Ряды

1. Числовые знакопостоянные ряды $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ (сходится, расходится)

1.1. Необходимое условие сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \Rightarrow \textit{продолжить исследование}, \\ l \neq 0 \Rightarrow \textit{ряд расходится} \end{cases}$

1.2. Признак Даламбера (применяется при наличии факториала или показательной функции)

$$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Rightarrow \begin{cases} l < 1 \Rightarrow, \textit{ряд сходится}, \\ l > 1 \Rightarrow \textit{ряд расходится}, \\ l = 1 \Rightarrow \textit{использовать другой метод исследования}. \end{cases}$$

1.3. Признак сравнения (сравнить с обобщенно - гармоническим рядом)

$$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} p > 1 \Rightarrow, \textit{ряд сходится}, \\ p \leq 1 \Rightarrow \textit{ряд расходится}. \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0, (1) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, b_n \geq 0, (2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq \infty \Rightarrow (1) \textit{ и } (2) - \textit{сходятся и расходятся одновременно}, \\ \left.\begin{matrix} a_n \geq b_n, \forall n \\ (1) - \textit{сходится} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2) - \textit{сходится} \\ \left.\begin{matrix} a_n \geq b_n, \forall n \\ (2) - \textit{расходится} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1) - \textit{расходится} \end{matrix}\right\}$$

1.4. Интегральный признак (чаще всего при наличии ln(n))

$$\int\limits_{n_0}^{\infty} u(x)\,dx \Leftrightarrow \sum\limits_{n_0}^{\infty} u_n \Rightarrow \textit{интеграл и ряд сходятся и расходятся одновременно}$$

1.5. Радикальный признак Коши $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \Rightarrow \begin{cases} l > 1 - \textit{расходиться}, \\ l < 1 - \textit{сходиться}, \\ l = 1 - \textit{ответа нет, применить другой признак}. \end{cases}$

2. Числовые знакочередующиеся ряды $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n u_n$ (условно сходится, сходится абсолютно, расходится)

2.1. Исследовать на абсолютную сходимость

$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ - сходится, тогда $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n u_n$ - сходится абсолютно;

$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ - расходится, тогда перейти к пункту 2.

2.2. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \\ u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots u_n \geq \end{cases} \Rightarrow \textit{ряд сходится условно}$

Иначе расходится.

3. Степенные ряды $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n (x-a)^n$

3.1. Найти интервал сходимости степенного ряда, для этого найти предел и решить полученное неравенство

$$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x-a)^{n+1}}{u_n (x-a)^n} \right| < 1$$

3.2. Исследовать на концах интервала сходимости.

4. Ряды Тейлора и Макларена

<u>4.1.</u> $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$ - ряд Тейлора;

<u>4.2.</u> $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ -ряд Макларена;

<u>4.3.</u> Разложение в ряд Макларена основных элементарных функций

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot1}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots,\ x\in(-1,1)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\ x\in(-1,1)$$

<u>4.4.</u> приближенные вычисления с помощью рядов (значение функции, определенный интеграл, ОДУ). Основная идея – разложение в ряд и почленное рассмотрение.

<u>Задачи</u>

1. Записать формулу общего члена ряда.

1) $\frac{3}{2}+\frac{5}{7}+\frac{7}{12}+\frac{9}{17}+\frac{11}{22}+\ldots$ 2) $\frac{1}{\ln^2 2}+\frac{2}{\ln^2 3}+\frac{3}{\ln^2 4}+\frac{4}{\ln^2 5}+\ldots$ 3) $\frac{1}{9}+\frac{4}{13}+\frac{9}{17}+\frac{16}{21}+\frac{25}{25}+\ldots$

4) $\frac{1}{2\ln^5 2}+\frac{1}{3\ln^5 3}+\frac{1}{4\ln^5 4}+\frac{1}{5\ln^5 5}+\ldots$ 5) $\frac{3}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{11}{2^3}+\frac{15}{2^4}+\ldots$ 6) $\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\ldots$

7) $1+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{4}+\frac{2^4}{5}+\frac{2^5}{6}+\ldots$

2. Исследуйте сходимость следующих рядов с помощью признаков сравнения.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/3^n)}{4n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}n}{n^3+5}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2}{n^2+9}\right)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\sqrt{2n-1}}{\sqrt[3]{n^2}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n^4+2}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4+\sqrt[3]{2n+1}}{\sqrt[8]{n^{15}+2}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln((n+1)/n)}{n^2+4}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi+\cos n}{\sqrt[7]{n^5}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\sin n}}{\sqrt[3]{n+1}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos^2(n+1)}{n^4+7}$;

3. Исследуйте сходимость ряда с помощью признаков сравнения.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^3-\sqrt{n}+2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+4}{n^3-2n+5}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{n^2-7}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+8}{4n+5}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt{n}+6}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt[3]{n}+2}{n^2+n-1}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sqrt{n}+1}{n^4+5n-1}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n\sqrt[3]{n}+5n+2}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n-1}{n^3\sqrt{n}+4}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n\sqrt{n}+2}{n^3+3n+4}$;

4. Исследуйте сходимость ряда с помощью признака Даламбера.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(n-1)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{2^n\cdot(n!)^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3}}{(2n+1)!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^{n+1}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2^n+1)(n!)^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; 9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^{n-2}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(5^n+1)(n!)^2}$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(2n)!}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{2n}}{n!\cdot 3^n}$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2\cdot 2^n}$;

5. Исследуйте сходимость ряда с помощью радикального признака Коши.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{-n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^4}\frac{1}{2^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^{2n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+5}\right)^{n^3}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin^n\frac{\pi}{2n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n)^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3n})^n$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(3n+1)^n}$;

6. Исследуйте сходимость ряда с помощью интегрального признака Коши.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{4n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2n\cdot\ln(\ln 2n)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2+1}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sin^2\frac{1}{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\cos^2\frac{1}{n^2}}$;

7. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{(5n+2)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{3^n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n-2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n^2+1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{8^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n-1}}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+1}{n^2(n+1)^2}$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n+1}}{n^n}$;

8. Найдите область сходимости степенного ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n-1)^2\cdot 3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{(2n+1)\cdot 4^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2n^2+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n+3}}{n^2+3}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(x-3)^n}{(n+1)^2\cdot 2^{n+3}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+3)^n}{n^3+1}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2x+5)^n}{(n^2+2)\cdot 3^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2^n(n^2-1)}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{(n^2+1)\cdot 2^n}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n\cdot\sqrt{n+4}}$;

9. Запишите три первых ненулевых члена разложения функции f(x) в окрестности указанной точки x_0 в ряд Тейлора.

1) $f(x)=\sin x^2, x_0=\pi/2$; 2) $f(x)=xe^{\sin x}, x_0=\pi$; 3) $f(x)=\ln(2-2x+x^2), x_0=1$;

4) $f(x)=\operatorname{tg}x, x_0=\pi/4$; 5) $f(x)=\cos^2 x, x_0=\pi/2$; 6) $f(x)=(\ln(1-x+x^2), x_0=1$;

7) $f(x)=1/\sin x, x_0=\pi/2$; 8) $f(x)=\ln\frac{1+x}{2-x}, x_0=1$; 9) $f(x)=1/\cos x, x_0=0$;

10) $f(x)=x\ln(2-x^2), x_0=1$; 11) $f(x)=e^{-x^2+x}, x_0=1$; 12) $f(x)=\arcsin x, x_0=1/2$;

10. Разложите функцию f(x) в окрестности указанной точки x_0 в ряд Тейлора, пользуясь разложениями основных элементарных функций.

1) $f(x)=e^{3x}, x_0=0$; 2) $f(x)=\ln(5x), x_0=0$; 3) $f(x)=\sin 5x, x_0=0$;

4) $f(x)=x\ln x, x_0=2$; 5) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}, x_0=0$; 6) $f(x)=\sqrt{9-x}, x_0=0$;

7) $f(x)=\frac{x}{4+x}, x_0=3$; 8) $f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, x_0=0$;

9) $f(x)=\frac{3}{1+x-2x^2}, x_0=0$; 10) $f(x)=\frac{x}{4+8x}, x_0=-1$;

11) $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}-1, x_0=0$; 12) $f(x)=x\ln(10+x), x_0=9$;

13) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x}}, x_0=1$;

11.Используя соответствующие разложения в степенной ряд, вычислите указанные интегралы с точностью до 0,001.

1. $\ln 1.12$; 2. $\sin 6^0$; 3. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$; 4. $\sin 15^0$; 5. $\sqrt[3]{30}$; 6. $\sqrt[3]{1.02}$; 7. $arctg 1,3$;

12.Используя соответствующие разложения в степенной ряд, вычислите указанные интегралы с точностью до 0,001.

1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$; 2) $\int_0^{0,5} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$; 3) $\int_0^{1,5} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx$; 3) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^2}$; 4) $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$;

5) $\int_0^{0,5} e^{x^2}dx$; 6) $\int_0^{0,5} \ln(1+\sqrt{x})dx$; 7) $\int_0^1 \sin x^2 dx$; 8) $\int_0^{0,5} \sqrt[3]{x^2}\cos x dx$; 9) $\int_0^1 \frac{1}{x}(\cos x-1)dx$;

11. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями.

1) $y''-(1+x^2)y=0, y(0)=-2, y'(0)=2$; 2) $y''=xyy', y(0)=1, y'(0)=1$;

3) $xy''+y=0, y(0)=0, y'(0)=1$; 4) $y''=\cos y+2x, y(0)=0, y'(0)=1$;

5) $y''-xy'+y^2=0, y(0)=1, y'(0)=0$; 6) $y''=x^2y'-y, y(0)=0, y'(0)=1$;

7) $y''=xy'+y, y(0)=0, y'(0)=1$; 8) $y''-xy'=+y+e^x, y(0)=1, y'(0)=-1$;

9) $y''+xy=0, y(0)=0, y'(0)=1$; 10) $y''=y\cos y'+x, y(0)=1, y'(0)=1$;