Задание 17. Прикладные задачи на наибольшее и наименьшее значение функции

Формулировки задач к презентации · ЕГЭ 2027, математика, профильный уровень

Задание с развёрнутым ответом, максимальный балл — 2. Обоснованно получен верный ответ — 2 балла; неверный ответ из-за вычислительной ошибки при верной последовательности всех шагов решения — 1 балл; решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев — 0 баллов.

I. Опорные задачи (с решениями в презентации)

Блок 1. Модель задана формулой: электричество и колебания

1. Мощность, выделяемая в нагрузке. На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P, которая может быть выделена нагрузкой?

2. Качка корабля на волнении. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой

$$A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}},$$

где $k = 0{,}91$ — коэффициент, зависящий от отношения ширины корабля к длине волны, $\theta_0 = 9°$ — угол наибольшего волнового склона, τ — период волны (в секундах), $T = 14{,}7$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0{,}0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

3. Резонанс в цепи переменного тока. К источнику переменного напряжения с амплитудой $U = 220$ В и круговой частотой ω (в радианах в секунду) последовательно подключены резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и конденсатор ёмкостью $C = 0{,}05$ Ф. Амплитуда силы тока в цепи (в амперах) выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

Блок 2. Физика и техника

4. Мощность водяной турбины. Струя воды, вытекающая из сопла со скоростью $v = 12$ метров в секунду, падает на лопасти турбины, которые движутся в том же направлении со скоростью u (в метрах в секунду), причём $0 \le u \le v$. Мощность, передаваемая струёй лопастям, выражается формулой

$$N(u) = 2\rho S u(v-u)^2,$$

где ρ — плотность воды, S — площадь поперечного сечения струи. При какой скорости u (в метрах в секунду) передаваемая мощность будет наибольшей?

5. Полезная мощность двигателя. Сила тяги двигателя транспортного средства убывает с ростом скорости v (в метрах в секунду) по закону $F(v) = 180 - 0{,}15v^2$ (в ньютонах), а полезная мощность равна $N(v) = F(v) \cdot v$. При какой скорости v (в метрах в секунду) полезная мощность будет наибольшей?

6. Освещённость края стола. Лампа висит над центром круглого стола на высоте h (в метрах) от его поверхности. Освещённость точки края стола, удалённой от центра на $a = 3\sqrt{2}$ м, выражается формулой

$$E(h) = \frac{Jh}{(h^2 + a^2)\sqrt{h^2 + a^2}},$$

где J — сила света лампы. На какой высоте h (в метрах) надо повесить лампу, чтобы освещённость края стола была наибольшей?

7. Дальность полёта струи. В боковой стенке высокого сосуда, наполненного водой до уровня $H = 1{,}8$ м, на глубине h (в метрах) от поверхности воды проделано малое отверстие. Дальность полёта струи вдоль горизонтального дна выражается формулой

$$L(h) = 2\sqrt{h(H-h)}.$$

При какой глубине h (в метрах) дальность полёта струи будет наибольшей?

8. Кинетическая энергия сгорающего тела. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты 500 м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения; коэффициент пропорциональности $k = 100$ килограммов в секунду. Считая начальную скорость $v_0 = 0$, ускорение свободного падения $g = 10$ метров на секунду в квадрате и пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите наибольшую кинетическую энергию тела.

Блок 3. Экономика, медицина, обучение

9. Наибольший доход. Спрос на товар описывается формулой $q = 100 - p$, где p — цена товара (в рублях), а q — количество проданных единиц. Доход равен $R = pq$. При какой цене доход будет наибольшим? Найдите этот наибольший доход (в рублях).

10. Экономичная скорость автомобиля. Расход топлива автомобилем на один километр пути (в литрах) зависит от скорости v (в километрах в час) по формуле

$$f(v) = 0{,}001v + \frac{1{,}6}{v}.$$

При какой скорости v (в километрах в час) расход топлива на один километр пути будет наименьшим?

11. Концентрация лекарства в крови. Концентрация лекарственного препарата в крови (в миллиграммах на литр) через t часов после приёма выражается формулой

$$c(t) = 5te^{-0{,}5t}, \quad t > 0.$$

Через сколько часов после приёма концентрация препарата в крови будет наибольшей?

12. Подготовка к экзамену. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+2}$ часть курса, а забывает $\frac{t}{18}$ часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена наибольшая часть курса?

Блок 4. Геометрическая оптимизация: модель составляем сами

13. Участок у стены здания. Участок прямоугольной формы примыкает одной стороной к стене здания. Для ограждения трёх остальных сторон имеется 40 метров сетки. Какую наибольшую площадь (в квадратных метрах) может иметь такой участок?

14. Коробка наибольшего объёма. В прямоугольном листе картона длиной 48 см и шириной 30 см вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивают открытую прямоугольную коробку. Какой должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объём коробки был наибольшим?

15. Самая прочная балка. Из круглого бревна диаметром $d = 30$ см выпиливают балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h (в сантиметрах), причём $b^2 + h^2 = d^2$. Прочность балки на изгиб

пропорциональна величине $W = \frac{bh^2}{6}$. При какой ширине b (в сантиметрах) прочность балки будет наибольшей?

16. Цилиндр наименьшей поверхности. Найдите соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объёме V наименьшую полную поверхность.

17. Под каким углом видна статуя. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой 5,6 м. На каком расстоянии должен встать человек, уровень глаз которого находится на высоте 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

18. Автомобиль и поезд. Три пункта A, B и C расположены так, что угол ABC равен $60°$. Из пункта A выходит автомобиль, одновременно из пункта B — поезд. Автомобиль движется к B со скоростью 80 километров в час, поезд — к C со скоростью 50 километров в час. В какой момент времени от начала движения расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?

II. Задачи для самостоятельного решения

19. На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 60$ В и внутренним сопротивлением $r = 3$ Ом. Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, где R — сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, равна $P = I^2R$. Какова максимальная тепловая мощность P, которая может быть выделена нагрузкой?

20. Аккумулятор с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом замкнут на нагрузку с сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи равна $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, а выделяемая в нагрузке мощность равна $P = I^2R$. Найдите наибольшее значение мощности P (в ваттах).

21. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2-\tau^2)^2+n\tau^2T^2}}$, где $k = 0{,}91$, $\theta_0 = 9°$, τ — период волны (в секундах), $T = 12$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0{,}72$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

22. Амплитуда вынужденных колебаний корабля при качке на волнении выражается формулой $A = k\theta_0 \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2-\tau^2)^2+n\tau^2T^2}}$, где $k = 0{,}91$, $\theta_0 = 9°$, τ — период волны (в секундах), $T = 19{,}6$ с — период свободных качаний корабля на тихой воде, $n = 0{,}0792$ — коэффициент, зависящий от величины сопротивления воды. При каком периоде волны амплитуда вынужденных колебаний корабля будет наибольшей? Ответ дайте в секундах.

23. В последовательной цепи переменного тока с амплитудой напряжения $U = 120$ В сопротивление резистора равно $R = 15$ Ом, индуктивность катушки $L = 2{,}5$ Гн, ёмкость конденсатора $C = 0{,}1$ Ф. Амплитуда силы тока (в амперах) в зависимости от круговой частоты ω (в радианах в секунду) выражается формулой $I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. При какой круговой частоте ω амплитуда силы тока будет наибольшей? Ответ дайте в радианах в секунду.

24. Участок прямоугольной формы примыкает одной стороной к стене здания. Для ограждения трёх остальных сторон имеется 60 метров сетки. Какую наибольшую площадь (в квадратных метрах) может иметь такой участок?

25. Из квадратного листа жести со стороной 12 см по углам вырезают одинаковые квадраты и загибают края, получая открытую сверху коробку. Какой наибольший объём (в кубических сантиметрах) может иметь такая коробка?

26. Спрос на товар описывается формулой $q = 200 - 2p$, где p — цена товара (в рублях), а q — количество проданных единиц. Доход равен $R = pq$. При какой цене доход будет наибольшим? Найдите этот наибольший доход (в рублях).

27. Прибыль фирмы (в тысячах рублей) при объёме выпуска x (в сотнях изделий) задаётся формулой $\Pi(x) = \frac{480x}{(x+6)^2}$, где $x > 0$. Найдите объём выпуска, при котором прибыль наибольшая, и саму наибольшую прибыль.

28. Количество вещества, получаемого в химическом реакторе за единицу времени, моделируется функцией $v(x) = \frac{200x}{(x+5)^2}$, где $x > 0$ — расход сырья. При каком расходе сырья скорость образования продукта наибольшая и чему она равна?

29. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что её нижний край на 1,8 м выше глаз человека. На каком расстоянии от стены должен встать человек, чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим?

30. Прямоугольный участок площадью 294 квадратных метра огорожен забором и разделён таким же забором на две равные части (перегородка параллельна одной из сторон). При каких линейных размерах участка общая длина забора будет наименьшей?

Ответы

№	Ответ	№	Ответ
1	625 Вт.	16	$H = 2R$.
2	15.	17	$4\sqrt{2} \approx 5{,}7$ м.
3	10.	18	через $\frac{70}{43} \approx 1{,}63$ ч.
4	4.	19	300 Вт.
5	20.	20	72 Вт.
6	3.	21	15.
7	0,9.	22	20.
8	10^7 Дж.	23	2.
9	50 руб.; 2500 руб.	24	450.
10	40.	25	128.
11	2.	26	при цене 50 руб.; 5000 руб.
12	4.	27	600 изделий; 20 тыс. руб.
13	200.	28	$x = 5$; $v(5) = 10$.
14	6 см.	29	2,4 м.
15	$10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ см.	30	21 м и 14 м (перегородка длиной 14 м).