Функции нескольких переменных

Дифференциал функции двух переменных: $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,\ du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$

Приближенные вычисления: $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y.$

Производная по направлению: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$

Градиент: $\mathrm{grad}\,u(M) = \vec{i}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}.$

Задачи и упражнения

1. Найти и построить области определения заданных функций, являются ли они открытыми, замкнутыми, ограниченными:

1.	2.	3.	4.	5.
$z = x - y$	$z = \dfrac{1}{x^2+5y^2}$	$z = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$	$z = \arcsin\dfrac{x+1}{y}$	$z = \sqrt{1-x} + \ln(y+2)$

2. Найти и построить линии и поверхности уровней функций:

1.	2.	3.	4.	5.
$z = x - y$	$z = x^2 - y^2$	$z = \dfrac{y}{x}$	$z = 1 - x^2 - y^2$	$z = \arcsin\dfrac{y}{x^2}$

3. Найти частные производные, полные дифференциалы первого порядка и градиенты от следующих

1.	2.	3.	4.	5.
$z = x^2y + xy^2 + x + y + 4$	$z = \ln\left(x^2+y^2\right)$	$z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$	$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$z = arc\sin\sqrt{xyz}$

4. Найти производные нижеприведённых функций в точке M_0 по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{M_0N}$, если:

1) $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, $M_0(3,1), N(6,5)$; 2) $z = \mathrm{arctg}(xy)$, $M_0(1,1), N(-2,5)$;

3) $z = \ln(x+y)$, $M_0(1,2), N(2,3)$; 4) $u = x^2 + y^2 + z^2, M_0(1,2,2), N(0,0,0)$.

5. Вычислить приближённо: 1) $\sqrt{3{,}12^2 + 0{,}2^2}$; 2) $2{,}03^{3{,}02}$;. 3) $\sqrt[3]{2{,}06^2 + 3{,}88}$; 4) $\ln\left(\sqrt{1{,}06} - \sqrt[4]{0{,}96} - 1\right)$.

Частные производные 2-го порядка функции $z=f(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y);$$

Уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$

Дифференциалом второго порядка функции: $d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$

Дифференциалы высших порядков: $d^m u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z;$

6. Найти частные производные 2-го порядка от следующих функций: 1) $z=x^4+y^4-2x^2y^3$; 2) $z=xy+\frac{x}{y}$; 3) $\ln\left(x^2+y^2\right)$; 4) $z=x^y$; 5) $z=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 6) $z=xye^{-xy}$; 7) $z=\sin(xy)$; 8) $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$;

9) $z=xy+yz+zx$; 10) $z=x^2y+y^2z+z^2x$; 11) $z=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7. Показать, что: 1) функции $z\left(x^2+y^2\right)$ и $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; 2) функция $z=\cos(x\cdot y)$ - дифференциальному уравнению $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x^2y^2z$;

3) функция $u=A\sin(\lambda x)\cdot\cos(a\lambda t)$ - уравнению колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; 4) функция

$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ - уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; 5) функция $u=\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2+z^2}}$

- удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

8. $z=x^2y+y^2x$. Найти d^2z в точке $M(1,2)$.

9. $z=xy-\frac{y}{x}$. Найти d^2z в точке $M(1,1)$ при $\Delta x=0{,}2$ и $\Delta y=-0{,}3$.

10. Найти дифференциалы второго порядка от данных функций:

1) $z=x^3+x^2y^2+y^3$; 2) $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$; 3) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$; 4) $z=e^{xy}$; 5) $u=xy+yz+zx$; 6) $u=e^{xyz}$.

Производные и дифференциалы сложных функций

$\left.\begin{array}{l} z=f(x,y), \\ x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ t\in[a,b]. \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ $t=x\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$	$\left.\begin{array}{l} z=f(x,y), \\ x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v). \end{array}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \end{array}\right.$

Задачи и упражнения

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если:1) $z=x^2+y^2+xy$, где $x=e^t$, $y=\cos t$; 2) $z=e^{3x-2y}$, где $x=t^2+1$, $y=\sin 2t$; 3) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, где $x=e^t+e^{-t}$, $y=e^t-e^{-t}$. 2.Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если:1) $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$, где $y=x^2+1$; 2) $z=\arcsin(x\cdot y)$, где $y=e^x$. 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x\ln y$, где $x=\frac{u}{v}$, $y=u-v$. 4. Найти $\frac{\partial z}{\partial r}$ и $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$, если $z=x^2y+y^2x$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. 5. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$, если $z=f(x,y)$, где $x=u+v$, $y=u-v$. 6. Найти dz, если $z=f(x,y)$, где $x=u\cdot v$, $y=\frac{u}{v}$. 7. Найти dz и d^2z, если $z=f(x,y)$, где $x=u^2+v^2$, $y=u\cdot v$. 8. Показать, что функция $z=f\left(x^2+y^2\right)$, где $f(u)$ - дифференцируемая функция, удовлетворяет однородному уравнению $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$. 9. Доказать справедливость формулы $d^2z=z''_{xx}dx^2+\ \ +2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2+z'_xdx^2+z'_ydy^2$, где $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G$ - сложная, дважды дифференцируемая функция.

Экстремумы функций двух переменных

Функция $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G$ имеет минимум (максимум) во внутренней точке $M_0(x_0,y_0)\in G.$ Если в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция дифференцируема, то необходимым условием экстремума функции в этой точке является обращение в нуль её частных производных 1-го порядка: $z'_x(M_0)=0$ и $z'_y(M_0)=0$. Такие точки называются стационарными. Но функция может иметь экстремум и в точках, где она не дифференцируема. Точки, в которых частные производные функции 1-го порядка обращаются в нуль или не существуют, называются её критическими точками

Одно из достаточных условий экстремума функции двух переменных описывается с помощью частных производных второго порядка $A = z''_{xx}(M_0)$, $B = z''_{xy}(M_0)$, $C = z''_{yy}(M_0)$ и дискриминанта $\Delta = AC - B^2$.

Функция $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G$ в стационарной точке $M_0(x_0,y_0)$:

1) имеет экстремум, если его дискриминант $\Delta > 0$. В частности, если $A > 0$ (или $C > 0$, если $A = 0$), то $M_0(x_0,y_0)$ - точка минимума; если $A < 0$ - то $M_0(x_0,y_0)$ - точка максимума;

2) не имеет экстремума, если $\Delta < 0$.

Случай $\Delta = 0$ требует дополнительных исследований.

Задачи и упражнения

1. Найти экстремум следующих функций: 1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; 2) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; 3) $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x + 2$; 4) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 9x - 6y + 20$; 5) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; 6) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; 7) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; 8) $z = 1 - \sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13}$; 9) $z = x^2 - y^2$;

Условный экстремум

Функция $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G$ имеет условный минимум (максимум) во внутренней точке $M_0(x_0,y_0) \in G$, если для любых точек $M(x,y)$ из некоторой окрестности $O(M_0)$, удовлетворяющих уравнению связи $\varphi(x,y) = 0$, выполняется условие $\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$, $(\Delta f(x_0,y_0) \leq 0)$.

В общем случае эта задача приводится к отысканию обычного экстремума функции Лагранжа $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ с неизвестным множителем Лагранжа λ.

Необходимое условие экстремума функции Лагранжа $L(x,y,\lambda)$ представляет собой систему из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными x, y и λ: $\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ L'_\lambda = \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$

Пусть $M_0(x_0,y_0)$, λ_0 - любые решения этой системы. Составим определитель

$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0) & L''_{xy}(M_0) \\ \varphi'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0) & L''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}$, тогда достаточное условие экстремума функции Лагранжа заключается в следующем утверждении: если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет условный минимум, если $\Delta < 0$ - то условный максимум.

Задачи и упражнения

1. Найти условный экстремум следующих функций: 1) $z = x \cdot y$ при: а) $x + y = 6$, б) $x + y = -6$; 2) $z = x^2 y$ при $2x + y = 1$; 3) $z = x + y$ при $x^2 + y^2 = 2$; 4) $z = 8x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}$; 5) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при: а) $x + y = 6$, б) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$; 6) $z = x^2 + y^2 - xy - 3x$ при $x + y - 1 = 0$; 7) $u = x + y + z$ при $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$;

8) $u = xyz$ при $\begin{cases} x + y + z = 5, \\ xy + yz + zx = 8. \end{cases}$

Уравнение касательной плоскости к поверхности:

$$\left.\begin{matrix} F(x,y,z) = 0, \\ M(x_0;y_0;z_0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности: $\dfrac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}} = \dfrac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}} = \dfrac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$

Линия пересечения двух поверхностей: $L: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Направляющий вектор касательной к L: $\bar{S} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{M_0}$.

Задачи и упражнения

Для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках: 1) G: $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M_0(3;4;-7)$. 2) G: $z = \sin x \cos y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$.

3) G: $x^2 yz + 2x^2 z - 3xy + 2 = 0$, $M_0(1;0;-1)$.

Составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости для данных линий в указанных точках: 4) $L:\begin{cases} y^2+z^2=25 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}, M_0(1;3;4)$. 5) $L:\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47 \\ x^2+2y^2=z \end{cases}, M_0(-2;1;6)$.

Указание: В задачах 4), 5) воспользоваться формулой для направляющего вектора $\overline{s}$ касательной прямой.