Повторные испытания. Формула Бернулли.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие ***A***, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события *A***.

Допустим, что событие ***A*** наступает в каждом испытании с вероятностью ***P(A)=p***. Определим вероятность того, что в результате ***n*** испытаний событие ***A*** наступило ровно ***m*** раз: $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$.

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие ***A*** может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n \Rightarrow P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1;$

образующих ***полную группу*** событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n).$

и условные вероятности наступления события ***A*** при наступлении события $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n).$

Тогда вероятность события ***A***, можно найти по формуле $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$

Формула Байеса

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n,$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n).$ Пусть в результате опыта наступило событие ***A***, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n).$ Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n,$ относительно события ***A***, т.е. условные вероятности $P(H_i/A).$

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} - формула\ Байеса.$

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Определение. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности. Формула:

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(Cx) = CM(x)$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных (справедливо для произвольного числа случайных величин) величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X)M(Y)$.

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин (справедливо для произвольного числа случайных величин) равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X+Y) + M(X) + M(Y)$.

5. Несмещенная оценка математического ожидания совпадает с математическим ожиданием.

Определение. **Дисперсией (рассеиванием)** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Формула:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$$

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0.$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X).$

3. Дисперсия суммы или разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y) = D(X) + D(Y).$

4. Несмещенная оценка дисперсии: $D_{несмещенная} = \frac{n}{n-1} D.$

Среднеквадратическое отклонение.

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Решение задач

1. Вычислите математическое ожидание случайной величины X, если известно её распределение:

Значение X	0	1	3	5	7
Вероятность	0,2	0,25	0,15	0,1	0,3

2. Пластиковые бутылки с питьевой водой продаются поштучно, либо упаковками по 9 или 12 штук. Известно, что в среднем 72 покупателя из 100 эту воду не покупают, 14 покупают одну бутылку, 9 человек — упаковку, в которой 9 бутылок, и 5 человек берут упаковку, в которой 12 бутылок. Найдите математическое ожидание случайной величины *«количество бутылок в одной покупке»*.

3. Страховая компания заключает с клиентами страховые договоры (полисы). При наступлении страхового случая клиент получает выплату 700 тысяч рублей. Вероятность события *«выплата по отдельно взятому договору»* равна 0,02. Математическое ожидание случайной величины *«доход страховой компании от продажи одного полиса»* равно 1000 рублей. Найдите стоимость полиса в рублях.

4. Известно, что случайная величина Y подчиняется распределению

Значение	0	2	4	6	8	10
Вероятность	0,2	0,15	0,05	0,25	0,1	0,25

Найдите вероятность события $2 < Y \leq 11$.

5. Случайная величина Z распределена по закону

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию случайной величины Z.

6. Всего выпущено 10 000 лотерейных билетов. Сумма выигрышей и число выигрышных билетов показаны в таблице.

Выигрыш	100 р.	1000 р.	5000 р.	10 тыс. р.	50 тыс. р.
Число выигрышных билетов	100	50	10	2	1

Найдите математическое ожидание случайной величины *«выигрыш на один билет»*, который получит один случайный покупатель лотерейного билета. Ответ дайте в рублях.

7. Найдите дисперсию случайной величины X, если известно её распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

8. Вычислите стандартное отклонение случайной величины Y, которая подчиняется распределению

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите стандартное отклонение случайной величины, имеющей распределение

Значение	1	3	4
Вероятность	0,2	0,7	0,1

10. Для независимых случайных величин *X* и *Y* заданы законы распределения:

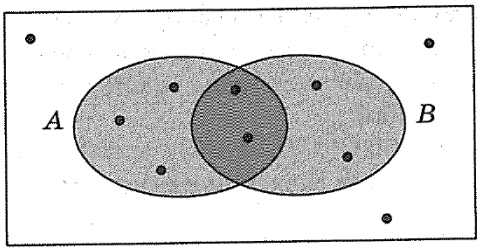
X	0	1	2
P(X)	0.25	0.35	*a*

Y	-1	0	1
P(Y)	0.24	*a*	*b*

Найдите $M(7x\text{-}18y\text{+}6)=M_1$, $D(2x\text{-}3y\text{+}6)=D_2$, результат округлите до сотых.

11. В магазине куплено 13 одинаковых луковиц гиацинтов. Вероятность того, что каждая отдельная луковица успешно прорастёт, равна 0,8. Во сколько раз вероятность события *«прорастёт ровно 8 луковиц»* больше вероятности события *«прорастёт ровно 5 луковиц»*?

12. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $\mathrm{P}(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A.



13. Первый член бесконечной последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0{,}8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что среди членов этой последовательности найдётся число -1?

14. Первый член бесконечной последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0{,}8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что среди членов этой последовательности найдётся число -2?

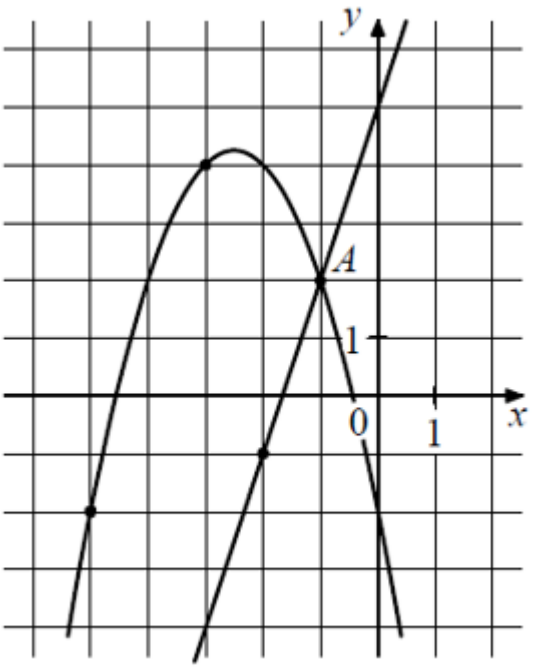
15. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 2 и 4 очка. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

16. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что при каждом отдельном выстреле вероятность промаха равна 0,8. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

17. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 15 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 65 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

18. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 99 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 89 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 15 % пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

19. На рисунке изображены графики функций $f(x)=3x+5$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2} AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$. б) Найдите углы трапеции.

2. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD=AM$.

а) Докажите, что $CD=AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что AB=10, AC=12, $AM=5$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P, отличной от O, и не проходят через точку O. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если известно, что $AC=BD$, а MN=10.

4. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1:4.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH.

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH.

б) Найдите CL, если известно, что CM=10, $CH=6$.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение $PM:BQ$, если известно, что $AB:AC=1:3$.

7. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что $AC=15$, $BC = 20$.

8. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC, если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

9. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M.

а) Докажите, что M — середина AB.

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P. Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды AP, если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

10. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle ACB = 30^0$. , а точка D лежит на стороне BC, причём $DB:DC=1:3$.