $I$ параллельно стороне $AC$ проведена прямая $\ell$ и на нее опущены перпендикуляры $AP$ и $CQ$. Докажите, что точки $M$, $N$, $P$ и $Q$ лежат на одной окружности.

11.8. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим* в том случае, когда из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида *aabb*, где $a$ и $b$ — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

11.9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень $10^5$, а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена $R(x) = P\left(x^{1000}+1\right) - P(x)^{1000}$

11.10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа $x$, $y$, $z$ на доске стираются, а вместо них записываются числа $x+\frac{1}{yz}$, $y+\frac{1}{zx}$, $z+\frac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.

## Доказательство неравенств

Некоторые специальные неравенства:

1. Неравенство Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, неотрицательных чисел)

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n};$$

2. Неравенство Бернулли

$(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha n)$, где $\alpha > -1$; n - натуральное число.

3. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца (КБШ)

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right);$$

4. Тождество Лагранжа

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{1\le k<i\le n} \left(a_i b_k - a_k b_i\right)^2;$$

К наиболее популярным способам доказательства неравенств отнесем:

1. На основе определения.
2. Выделение полного квадрата.
3. Метод последовательных оценок.
4. Метод математической индукции.
5. Использование специальных и классических неравенств.
6. Использование математического анализа.
7. Геометрические соображения.
8. Доказательство белее сильного утверждения.

Задачи:

1. $\sqrt{2x^{1006} - \left(x^{2012} + 1\right)} \ge 3x^{1799} + 1;$ Ответ:-1;

2. Докажите неравенство

$$\left.\begin{array}{l} a,b,c>0, \\ ab+ac+bc=1; \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{a+\frac{1}{a}} + \sqrt{b+\frac{1}{b}} + \sqrt{c+\frac{1}{c}} \ge 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right);$$

3. Доказать неравенство:

а) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2 \cdot (a + b + c)$;

б) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$;

в) $x^5 + y^5 – x^4y – x^4y \ge 0$, при $x > 0$, $y > 0$.

4. Доказать неравенство:

а) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$ при $a > 0$, $b > 0$;

б) $\frac{P}{a} + \frac{P}{b} + \frac{P}{c} \ge 9$, где a, b, c – стороны и P – периметр треугольника;

в) $ab(a + b – 2c) + bc(b + c – 2a) + ac(a + c – 2b) > 0$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

5. Доказать, что если $a + b = 1$, то имеет место неравенство $a^8 + b^8 \ge {}^1/_{128}$.

6. Что больше $e^e \cdot \pi^\pi$ или $e^{2\pi}$?

7. Доказать, что $\lg(n+1) \ge \frac{\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n}{n}$;

8. Доказать, что $2013^{2015} * 2015^{2013} < \left(2014^2\right)^{2014}$;

9. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется неравенство:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}=\frac{2n-1}{n};$$

10. Пусть $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$– квадраты n различных натуральных чисел. Докажите, что

$$\left(1-\frac{1}{a_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{a_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{a_n^2}\right)>\frac{1}{2};$$

11. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Известно, что $a_1+a_2+\ldots+a_n<\frac{1}{2}$. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)>2;$$

12. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - положительные числа. Докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2;$$

13. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - положительные числа. Докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k}\right)\geq 4n^2;$$

14. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}{b_1+b_2+\ldots+b_n};$$

15. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - положительные числа. Докажите неравенство

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(a_1^7+a_2^7+\ldots+a_n^7\right)\geq\left(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\right)\left(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5\right);$$

16. Докажите неравенство

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha+\cos\beta\leq 2;$$

17. Даны положительные числа $a, b, c$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2};$$

18. Даны положительные числа $a, b, c$. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2;$$

19. Даны положительные числа $x, y, z\in[0;1]$.. Докажите неравенство

$$3\left(x^2y^2+x^2z^2+z^2y^2\right)-2xyz(x+y+z)\leq 3;$$

20. $$\left.\begin{array}{l} a>0, \\ b>0, \\ a^2+b^2>a+b; \end{array}\right\}\Rightarrow a^3+b^3>a^2+b^2;$$

21. Даны положительные числа $a,b,c,d$. Докажите неравенство

$$1<\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}<2$$

22. Даны положительные числа $a,b,c,d$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq 2;$$