

Теория чисел

\mathbb{N} – множество натуральных чисел;

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

\mathbb{Z} – множество целых чисел;

\mathbb{Q} – множество рациональных чисел;

\mathbb{R} – множество действительных чисел;

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ – множество иррациональных чисел;

\mathbb{C} – множество комплексных чисел;

Последовательности.

Арифметическая прогрессия.

a_1 – первый член прогрессии, d – разность прогрессии, S_n – сумма первых n членов прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Геометрическая прогрессия. Бесконечные последовательности.

b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии, S_n – сумма первых n членов прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$0 < q < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1 - q}$, (*) $|q| < 1 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Разложение на простые множители.

Разложение натурального числа на простые множители: $x = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$.

Количество натуральных делителей натурального числа:
 $Q = (1 + n_1)(1 + n_2) \dots (1 + n_k)$.

Сумма всех натуральных делителей натурального числа:
 $S = (1 + p_1^1 + p_1^2 + \dots + p_1^{n_1}) \cdot (1 + p_2^1 + p_2^2 + \dots + p_2^{n_2}) \cdot \dots \cdot (1 + p_k^1 + p_k^2 + \dots + p_k^{n_k})$.

Критерии проверки задачи 19

Содержание критерия	Баллы
Верно, получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно, получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно, получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно, получен один из следующих результатов: - обоснованное решение пункта <i>a</i> ; - обоснованное решение пункта <i>б</i> ; - искомая оценка в пункте <i>в</i> ; - пример в пункте <i>в</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	
<i>Максимальный балл</i>	

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены ответы в пунктах <i>a</i> , <i>б</i> и <i>в</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>б</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>б</i> или обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	
<i>Максимальный балл</i>	

Основные задачи

1. Решите уравнение в натуральных числах $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$.

2. Ваня задумал простое трехзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может заканчиваться, если последняя цифра (разряд единиц) равна сумме первых двух?

3. Укажите все натуральные числа, у которых 6 натуральных делителей, сумма которых 504.

4. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке не убывания. Если какое-то число, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске остается одно такое число, а остальные, равные ему стираются. Например, если задуманы «1,3,3,4», то на доске будет набор «1,3,4,5,6,7,8,10,11»

а) Приведите пример, задуманных чисел, для которых будет записан набор «1,2,3,4,5,6,7,8»

б) Существует ли пример задуманных чисел, для которых на доске будет набор «1,3,4,5,7,9,10,11,12,13,14,16,18,19,20,22»?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых выписан набор «5,6,8,10,11,13,14,15,16,18,19,21,23,24,29»

5. В живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного) кроликов, но не всех. Первый ученик дает порцию по 100 гр, второй – по 200 гр, третий – по 300 гр., а четвертый – по 400 гр.

а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?

б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили различное количество корма?

в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик насыпал корм ровно четырем кроликам и все кролики получили разное количество корма?

6. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел «-3», среднее арифметическое положительных «4», а отрицательных «-8».

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

7. В течении четверти учитель ставил детям оценки «1,2,3,4,5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять 4-ки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

8. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40, но меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

9. Бесконечная арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots состоит из натуральных чисел. Пусть $S_1=a_1; S_2=a_1+a_2; \dots S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$; натуральное $n, n>1$;

а) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10}=100S_1$;

б) Существует ли прогрессия, для которой $S_{10}=50S_2$;

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 \cdot S_{10}}$?

10. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел

«-11,12,13,-14,-15,17, -18,19». Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному из чисел «-11,12,13,-14,-15,17, -

18,19». После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое не отрицательное число может в результате получиться?

12. У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых возможно и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа детей, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли в классе быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительных условий пунктов а) и б)?

13. В некотором царстве было несколько (более 2) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было изначально. Затем все новые и новые княжества из числа прежних и вновь образованных объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после какого-то деления общее число княжеств было 162?

в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

14. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3. а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни. быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

15. В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.

а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?

б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?

в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

16. На доске написаны числа, каждое из которых не меньше 50, но не более 150. Каждое из чисел a_i уменьшили на $r_i\%$. При этом для каждого i ($1 \leq i \leq n$), либо $r_i=2$, либо a_i уменьшилось на 2.

а) Может ли среднее арифметическое чисел r_1, r_2, \dots, r_n быть равным 5?

б) Может ли оказаться среднее арифметическое чисел r_1, r_2, \dots, r_n больше 2?

в) Пусть на доске написано 30 чисел, сумма которых уменьшилась на 40. Найдите наибольшее значение среднего арифметического r_1, r_2, \dots, r_n .

17. Каждое из четырех последовательных натуральных чисел поделили на его первую цифру. Сумма получившихся чисел равна S .

а) Может ли S быть равной $41\frac{11}{24}$? б) Может ли S быть равной $569\frac{29}{72}$?

в) Найдите наибольшее целое S , если каждое из исходных чисел было от 400 до 999 включительно.

Дополнительные задачи

1. Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Верно ли, что $b_{99} \in \mathbb{N}$? [нет]
2. Решите уравнение $3^x + 4^y = 5^z$, $x, y, z \in \mathbb{N}$. [$x=y=z=2$]
3. Числа от 1 до 37 записаны в строку, так, что сумма всех предшествующих чисел делится на следующее за ними число. Какое число может стоять на третьем месте, если на первом месте 37, а на втором -1? [2]
4. Корни x_1, x_2 многочлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x=1$ являются простыми числами. Чему равны a и b ?
5. Корень x_1 многочлена $f(x) = x^2 + px + q$ и его значение при $x=11$ являются простыми числами. Чему равны x_1, x_2, p, q ?
6. Найдите все такие натуральные n , что при вычепкивании первой цифры числа 4^n снова получается число, являющееся натуральной степенью числа 4. [3]
7. Из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 составлены 9 (необязательно различных) девятизначных натуральных чисел (каждая цифра использована ровно по 1 разу в каждом числе). На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться их сумма? [8]
8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из отрезка натурального ряда от 1 до 2024, так чтобы разность любых двух из них не была простым числом? [405]
9. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.
 - а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18, 19 и 20?
 - б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равным 25?
 - в) Найдите наибольшее значение N .
10. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 159. Для любых двух написанных на доске чисел a и b таких, что

$a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $(b-a)$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $(b-a)$.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 28, 29 и 30?

б) Среди написанных на доске чисел есть 13. Может ли N быть равным 20?

в) Найдите наибольшее значение N .

11. Есть четыре коробки: в первой коробке 81 камень, во второй — 82, в третьей — 83, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Мог ли в первой коробке оказаться 81 камень, во второй — 78, в третьей — 83, а в четвёртой — 4?

б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 246 камней?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

12. Дано натуральное число. За один ход можно прибавить к этому числу утроенную сумму его цифр или вычесть из этого числа утроенную сумму его цифр так, чтобы в результате получилось натуральное число.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 29?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из числа 128 число 31?

в) Какое наименьшее число можно получить из числа 128 за несколько таких ходов?