Теория чисел

$\mathbb{N}$ – *множество натуральных чисел*

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}$ – *множество целых чисел*

$\mathbb{Q}$ – *множество рациональных чисел*

$\mathbb{R}$ – *множество действительных чисел*

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ – *множество иррациональных чисел*

$\mathbb{C}$ – *множество комплексных чисел*

Последовательности. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия. Бесконечные последовательности.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 - \text{ первый член прогрессии} \\ d - \text{ разность прогрессии} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{задана прогрессия} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + d(n-1);\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - \text{ первый член прогрессии} \\ q - \text{ разность прогрессии} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{задана прогрессия} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1};\quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{(q-1)}$$

Бесконечно убывающая прогрессия $0 < q < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q};\quad |q| < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q};$$

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

$x = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$ *– разложение натурального числа на простые множители*

$Q = (1+n_1)(1+n_2)\dots(1+n_k)$ *– количесвто натуральных делителей натурального числа*

Сумма всех натуральных делителей натурального числа

$$S = \left(1+p_1^1+p_1^2+\dots+p_1^{n_1}\right)\cdot\left(1+p_2^1+p_2^2+\dots+p_2^{n_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+p_k^1+p_k^2+\dots+p_k^{n_k}\right)$$

Задачи для решения

1. Решите уравнение в натуральных числах $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}$.

2. Ваня задумал простое трехзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может заканчиваться, если последняя цифра (разряд единиц) равна сумме первых двух?

3. Укажите все натуральные числа, у которых 6 натуральных делителей, сумма которых 504.

4.Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке не убывания. Если какое-то число, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске остается одно такое число, а остальные, равные ему стираются. Например, если задуманы «1,3,3,4», то на доске будет набор «1,3,4,5,6,7,8,10,11»

а) Приведите пример, задуманных чисел, для которых будет записан набор «1,2,3,4,5,6,7,8»

б) Существует ли пример задуманных чисел, для которых на доске будет набор «1,3,4,5,7,9,10,11,12,13,14,16,18,19,20,22»?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых выписан набор «5,6,8,10,11,13,14,15,16,18,19,21,23,24,29»

5. В живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного) кроликов, но не всех. Первый ученик дает порцию по 100 гр, второй – по 200 гр, третий – по 300 гр., а четвертый – по 400 гр. а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?

б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили различное количество корма?

в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик насыпал корм ровно четырем кроликам и все кролики получили разное количество корма?

6. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел «-3», среднее арифметическое положительных «4», а отрицательных «-8».

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

7. В течении четверти учитель ставил детям оценки «1,2,3,4,5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять 4-ки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

8. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40, но меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

9. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1a_2\dots$ состоит из натуральных чисел. Пусть $S_1=a_1$; $S_2=a_1+a_2$; … $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$; натуральное n, n>1;

а) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10}=100S_1$;

б) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10}=50S_2$;

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 \cdot S_{10}}$?

10. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел

«-11,12,13,-14,-15,17, -18,19». Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному из чисел «-11,12,13,-14,-15,17, -18,19». После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое не отрицательное число может в результате получиться?

12. У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых возможно и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более ¼ от общего числа детей, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более 5/11 от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли в классе быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительных условий пунктов а) и б)?

13. В некотором царстве было несколько (более 2) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было изначально. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь образованных объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после какого-то деления общее число княжеств было 162?

в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

14. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма

чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3. а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни. быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?
Ответ: а) да, б) да, в) 48

15. В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.

а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?

б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?

в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

Ответ: а) нет, б) нет, в) 39

1. Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждый член начиная со второго отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.
а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?
2. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?
3. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке не убывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.
а) На доске выписан набор -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?
4. У каждого ученика в классе дома живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.
а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?
б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а) и б)?
5. В некотором царстве было несколько (более 2) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было изначально. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь образованных объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после какого-то деления общее число княжеств было 162?

в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

6. На доске написаны числа, каждое из которых не меньше 50, но не более 150. Каждое из чисел a_i уменьшили на r_i%. При этом для каждого i ($1 \leq i \leq n$), либо r_i=2, либо a_i уменьшилось на 2.

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ быть равным 5?

б) Может ли оказаться среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ больше 2?

в) Пусть на доске написано 30 чисел, сумма которых уменьшилась на 40. Найдите наибольшее значение среднего арифметического $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Ответы:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
а) 3; б)72;	а) нет. б) да. в) 477	а) -3; 2; 4. б) 5. в) нет	а) да. б) 11. в) $\frac{6}{13}$	а) нет. б) нет. в) 38	а) нет. б) да. в) $\frac{8}{3}$