Рациональные вычисления

1. Сократите дробь $a)\ \dfrac{373737373737}{818181818181}$, $б)\ \dfrac{254*399-145}{254+399*253}$.

2. Вычислите

$a)\ 2379*23782378-2378*23792379,$

$b)\ \underbrace{88...88}_{100\ \text{цифр}}*\underbrace{33...33}_{100\ \text{цифр}}-\underbrace{66...66}_{100\ \text{цифр}}*\underbrace{44...44}_{100\ \text{цифр}},$

$c)\ \underbrace{11...11}_{999\ \text{цифр}}+\left(\underbrace{33...33}_{999\ \text{цифр}}\right)^2,\ d)\ \sqrt{\underbrace{11...11}_{100\ \text{цифр}}-\underbrace{22...22}_{50\ \text{цифр}}},$

$e)\ \sqrt{\underbrace{44...44}_{100\ \text{цифр}}+\underbrace{11...11}_{51\ \text{цифр}}-\underbrace{66...66}_{50\ \text{цифр}}},\ f)\ 1+11+111+...+\underbrace{11...11}_{100\ \text{цифр}}.$

3. Упростите

$a)\ \dfrac{1}{1*2}+\dfrac{1}{2*3}+...+\dfrac{1}{99*100},$

$b)\ \dfrac{4}{5*7}+\dfrac{4}{7*9}+...+\dfrac{4}{99*101},$

$c)\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}.$

4. Докажите, что если между каждыми соседними цифрами числа 1331 поставить одинаковое количество нулей, то полученное число будет полным кубом.

5. Представьте в виде произведения двух последовательных чисел $\underbrace{11...11}_{100\ \text{цифр}}\underbrace{22...22}_{100\ \text{цифр}}$

Основные задачи

1. Разложите на множители $9\left(a^2+b^2-1\right)-42ab+40b^2-40$.

2. Свежие грибы содержат 90% влаги, сушеные 12% влаги. Сколько сушеных грибов получиться из 10 кг свежих грибов.

3. Три мальчика – Игорь, Дима и Юра купили вместе один мяч. Каждый заплатил не более половины той суммы, которую дали два других вместе. Мяч стоил 18 рублей. Сколько денег заплатил Дима?

4. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20 – го числа этого месяца?

5. Дан угол и точка M внутри него. Проведите прямую через эту точку так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился данной точкой пополам.

6. Высоты BB_1 и AA_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle BAC=55^0, \angle ABC=67^0$.

7. Докажите, что если в треугольнике ABC: $AB=2AC$, то медиана, выходящая из вершины C, перпендикулярна биссектрисе угла A.

8. $AB=BC=2024$, $\angle ABC=36^0$. Биссектрисы AK и CM пересекаются в точке O. Найдите периметр AMO.

9. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

10. Отцу сейчас в три раза больше лет, чем сыну было 10 лет назад, а когда сыну будет столько лет, сколько отцу сейчас, то отцу будет в 2 раза больше лет, чем сыну через 9 лет после настоящего момента. Сколько лет сейчас отцу и сколько лет сыну?

11. Известно, что $a+b+c=7, \dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{7}{10}$. Вычислите $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}$.

12. Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей ровна 2 и делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырехугольника.

13. Подряд выписали все целые числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречаются цифры: а) 0; б) 1; в) 3?

14. укажите все четырехзначные числа, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

Остатки геометрии (от 6 и 13 апреля 2024)

1. Доказать, что для трапеции следующие четыре точки: середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон – лежат на одной прямой.
2. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники, и их вершины последовательно соединены. Найти отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.
3. Основания двух правильных треугольников со сторонами a и $3a$ лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно $2a$. Найти расстояние между вершинами треугольников, не принадлежащими данной прямой.
4. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 и 2 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Каковы длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами?

Геометрия (дополнительные построения)

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, K и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки В на прямые AA_1 и CC_1.

а) Докажите, что $MK \parallel AC$.

б) Найдите площадь KBM, если AC=10, BC=6, AB=8.

2. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M равноудаленную от точек C и D. K – середина AB. Докажите, что MKD – прямой.

Квадратный трехчлен

1. У квадратного уравнения $x^2+ax+b=0$, коэффициенты a и b увеличили на 1, эту операцию повторили 4 раза. Могло ли оказаться, что все пять уравнений имели целые корни?

2. Коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0$, связаны соотношением $2b^2-9ac=0$. Докажите, что один из корней в два раза больше другого.

Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $S_k=x_1^k+x_2^k\left(k\geq 2\right)$. Докажите, что при $n\geq 2$, справедлива формула $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$.

3. Уравнение $x^2-6px+q=0$ имеет два различных корня, при этом p, x_1, x_2, q - образуют геометрическую прогрессию. Найдите корни уравнения.

4. Дискриминанты трех приведенных квадратных уравнений равны 1,4,9. Докажите, что можно выбрать по одному корню из каждого уравнения, чтобы их сумма была равна сумме оставшихся.

5. На доске были написаны 5 целых чисел – коэффициенты и корни квадратного уравнения. Одно из чисел стёрли, остались 2, 3, 4 и -5 в

каком-то порядке. Восстановите пятое число (докажите, что именно оно).

6. Найдите решение уравнения $x+y=x^2-xy+y^2$ в целых числах.

7. Найдите решение уравнения $2x+3y+5z=11$ в целых числах.

8. Корни x_1, x_2 многочлена $f(x)=x^2+(3a+10)x+5b-14$ и его значение при x=1 являются простыми числами. Чему равны a и b?

9. Корень x_1 многочлена $f(x)=x^2+px+q$ и его значение при x=11 являются простыми числами. Чему равны x_1,x_2,p,q?

10. Корни x_1, x_2 многочлена $f(x)=x^2+(2a+9)x+3b+5$ различные целые числа, коэффициенты $(2a+9)$ и $(3a+5)$ простые числа. Чему равны a и b?

11. Корни x_1, x_2 многочлена $f(x)=x^2+px+q$ различные целые числа, а p и q различные простые числа. Чему равны x_1,x_2,p,q?

12. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(a;b)$ таких, что уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а второй меньше 0.

13. Найдите все пары многочленов x^2+ax+b и x^2+cx+d, таких что a и b - корни второго многочлена - c, d - первого.

14. Даны квадратные трехчлены (100 штук- $f_1(x), f_2(x),\dots f_{100}(x)$) с одинаковыми коэффициентами при x^2 и x, но различными свободными членами, при этом все сто дискриминантов положительные. У каждого из квадратных трехчленов $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили x_i. Какие значение может принимать сумма $f_2(x_1)+f_3(x_2)+f_4(x_3)+\dots+f_{100}(x_{99})+f_1(x_{100})$?

15. Два приведенных квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый имеет по два корня и выполняются равенства $f(1)=g(2)$ и $f(2)=g(1)$. Найдите сумму всех четырех корней этих трехчленов.

16. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, ..., a_n$, что квадратный трехчлен $x^2 - 2\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4 + 1\right)$ имеет по крайней мере один целый корень?

17. График квадратичной функции $y=ax^2+c$ пересекает оси координат в вершинах правильного треугольника. Чему равно ac?

Принцип четности

1. Можно ли конем из одного угла шахматной доски попасть в противоположный угол, пройдя все клетки доски ровно по одному разу

2. Из шахматной доски вырезали две угловые клетки. Можно ли такую доску целиком покрыть доминошками? А если вырезаны клетки b3 и e7?

3. По кругу зацеплены 9 шестеренок: первая со второй, вторая с третьей, ..., девятая с первой. Могут ли они вращаться?

4. Существует ли такое простое число p, что $p^2 = 2^p$?

5. По кругу стоят 99 корзин. Можно ли разложить в них несколько арбузов так, чтобы в любых двух соседних корзинах число арбузов отличалось на единицу?

6. В стаде 2023 коровы. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на две части (по 1011 коров в каждой) так, что суммарный вес коров первой части равен суммарному весу коров другой части. Известно, что каждая корова весит целое число килограмм. Докажите, что все коровы весят одинаково.

7. Существует ли такое простое число p, что число $p^3 + 3^p$ - тоже простое?

8. У нас есть 101 монетка. Известно, что среди них 51 фальшивых и 50 настоящих. Также известно, что вес фальшивой монетки отличается на 1 грамм от веса настоящей. Мы взяли из кучи одну, произвольно выбранную монету. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах, которые показывают разницу в весе на чашках, определить какую монету мы взяли - настоящую или фальшивую?

9. Записали несколько последовательных натуральных чисел. Каждое закрасили в красный или синий цвет (оба цвета присутствуют). Может сумма НОК чисел, закрашенных красных и НОК закрашенных синим, быть степенью двойки?

10. Записали 10 последовательных натуральных чисел. Каждое закрасили в красный или синий цвет (оба цвета присутствуют). Может сумма НОК чисел, закрашенных красных и НОК закрашенных синим, оканчиваться на 2016?

11. Докажите, что сумма двух чисел, умноженная на их произведение, делится на 2.

12. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

13. Как погрузить 21 бочку, из которых 7 полны кваса, 7 пусты, а 7 наполнены наполовину, на 3 машины так, чтобы на всех машинах было поровну бочек и кваса?

14. На листе бумаги написано несколько натуральных чисел (например, так: 1 2 5 6 1 4). Лена и Максим по очереди ставят перед каким-нибудь из этих чисел знак: "+" или "-" (если перед этим числом ещё нет знака). Когда перед каждым числом будет поставлен какой-нибудь знак, вычисляется значение полученного выражения (например, +1+2-5+6+1-4=1). Если полученное число чётное, то выигрывает Максим, а если нечётное, то Лена. Кто, когда выигрывает?

15. Будем называть числами Фибоначчи те числа, что получаются таким образом: каждое из них является суммой двух предыдущих, а

первые два - единицами. Тогда возникает такая интересная задача: представим себе, что в ряд выписаны 100 чисел Фибоначчи. Между ними мы вправе расставить любым образом знаки "+" и "-". Можно ли таким образом получить в сумме ноль? Если 102 числа Фибоначчи выписаны в ряд?

Основные задачи

1. Сколько существует делящихся на 9 десятизначных натуральных чисел, в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 5?
2. На математическом конкурсе было предложено несколько простых и несколько сложных задач. Участнику давали 3 очка за решение сложной и 2 очка за решение простой задачи. Кроме того, за каждую нерешенную простую задачу списывалось одно очко. Рома решит 10 задач и набрал 14 очков. Сколько было простых задач?
3. Баба-Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги в 13 раз больше, чем на мухоморах Кощея, но после того, как Баба-Яга отдала Кощею свой мухомор с наименьшим числом крапинок, на ее мухоморах стало крапинок только в 8 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что вначале у Бабы-Яги было не более 23 мухоморов.
4. На доске выписали в порядке возрастания все числа от 1 до 10000, а потом стерли те, которые не делятся ни на 4, ни на 11. Какое число окажется 1994-м?
5. В турнире по олимпийской системе (то есть в каждом туре оставшиеся игроки разбиваются на пары, и проигравшие выбывают) играли 512 человек. Каждому присвоили квалификационный номер- от 1 до 512. Партия называется неинтересной, если разность номеров участников больше 30. Может ли в турнире не быть неинтересных партий?
6. Есть пять монет достоинством 1, 2. 3, 5 и 10 пиастров. Одна из них фальшивая, то есть ее вес в граммах не равен ее достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?
7. При дворе принца Лимона служили герцоги, графы и бароны. В начале правления принца придворных было 2009. но каждый день один из них убивал другого на дуэли, причем герцоги убивали только

графов, графы - только баронов, а бароны - только герцогов. При этом никто не выиграл дуэль дважды. В конце концов, остался в живых лишь барон Апельсин. Какой титул был у первого погибшего придворного?

8. Три двузначных числа таковы, что сумма любых двух из них равна числу, отличающемуся от третьего лишь порядком цифр. Какой может быть сумма этих трех чисел?

9. В марсианском алфавите k букв, и два слова называются похожими. если в них одинаковое количество букв, и они отличаются лишь в одном месте (например. ТРИКС и ТРУКС). Докажите, что все слова в языке можно разбить на k групп, в каждой из которых все слова не похожи друг на друга.

10. Представим, что 25 школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдется школьник, у которого левый сосед выше правого.

11. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят, либо на 2, либо на 3. и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час. не будет равно 54.

12. Утром в луже плавало 19 синих и 95 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба, если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится, и в итоге образуются четыре красные амебы, наконец, если сливаются красная и синяя амёбы. то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 100 амеб. Сколько среди них синих?

13. В таблице 2х2 стоят четыре натуральных числа. При этом соседние по вертикали числа отличаются на 6. а соседние по горизонтали - в два раза. Что за числа стоят в таблице?

14. Пятизначное число, в записи которого нет нулей, делится на 54. Из него вычеркнули одну цифру, и получилось четырехзначное число, делящееся на 54. Из этого четырехзначного числа тоже вычеркнули одну цифру - получилось трехзначное число, делящееся на 54. Наконец, после вычеркивания еще одной цифры, получилось число 54. Найдите исходное число.

15. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде частного от деления квадрата некоторого натурального числа на куб некоторого натурального числа.
16. Сумма трех натуральных чисел (не обязательно различных) равна 100. Из этих чисел можно составить три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?
17. Тома задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3.6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.
18. В 2009 году каждый из президентов пятнадцати «Обществ защиты чего-то особенного» послал в подарок на день рождения каждому из остальных президентов торт с таким числом свечек, сколько лет исполнилось юбиляру. Могло ли так случиться, что всего было послано 2009 свечек?
19. Можно ли так расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делилась на три?
20. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрел ил в одного из тонких, затем каждый уцелевший тонкий солдат выстрелил в одного из толстых. Докажите, что в живых осталось не менее 1000 солдат.
21. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких, затем каждый уцелевший тонкий солдат выстрелил в одного из толстых. После этого каждый уцелевший толстый еще раз выстрелил в одного из тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.
22. В Море Дождей живут осьминожки, у каждого один или два друга. Когда взошло солнце, те. у кого двое друзей, посинели, а те. у кого один друг - покраснели. Оказалось, что любые два друга - разноцветные. Тогда 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, а 12 красных - в синий; теперь любые два друга одного цвета. Сколько осьминожек в Море Дождей?

23. На доске написано число 23. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 12. Что окажется на доске через час?
24. Можно ли так расставить по кругу все целые числа от -7 до 7 (включая 0). чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным? Если да - приведите пример, если нет - объясните, почему.
25. Докажите, что в любом шести десятизначном числе, десятичная запись которого не содержит нулей, можно зачеркнуть несколько цифр так. что получившееся в результате число будет делиться на 1001.
26. Можно ли подобрать такие четыре различных натуральных числа, чтобы сумма любых двух из них была степенью числа 5?
27. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали орехи. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика орехов либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Могло ли так случиться, что у всех 1 000 орехов?
28. На пальме сидело много мартышек. Двадцать из них получили по пинку. Пнутая мартышка срывает с пальмы три финика и раздает подружкам. Мартышка, получившая два финика, съедает их и пинает другую мартышку. После того, как произошло 30 новых пинков, мартышки упокоились. Сколько фиников осталось у мартышек?
29. Несколько государственных служащих получили одинаковую зарплату. После этого время от времени кто-нибудь из них брал часть своих денег и раздавал их поровну остальным. Через несколько таких операций у одного из служащих оказалось 24 копейки, а еще у одного - 17 копеек. Сколько было служащих?
30. По окружности расставлены 20 единиц и 30 двоек так. что никакие три одинаковые цифры не стоят подряд. Найдите сумму произведений всех троек подряд идущих цифр.
31. Можно ли расставить в клетках квадрата 4x4 числа от 1 до 16 так. чтобы в каждой клетке было пли меньше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или больше всех этих чисел?
32. Аня. Ваня и Саня рисовали чертиков на чистых тетрадных листочках. Экономная Аня нарисовала больше чертиков, чем Ваня и Саня вместе, и израсходовала на это меньше всего листочков, а

расточительный Ваня нарисовал меньше всего чертиков, но извел больше листочков, чем Аня вместе с Саней. Больше пяти чертиков на листочек не влезает. Докажите, что Аня изрисовала не меньше шести листочков.

33. Под куполом цирка летают красные, синие и зеленые воздушные шары - по 150 каждого цвета. Внутри каждого синего шара находится ровно 13 зеленых, внутри каждого красного - ровно 5 синих и ровно 19 зеленых. Докажите, что какой-то зеленый шарик не содержится ни в одном из 449 остальных шаров.