

Геометрия задача 16 - 2022

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$. б) Найдите углы трапеции.

2. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P , отличной от O , и не проходят через точку O . Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN .

б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC = BD$, а $MN = 10$.

4. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB .

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1:4.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH .

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH .

б) Найдите CL , если известно, что $CM = 10$, $CH = 6$.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD , P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC .

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB .

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q . Найдите отношение $PM:BQ$, если известно, что $AB:AC = 1:3$.

7. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D . При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC = 15$, $BC = 20$.

8. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC , если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC .

9. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A . Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M .

а) Докажите, что M — середина AB .

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P . Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды AP , если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

10. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D , отличной от A .

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC .

б) Найдите угол BAC , если известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, а точка D лежит на стороне BC , причём $DB:DC = 1:3$.

- 11.** Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.
- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 - Найдите его боковые стороны.
- 12.** В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN . Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.
- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 - Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если также известно, что $AB = 4\sqrt{5}$.
- 13.** Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.
- Докажите, что трапеция равнобедренная.
 - Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.
- 14.** Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольнике ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .
- Докажите, что $KT \parallel DE$.
 - Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.
- 15.** Точки D и E — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.
- Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.
 - Найдите MN , если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.
- 16.** На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .
- Докажите, что $CM \perp DK$.
 - Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.
- 17.** Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.
- Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB .
 - Найдите высоту треугольника ABC , проведённую из вершины A .
- 18.** Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.
- Докажите, что $ABCD$ — ромб.
 - Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM:MB=2:1$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = \sqrt{6}$.
- 19.** Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.
- Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.
 - Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.
- 20.** Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC , продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N . Точка M — середина основания BC .
- Докажите, что $AN = OM$.
 - Найдите OM , если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Ответы:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
60⁰, 120⁰	48	50	20	$3\sqrt{5}$	1:1	9:16	90⁰	$3\sqrt{13}$	90⁰
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
30	5	216	60⁰	3,5	49	2,4	$2\sqrt{5}$	113	$2\sqrt{41}$