Расчетная работа по производной

Задание 1. *Исходя из определения производной вычислить значение* $y'(x)$, *если* $y(x)=\dfrac{\phi(x)(x+x_0+1)^k(x-k)^m}{(x-x_0+1)^{m+1}}$,

где $k=\left[\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right]+1,\ m=\left[\dfrac{n}{2}\right]+3,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta$ *– номер группы,*

n *– номер студента по списку,* $\phi(x)$, x_0 *находятся в зависимости от номера* n *по таблице:*

n	φ(x)	x_0	n	φ(x)	x_0	n	φ(x)	x_0
1	tg(x+2)	-2	11	sin(x+2)	-2	21	$e^{x+2}-1$	-2
2	ln(x-1)	2	12	tg(3x-6)	2	22	$\sqrt[3]{x-1}-1$	2
3	$e^{x-1}-1$	1	13	$\sqrt{x}-1$	1	23	sin(3-3x)	1
4	$\sqrt[3]{1+x}-1$	0	14	ln(1+4x)	0	24	tg7x	0
5	sin(x+1)	-1	15	$e^{x+1}-1$	-1	25	$\sqrt{2+x}-1$	-1
6	tg(2x+4)	-2	16	$\sqrt{x+3}-1$	-2	26	ln(3+x)	-2
7	$\sqrt{x-1}-1$	2	17	sin(2x-4)	2	27	$e^{x-2}-1$	2
8	Lnx	1	18	tg(4x-4)	1	28	tg(3-3x)	1
9	$e^{3x}-1$	0	19	$\sqrt{1+5x}-1$	0	29	$\sqrt{1+3x}-1$	0
10	$\sqrt{x+2}-1$	-1	20	ln(2+x)	-1	30	ln(3+2x)	-1

$$\left.\begin{array}{l} n=30; \\ 718141.1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=1; \beta=4; \gamma=1; \delta=1; x_0=-1;$$

$$k=\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right]+1=\left[\frac{1+4+1+1}{2}\right]+1=4;$$

$$m=\left[\frac{n}{2}\right]+3=\left[\frac{30}{2}\right]+3=18;$$

$$y(x)=\frac{\phi(x)(x+x_0+1)^k(x-k)^m}{\left(x-x_0+1\right)^{m+1}} \Rightarrow y(x)=\frac{\ln\left(3+2x\right)(x-1+1)^4(x-4)^{18}}{\left(x+1+1\right)^{19}}$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{\ln\left(3+2x\right)x^4(x-4)^{18}}{\left(x+2\right)^{19}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$x_0=-1;$$

$$f(x)=\frac{\ln(3+2x)\,x^4(x-4)^{18}}{(x+2)^{19}}\Rightarrow$$

$$f(x_0+\Delta x)= f(-1+\Delta x)=$$

$$=\frac{\ln\left(3+2(-1+\Delta x)\right)(-1+\Delta x)^4((-1+\Delta x)-4)^{18}}{\left((-1+\Delta x)+2\right)^{19}}=$$

$$=\frac{\ln\left(1+2\Delta x\right)(-1+\Delta x)^4(\Delta x-5)^{18}}{\left(1+\Delta x\right)^{19}};$$

$$f\left(x_0\right)= f\left(-1\right)=\frac{\ln\left(3+2\left(-1\right)\right)\left(-1\right)^4((-1)-4)^{18}}{\left(\left(-1\right)+2\right)^{19}}=$$

$$=\ln\left(1\right)\left(-5\right)^{18}=0;$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\Rightarrow$$

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+2\Delta x)(-1+\Delta x)^4(\Delta x-5)^{18}}{(1+\Delta x)^{19}\,\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+2\Delta x)}{\Delta x}\bullet\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-1+\Delta x)^4(\Delta x-5)^{18}}{(1+\Delta x)^{19}}\rangle$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+2\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+2\Delta x\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+2\Delta x\right)^{\frac{2}{2\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\left(1+2\Delta x\right)^{\frac{1}{2\Delta x}}\right)^{2}=$$

$$=\ln e^{2}=2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-1+\Delta x)^4(\Delta x-5)^{18}}{\left(1+\Delta x\right)^{19}}=5^{18}$$

$$\langle \quad =2\cdot 5^{18};$$

Задание 2. Вычислить производную функции

$$y=\frac{\phi\left[\psi(x)\right]}{\left(\sqrt[m]{x^{k}}+1\right)^{(-1)^{n}}}+\phi(x)^{\psi(x)},\ n=30,\ k=4,\ m=18.$$

n	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	n	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
1	$\ln(x^2-1)$	arccosx	16	e^{x^3}	$\sqrt[3]{\sin x}$
2	ctg3x	e^{tgx}	17	$1+x^2+x^4$	$\sqrt{e^x}$
3	arctg(x+1)	$\sin\sqrt{x}$	18	$\arcsin\sqrt{x}$	$\ln^2 x$
4	$\cos\sqrt{x}$	$\frac{x-1}{x+1}$	19	$\ln\sqrt{x}$	$\arcsin^2 x$
5	arcsinx	$\ln\sqrt{x^2+1}$	20	3x+cosx	$\sqrt{x^2-3}$
6	$\sqrt{x^2+2}$	sinx	21	$\mathrm{arctg}\sqrt{x}$	$\sin\sqrt{x}$
7	$\sin x^2$	$\sqrt{1-x^2}$	22	$1+x^2$	$\sqrt{\ln x}$
8	tgx	$\cos^2 x$	23	lnx	$x+\sqrt{1+x^2}$
9	arcctg(1-x)	$\sqrt{x+x^2}$	24	sinx+cosx	e^{x^2}
10	x^3+3x	e^x	25	x^2	lnx+1
11	sin2x	$\sqrt{x(2-x)}$	26	$\sqrt{tgx}$	$\sqrt{x}$
12	$\sqrt[3]{8-x^2}$	$2\sqrt{2}\sin x$	27	ctg2x	e^x
13	arcsinx	$\ln\sqrt{x}$	28	arcctgx	$\mathrm{Sin}x^2$
14	a^{4x^2}	$\sqrt{x^2-1}$	29	$e^{\arccos x}$	$\sqrt{x^2-1}$
15	$\lg\sqrt[3]{x}$	os2x	30	$\cos\sqrt{1+x^2}$	tgx

$$\left.\begin{aligned}
&y = \frac{\phi\left[\psi(x)\right]}{\left(\sqrt[m]{x^{k}}+1\right)^{(-1)^{n}}} + \phi(x)^{\psi(x)};\\
&n = 30;\\
&k = 4;\\
&m = 18;\\
&\phi(x) = \cos\sqrt{1+x^{2}};\\
&\psi(x) = tgx;
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\cos\sqrt{1+tg^2 x}}{\left(\sqrt[9]{x}+1\right)} + (\cos\sqrt{1+x^2})^{tgx};$$

$$y'=\left(\frac{\cos\sqrt{1+tg^2x}}{\left(\sqrt[9]{x}+1\right)}+(\cos\sqrt{1+x^2})^{tgx}\right)'=$$

$$\left(\frac{\cos\sqrt{1+tg^2x}}{\left(\sqrt[9]{x}+1\right)}\right)'+\left((\cos\sqrt{1+x^2})^{tgx}\right)';$$

$$\left((\cos\sqrt{1+x^2})^{tgx}\right)' = (\cos\sqrt{1+x^2})^{tgx}\cdot\left(tgx\cdot\ln\left(\cos\sqrt{1+x^2}\right)\right)'$$

$$= (\cos\sqrt{1+x^2})^{tgx}(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{1+x^2}\right)+$$

$$+tgx\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{1+x^2}}\left(-\sin\sqrt{1+x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}});$$

$$\left(\frac{\cos\sqrt{1+tg^2x}}{\left(\sqrt[9]{x}+1\right)}\right)' =$$

$$= \frac{\left(\cos\sqrt{1+tg^2x}\right)' \cdot \left(\sqrt[9]{x}+1\right) - \left(\sqrt[9]{x}+1\right)' \cdot \cos\sqrt{1+tg^2x}}{\left(\sqrt[9]{x}+1\right)^2} =$$

$$= \frac{-\sin\sqrt{1+tg^2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+tg^2x}} 2tgx \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{9} x^{-\frac{8}{9}} \cdot \cos\sqrt{1+tg^2x}}{\left(\sqrt[9]{x}+1\right)^2};$$

3 и 5.Записать уравнение

касательной и нормали

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 - 7t \\ y = 18t^3 \\ t_0 = 1 \end{array}\right\}$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) -$$

$-$*касательная*

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) -$$

$-$*нормаль*

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 - 7t \\ y &= 18t^3 \\ t_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) = -6 \\ y_0 &= y(t_0) = 18 \\ y'_x(t_0) &= \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} = \frac{y'_t(1)}{x'_t(1)} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 - 7t \\ y &= 18t^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} =$$

$$= \frac{54t^2}{2t-7} \Rightarrow y'_x(t_0) = y'_x(1) = -\frac{54}{5};$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) -$$

$$-\text{касательная}$$

$$\Rightarrow y - 18 = -\frac{54}{5}(x + 6)$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) -$$

$$-\textit{нормаль} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 18 = \frac{5}{54}(x + 6)$$

4.Приближенные вычисления

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$Ln(1.3) \approx ?$$

$$Ln(1.3) \approx ? \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \ln(x); \\ x_0 + \Delta x = 1.3; \\ x_0 = 1; \\ \Delta x = 0.3; \end{cases}$$

$$f\left(x\right)=\ln(x);\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{x};\Rightarrow$$

$$f\left(x_0\right)=\ln(x_0)=\ln 1=0;$$

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=\ln(x_0+\Delta x)=\ln(1+0.3);$$

$$f'\left(x_0\right)=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{1}=1;$$

$$1 \approx \frac{\ln(1+0.3)-0}{0.3} \Rightarrow$$

$$\ln(1+0.3) \approx 0.3;$$

7. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}$$

8.Схема исследования функций

1. Область существования функции (Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции).
2. Точки пересечения с осями координат.
3. Асимптоты. (Если они имеются).
4. Точки разрыва. (Если они имеются).

3. Интервалы возрастания и убывания.

4. Точки максимума и минимума.

5. Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.

6. Области выпуклости и вогнутости.

7. Точки перегиба. (Если они имеются).

9. Построение графика.

Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$$

$$D(y) = (-\infty; 0), (0; +\infty),$$

$E(y)$ – не на поверхности

Пересечение с осями координат

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$

$$Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$A\left(-1 - \sqrt{2}; 0\right), B\left(-1 + \sqrt{2}; 0\right)$$

$x \neq 0 \Rightarrow$ нет точек пересечения с Oy

$x = a$ – вертикальная асимптота

к $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$$ или

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$$ или $$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \infty \Rightarrow$$

$x = 0$ – вертикальная асимптота

$y = kx + b$ – наклонная (горизонтальная) асиптота к $y = f(x)$.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx \big) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \Rightarrow$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2\Rightarrow y=x+2;$$

Возрастание и убывание функции

1) *Если функция* $f(x)$ *имеет производную на отрезке* $[a,b]$ *и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е.* $f'(x) \geq 0$.

2) *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема на промежутке* (a,b), *причем* $f'(x) > 0$ *для* $a < x < b$, *то эта функция возрастает на отрезке* $[a,b]$.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если

$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Определение. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) Если функция $\boldsymbol{f(x)}$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x = x_1}$ и точка $\boldsymbol{x_1}$ является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция $\boldsymbol{f(x)}$ непрерывна в интервале $\boldsymbol{(a,b)}$, который содержит критическую точку $\boldsymbol{x_1}$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки $\boldsymbol{x_1}$).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке

$x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{\left(x^2+2x-1\right)'x-\left(x^2+2x-1\right)x'}{x^2}=$$

$$=\frac{\left(2x+2\right)x-\left(x^2+2x-1\right)}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}\Rightarrow$$

$$y' > 0, \forall x \in D(y);$$

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла). Аналогично доказывается, что если $f''(x)>0$ на интервале (a,b), то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале (a,b).

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $\boldsymbol{y = f(x)}$. Если вторая производная $\boldsymbol{f''(a) = 0}$ или $\boldsymbol{f''(a)}$ не существует и при переходе через точку $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{f''(x)}$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

$$y' = \frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow$$

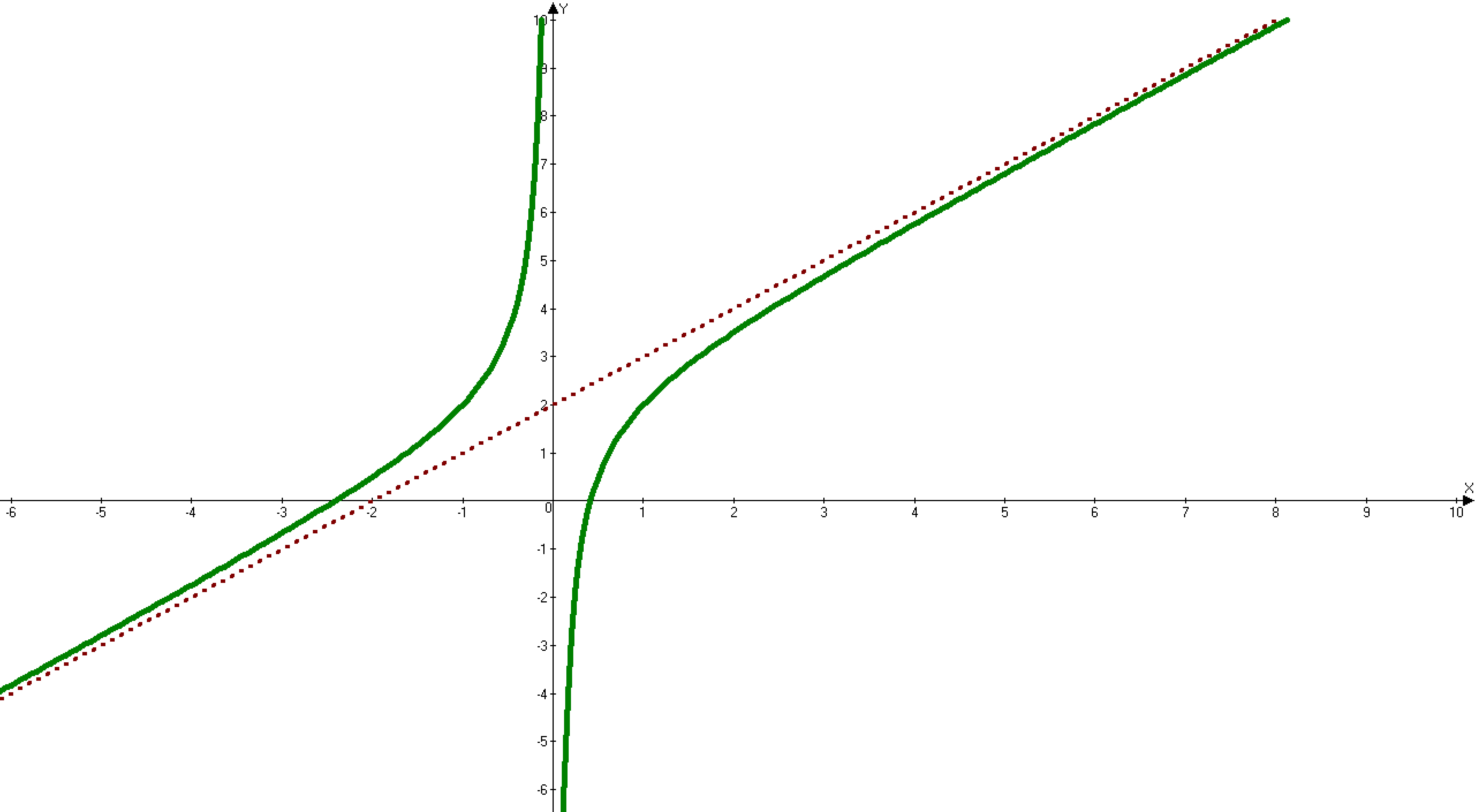
$$y'' = \frac{\left(x^2+1\right)' x^2 - \left(x^2+1\right)\left(x^2\right)'}{x^4} =$$

$$= \frac{2x \cdot x^2 - \left(x^2+1\right) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow$$

$x = 0$ – точка перегиба

$(-\infty; 0)$ – интервал вогнутости

$(0; +\infty)$ – интервал выпуклости


Y
X
0
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6

9. Сахарный завод производит x ед. продукции в месяц, суммарные издержки производства $к=x/50 + 15x + 800$. Зависимость между удельной ценой p и количеством x ед. продукции, которое можно продать по этой цене: $p=50 – x/10$. При каких условиях прибыль будет наибольшей (выручка $a=xp$).

$$\left.\begin{aligned} a &= xp = 50x - \frac{x^2}{10} - \textit{выручка} \\ k &= \frac{x}{50} + 15x + 800 - \textit{затраты} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$f(x) = 50x - \frac{x^2}{10} - \left(\frac{x}{50} + 15x + 800\right) - \textit{прибыль}$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{10} + 34{,}98x - 800$$

$$f\left(x\right)=-\frac{x^2}{10}+34,98x-800\Rightarrow$$

$$f'\left(x\right)=-\frac{x}{5}+34,98\Rightarrow$$

$$-\frac{x}{5}+34,98=0\Rightarrow x=174.9$$

$$f''(x) = -\frac{1}{5} \Rightarrow f''(174.9) = -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow$$

$$x = 174.9 - \textit{точка} \ \max \Rightarrow f_{\textit{наиб}} = f(174.9) \Rightarrow$$

$$f(174) \ \textit{или} \ f(175)$$