ВЫПОЛНЕНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ “КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА”

1. СОДЕРЖАНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Контрольные вопросы

1. Алгебраическая форма комплексного числа и его изображения на комплексной плоскости, действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
3. Умножение, деление и возведение в целую положительную степень комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательной форме.
4. Извлечение корня целой положительной степени из комплексного числа.

Практические задания

Введены следующие обозначения: n – номер студента в списке, $\lambda=[n/4]$ – целая часть дроби, $\mu = n-4\lambda$ - остаток при делении числа на 4, ν - последняя цифра в номере группы.

Задание 1. Найти комплексные корни квадратного уравнения и изобразить их на комплексной плоскости:

$(\nu+1)^2z^2-2z(\lambda+\mu)(\nu+1)+2\lambda^2+\mu^2+1+2\lambda(\mu+1)=0.$

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$$\frac{5\lambda - 9\mu - 4i(\lambda^2+\mu^2-7\lambda-3\mu-12)}{\lambda-8-(\mu-4)i}+\frac{-\lambda-1+i(\nu^2+\nu+(\lambda+1)^2)}{\lambda+1+i(\nu+1)}.$$

Задание 3. Дано комплексное число: $z=\dfrac{(\sqrt{2})^{\lambda}i^{\mu+\nu}}{1+i\sqrt{2+(-1)^{\lambda}}}$,

а) записать его в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

б) вычислить произведение $w=z^3\cdot e^{i\pi/(\mu+1)}$, используя показательную форму числа z, ответ записать в тригонометрической форме со значением аргумента $0\le \arg w\le 2\pi$.

Задание 4. Найти все значения корня и изобразить на комплексной плоскости

$$\sqrt[\mu+3]{\left(\sqrt{2}\right)^{\lambda+1}\left(i^{\mu+\nu+1}\sqrt{2+(-1)^{\lambda+1}}\right)}.$$

Задание 5. Определить величину тока j в цепи (рис. 14.1), к которой подведено напряжение в 220 В, частотой 50 гЦ, если активное сопротивление $R=(\lambda+\mu)$ Ом, а индуктивность $L=(0{,}012+(10(\mu+1)+\nu)\cdot 10^{-3})$ Гн.

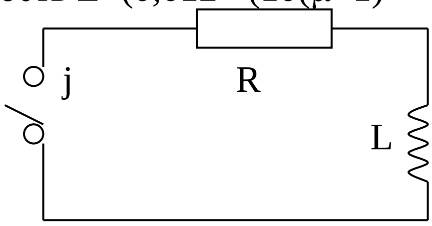

рис. 14.1

РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ

Задания 1- 4 решаются аналогично разобранным в п. 6 задачам 1- 4 с помощью формул опорного конспекта №6.

При выполнении задания 5 требуется применить полученные знания из теории комплексных чисел для решения практической задачи.

Тригонометрическая $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и показательная $z=re^{i\varphi}$ формы комплексного числа широко используются в описании колебательных процессов. Для этого аргумент φ представляется в виде $\varphi=\omega t+\alpha$, где $\omega=2\pi\nu$ - круговая частота колебаний, ν - частота, α - начальная фаза, t – время. Использование полученных таким образом комплексных функций вещественного аргумента

$$z=F(t)=r[\cos(\omega t+\alpha)+i\sin(\omega t+\alpha)]=re^{i(\omega t+\alpha)} \quad (1)$$

основано на простом правиле дифференцирования этих функций

$$\frac{d}{dt}[F(t)]=\frac{d}{dt}\left[re^{i(\omega t+\alpha)}\right]=re^{i(\omega t+\alpha)}\omega iF(t). \quad (2)$$

Таким образом, операция дифференцирования функции F(t) сводится к простому ее умножению на комплексную величину $i\omega$.

Рассмотрим применение функций (1) при расчете установившегося тока j_0 в электрической цепи с заданным активным сопротивлением R и индуктивностью L [рис. 1]. Пусть к цепи подключен источник напряжения φ, меняющегося по закону $\varphi=\varphi_0\sin(\omega t+\beta)$. Известно, что в этом случае в цепи возникает ток, который будет меняться по гармоническому закону $j=j_0\sin(\omega t+\alpha)$, где j_0 и α - неизвестные величины. На основе известного в физике второго закона Кирхгофа основное уравнение для определения j имеет вид:

$$L\frac{dj}{dt}+Rj=\varphi. \quad (3)$$

Для простоты решения этого дифференциального уравнения представим напряжение и ток в комплексном виде

$$\Phi=\varphi_0 e^{i(\omega t+\beta)};\ J==j_0 e^{i(\omega t+\beta)}.$$

На основании (1) реальные значения тока и напряжения составляют мнимые части этих выражений.

Уравнение Кирхгофа для комплексных величин Ф и J запишется аналогично (3) следующим образом:

$$L\frac{dJ}{dt}+RJ=\Phi. \qquad (4)$$

Используя свойство (2) для комплексных функций $(\frac{d}{dt}J=i\omega J)$, дифференциальное уравнение (4) можно привести к алгебраическому уравнению $Li\omega J + RJ=\Phi$. Откуда получаем

$$J=\frac{\Phi}{R+i\omega L}. \qquad (5)$$

Модуль полученного по формуле (5) комплексного числа и представляет искомое значение тока j_0.

Пример. Определить величину тока в цепи (рис. 1), к которой подведено напряжение 220 В с частотой 50 Гц, если R= 50 ом; L=0,023 Гн.

Решение: По условию задачи ν=50 Гц; $\omega=2\pi\nu=2\cdot3{,}14\cdot50=314$; $\Phi=220\ e^{i0}$. Вычисляем знаменатель дроби в формуле (5)

$z=R+i\omega L=5+i\cdot314\cdot0{,}023=5+7{,}222i$.

Представляем это комплексное число в показательной форме

$R+\ i\omega L=\sqrt{5^2+(7{,}222)^2}e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{7{,}222}{5}}=8{,}784e^{i\cdot0{,}96}$.

По формуле (5) вычисляем комплексную величину тока

$$J=\frac{220\cdot e^{i0}}{8{,}784e^{i\cdot0{,}96}}=25{,}046e^{-i\cdot0{,}96}.$$

Искомое значение величины тока 25А.