| **1. Свойства степени** | **2. Свойства логарифмов** |
|---|---|
| 1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-штук}$;<br>2) $a^0 = 1; a \neq 0$;<br>3) $a^1 = a$;<br>4) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;<br>5) $a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;<br>6) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$;<br>7) $a^p : b^p = \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p; b \neq 0$;<br>8) $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$;<br>9) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}; a \neq 0$;<br>10) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; a \geq 0$;<br>$n, m \in \mathrm{N}$!!! | 1. $\log_a 1 = 0$;<br>2. $\log_a a = 1$;<br>3. $\log_a (bc) = \log_a \lvert b \rvert + \log_a \lvert c \rvert$;<br>4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a \lvert b \rvert - \log_a \lvert c \rvert$<br>5. $\log_{10} a = \lg a$ - десятичный логарифм<br>6. $\log_e a = \ln a, e = 2{,}7182818284\ldots$ - натуральный логарифм<br>7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ - переход на новое основание<br>8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ - следствие свойства 7.<br>9. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_{\lvert a \rvert} \lvert b \rvert$ - свойство вынесения степени<br>10. $a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество<br>11. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ |
| **3. О.Д.З. (область определения)** | **4. Решение логарифмических неравенств (метод рационализации)** |
| 1) $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$;<br>2) $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$;<br>3) $y = \sqrt[2n]{f(x)}, n \in \mathrm{N} \Rightarrow f(x) \geq 0$;<br>4) $y = \left(f(x)\right)^p, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = \frac{m}{n} \Rightarrow f(x) \geq 0, m, n \in \mathrm{N}; \\ p = -\frac{m}{n} \Rightarrow f(x) > 0, m, n \in \mathrm{N}; \end{array}\right.$<br>5) $y = \log_{g(x)} f(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ g(x) \neq 1; \end{cases}$<br>6) $\left[\begin{array}{l} y = \arcsin f(x) \\ y = \arccos f(x) \end{array}\right. \Rightarrow \lvert f(x) \rvert \leq 1$; | 1) $\log_a f(x) - \log_a g(x) \geq 0; \Leftrightarrow \begin{cases} О.Д.З. \\ (a-1) \cdot \left(f(x) - g(x)\right) \geq 0; \end{cases}$<br>2) $\log_a f(x) \geq 0; \Leftrightarrow \begin{cases} О.Д.З. \\ (a-1) \cdot \left(f(x) - 1\right) \geq 0; \end{cases}$<br>3) $\frac{\log_a b \cdot \log_c d}{\log_m n \cdot \log_x y} \geq 0; \Leftrightarrow \begin{cases} О.Д.З. \\ \frac{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}{(m-1)(n-1)(x-1)(y-1)} \geq 0; \end{cases}$<br>4) $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} О.Д.З. \\ (a-1) \cdot \left(f(x) - g(x)\right) \leq 0; \end{cases}$<br>5) $\log_f h - \log_g h \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} О.Д.З. \\ (f-1)(g-1)(h-1)(g-f) \leq 0; \end{cases}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $2^{\|x\|}-6-\dfrac{9\cdot 2^{\|x\|}-37}{4^{\|x\|}-7\cdot 2^{\|x\|}+12}\le\dfrac{1}{2^{\|x\|}-4}$; | $[-3;-2),(-2;-\log_2 3),\{0\},(\log_2 3;2),(2;3]$ |
| 2. | $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1}>0$ | $x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)\cup(1;2)$. |
| 3. | $\log_{(x-3)}(2x+4)^{\sqrt{13-x}}\le\sqrt{13-x}$ | $(3;4);\{13\}$ |
| 4. | $\sqrt{2x+3}>x$ | $x\in\left[-\dfrac{3}{2};3\right)$ |
| 5. | $\dfrac{\sqrt{5-x}}{9^x-81}\le 0;$ | $(-\infty;2),\{5\}$ |
| 6. | $\dfrac{x-7}{\log_{x-6}7}\ge 0;$ | $(6;7),(7;+\infty)$ |
| 7. | $\log_{2-x}3\le\log_{2-x}x$ | $(1;2)$ |
| 8. | $2^{\lg\left(x^2-1\right)}\ge(x+1)^{\lg 2}$ | $[2;+\infty)$ |
| 9. | $\log_6\left(64^x+36^x-65\cdot 8^x+64\right)\ge 2x.$ | $(-\infty;0],[2;\infty)$ |
| 10. | $\log_{(x+1)}\|x-3.5\|\ge 0$ | $(0;2.5],[4.5;+\infty)$ |
| 11. | $\log_x e+\log_{(x+2)}e<0$ | $\left(\sqrt{2}-1;1\right)$ |
| 12. | $\left(x^2+3x+2\right)\cdot\log_{(x+3)}(x+2)\cdot\log_3(x-1)^2\le 0$ | $\{-1\},[0;1),(1;2)$ |
| 13. | $\log_{(x-1)}(5-x)\cdot\log_{(x-1)}x\ge 0$ | $(1;2),(2;4]$ |
| 14. | $\dfrac{\log_5 x\cdot\log_{\left(x^2-15\right)}(x+2)}{\log_7 x\cdot\log_x 2}\le 0$ | $\left(\sqrt{15};4\right)$ |

## ВАРИАНТ 1

**12.** а) Решите уравнение $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(-\pi-x)=0.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

**Ответ: а)** $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}; 2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ **б)** $-\frac{5\pi}{2};-2\pi;-\frac{3\pi}{2};$

**13.** Основанием треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник $ABC$ со сторонами $AB=BC=9$, $AC=6$. Боковое ребро $AA_1$ равно 4. Точка $M$ лежит на ребре $A_1B_1$, причём $A_1M=2$.
а) Докажите, что прямые $C_1M$ и $AB$ перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями $AC_1M$ и $BC_1M$.

**Ответ:** б) $\arccos\frac{\sqrt{13}}{65}$

**14.** Решите неравенство $x\log_2(5-x)\le\log_3\left(x^2-10x+25\right)$.

**Ответ:** $(-\infty;2\log_3 2];[4;5)$.

**15.** Зависимость количества $Q$ (в шт., $0\le Q\le 20000$) купленного у фирмы товара от цены $P$ (в руб. за шт.) выражается формулой $Q=20000-P$. Затраты на производство $Q$ единиц товара составляют $9Q^2$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог $t$ рублей ($0<t<19000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ-9Q^2-tQ$ рублей, а общая сумма налогов равна $tQ$ рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении $t$ общая сумма налогов будет максимальной?
**Ответ:** 10000

**16.** Дан ромб $ABCD$ с острым углом $B$. Окружность с центром в точке $D$ проходит через точки $A$ и $C$. Прямая $AB$ вторично пересекает эту окружность в точке $P$, а прямая $PD$ вторично пересекает эту окружность в точке $Q$.
а) Докажите, что луч $PC$ является биссектрисой угла $APQ$.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ACQP$, если $AB = 5$, $\cos B=\frac{4}{5}$.

**Ответ:** б) 27

**17.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{a^2-4}\cdot x^4+2(1-a)\cdot x^2+\sqrt{a^2-4}=0$ имеет хотя бы два различных корня.

**Ответ:** $2<a\le\frac{5}{2}$.

**18.** На доске было написано не менее 10 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 50. Сумма написанных чисел была равна $S$. Петя умножил какие-то десять из написанных на доске чисел на 12 и написал на доске получившиеся десять произведений вместо исходных чисел. После этого сумма написанных на доске чисел стала равна $5S$.
а) Могло ли на доске быть написано 12 чисел?
б) Могло ли на доске быть написано 50 чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение $S$.
**Ответ: а) да; б) нет; в) 1243;**